

Masterarbeit

Fraunhofer-Institut für
Zerstörungsfreie Prüfverfahren IZFP

Titel/Thema

Registrierung von a priori Volumina in der Compuerlaminographie

Dirk Henn

QM/Ressourcenmanagement
Telefon +49 681 9302-3856
Fax +49 681 9302-113856
Dirk.Henn@izfp.fraunhofer.de
www.izfp.fraunhofer.de

Auftraggeber

Berichtsnummer: 150105-TW

Datum: 28.01.2015
Seitenzahl: Seite 1 von 1

Verfasser
Laura Dörr

Abteilung
Zustandsüberwachung und
Lebensdauermanagement

Telefon

Unterschrift

Freigabe

Dr. Michael Maisl
(Gruppenleiter)

Stichworte (max. 8)

Computerlaminographie; Computertomographie; A priori Information; CLARA; SART

Zusammenfassung

Während die Computertomographie (CT) bereits seit geraumer Zeit ein etabliertes und zunehmend wichtiges Verfahren der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung ist, gewinnt auf diesem Gebiet nunmehr auch die Computerlaminographie (CL) an Bedeutung. Diese Technik ist im Gegensatz zur klassischen CT in der Lage sehr große planare Objekte mit sehr hoher Auflösung zu messen und darzustellen und ist daher in vielen Anwendungen der CT überlegen. Jedoch bringt sie, aufgrund der schrägen Durchstrahlungsrichtungen, auch einen bedeutsamen Nachteil mit sich: Der sinnvoll rekonstruierbare Bereich ist deutlich kleiner als bei der CT. Im rekonstruierten Volumen treten gerade mit zunehmender Entfernung von einer zentralen 'Fokusschicht' vermehrt Artefakte und große Unschärfe auf. Diesem Problem kann erfolgreich entgegen gewirkt werden, indem so genannte a priori Information in Form eines vorliegenden dreidimensionalen Volumens in das Rekonstruktionsverfahren eingebunden wird. Um die Qualität der Rekonstruktion zu maximieren, muss dabei jedoch sichergestellt werden, dass diese Zusatzinformation auch sinnvoll positioniert ist. Das bedeutet, das a priori Volumen muss in Position, Ausrichtung und Größe exakt den zu rekonstruierenden Daten entsprechen. Somit muss zunächst eine affine Transformation im Raum bestimmt werden, die eine Registrierung der beiden Datensätze (a priori Information und Messdaten) bewirkt. Diese Aufgabenstellung soll im Rahmen dieser Arbeit praxisbezogen gelöst werden. Dazu wird zunächst der vereinfachte Fall eines kompakten Prüfkörpers, der problemlos durch eine gewöhnliche Computertomographie-Anlage aufgenommen werden kann, und auf dessen Oberfläche drei Metallkugeln hoher Dichte fixiert wurden, betrachtet. Von diesem Körper werden Tomographie und Laminographiemessungen durchgeführt und die erhaltenen Daten werden zu 3-D Volumina rekonstruiert, die es anhand der Kugelpositionen miteinander zu registrieren gilt. Die so gefundene Transformation wird auf ihre Korrektheit überprüft und anschließend wird ein praxistauglicher Weg gezeigt, diese auf vorliegende Datensätze, bestehend aus CL-Messung und a priori Volumen, anzuwenden. Danach wird das Problem der Transformationsfindung auch für allgemeine Daten, die nicht durch Anbringen jeglicher Markierungen vereinfacht wurden, anwendungsbezogen gelöst. Es wird weiterhin gezeigt, dass das gefundene Vorgehen auch anwendbar ist im Falle binärer a priori Daten.



Zertifiziertes Managementsystem
am Fraunhofer IZFP Saarbrücken

Verteiler

1x Auftraggeber, 1x IZFP/Bibliothek

Hinweis

Ohne schriftliche Zustimmung durch das Fraunhofer IZFP darf der Bericht nicht auszugsweise vervielfältigt und/oder weitergegeben oder für Veröffentlichungen verwendet werden. Zuwiderhandlung verpflichtet zum Schadenersatz.

Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät I
Fachrichtung Mathematik

Masterarbeit

**Registrierung von a priori Volumina in der
Computerlaminographie**

vorgelegt von

Laura Dörr

am 28.01.2015

Begutachtet von:

Prof. Dr. Thomas Schuster

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Alfred Louis

Betreut von:

Dr. Christian Schorr

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass die vorliegende Arbeit mit der elektronischen Version übereinstimmt.

Statement in Lieu of an Oath

I hereby confirm that I have written this thesis on my own and that I have not used any other media or materials than the ones referend to in this thesis.

I hereby confirm the congruence of the contents of the printed data and the electronic version of the thesis.

Saarbrücken, _____
(Datum/Date)

(Unterschrift/Signature)

Kurzfassung

Während die Computertomographie (CT) bereits seit geraumer Zeit ein etabliertes und zunehmend wichtiges Verfahren der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung ist, gewinnt auf diesem Gebiet nunmehr auch die Computerlaminographie (CL) an Bedeutung. Diese Technik ist im Gegensatz zur klassischen CT in der Lage sehr große planare Objekte mit sehr hoher Auflösung zu messen und darzustellen und ist daher in vielen Anwendungen der CT überlegen. Jedoch bringt sie, aufgrund der schrägen Durchstrahlungsrichtungen, auch einen bedeutsamen Nachteil mit sich: Der sinnvoll rekonstruierbare Bereich ist deutlich kleiner als bei der CT. Im rekonstruierten Volumen treten gerade mit zunehmender Entfernung von einer zentralen 'Fokusschicht' vermehrt Artefakte und große Unschärfe auf. Diesem Problem kann erfolgreich entgegen gewirkt werden, indem so genannte a priori Information in Form eines vorliegenden dreidimensionalen Volumens in das Rekonstruktionsverfahren eingebunden wird. Um die Qualität der Rekonstruktion zu maximieren, muss dabei jedoch sichergestellt werden, dass diese Zusatzinformation auch sinnvoll positioniert ist. Das bedeutet, das a priori Volumen muss in Position, Ausrichtung und Größe exakt den zu rekonstruierenden Daten entsprechen. Somit muss zunächst eine affine Transformation im Raum bestimmt werden, die eine Registrierung der beiden Datensätze (a priori Information und Messdaten) bewirkt. Diese Aufgabenstellung soll im Rahmen dieser Arbeit praxisbezogen gelöst werden.

Dazu wird zunächst der vereinfachte Fall eines kompakten Prüfkörpers, der problemlos durch eine gewöhnliche Computertomographie-Anlage aufgenommen werden kann, und auf dessen Oberfläche drei Metallkugeln hoher Dichte fixiert wurden, betrachtet. Von diesem Körper werden Tomographie- und Laminographiemessungen durchgeführt und die erhaltenen Daten werden zu 3-D Volumina rekonstruiert, die es anhand der Kugelpositionen miteinander zu registrieren gilt. Die so gefundene Transformation wird auf ihre Korrektheit überprüft und anschließend wird ein praxistauglicher Weg gezeigt, diese auf vorliegende Datensätze, bestehend aus CL-Messung und a priori Volumen, anzuwenden. Danach wird das Problem der Transformationsfindung auch für allgemeine Daten, die nicht durch Anbringen jeglicher Markierungen vereinfacht wurden, anwendungsbezogen gelöst. Es wird weiterhin gezeigt, dass das gefundene Vorgehen auch anwendbar ist im Falle binärer a priori Daten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
1.1	Motivation	9
1.2	Verwandte Arbeiten	12
1.3	Aufbau der Arbeit	13
2	Grundlagen	15
2.1	Computertomographie (CT)	15
2.1.1	CT Geometrien	15
2.1.2	Mathematische Modellierung	19
2.2	Rekonstruktionsverfahren	22
2.2.1	ART	22
2.2.2	SART	24
2.3	Computerlaminographie	26
2.3.1	Anlagenaufbau: CLARA	26
2.3.2	Einschränkungen der Computerlaminographie	28
2.4	A priori Information	31
2.4.1	SART und a priori Information	31
3	Voruntersuchung	33
3.1	Vereinfachte Problemstellung	33
3.1.1	Mathematische Grundlage	33
3.2	Transformationsbestimmung	35
3.2.1	Skalierung	35
3.2.2	Rotation	36
3.2.3	Translation	37
3.2.4	Gesamte Transformation	38
3.3	Anwendung der Transformation	39
3.3.1	Die Geometriedatei	39
3.3.2	Anwendung der Skalierung	39
3.3.3	Anwendung von Rotation und Translation	40
3.4	Beispiel Skischuhschnalle	41
3.4.1	Transformationsberechnung	42
3.4.2	Registrierungsergebnisse	43
3.5	Auswertung	45
3.5.1	Ergebnisse	45
3.5.2	Einschränkungen	45

4	Algorithmus	47
4.1	Problemstellung	47
4.1.1	Allgemeine Formulierung	47
4.1.2	Beispiel: Platine	47
4.2	Rotationsberechnung	50
4.2.1	Problembetrachtung und Lösungsansatz	50
4.2.2	Schritt 1: Abtasten des Parameterraums	50
4.2.3	Schritt 2: Erzeugen von Vergleichs-Projektionen	54
4.2.4	Schritt 3: Evaluation der Rotation	55
4.2.5	Schritt 4: Auswahl des Minimums und weiteres Vorgehen	58
4.2.6	Parameterwahl	60
4.2.7	Projektionsgröße	61
4.2.8	Beispiel: Platine	61
4.3	Skalierungsberechnung	64
4.4	Translationsberechnung	66
4.5	Abstiegsverfahren in der Rotationsberechnung	69
4.5.1	Verfahren	69
4.5.2	Einsatz des Abstiegsverfahrens	70
5	Spezialfälle und Beispiele	73
5.1	Vergleich zur Voruntersuchung: Skischuhschnalle	73
5.2	Binäre a priori Daten	75
6	Weitere Untersuchungen	77
6.1	Genauigkeit der Translationsberechnung	77
6.2	Genauigkeit der Skalierungsberechnung	79
6.3	Fehlerquellen	81
6.3.1	Messfehler	81
6.3.2	Diskretisierungsfehler	81
6.3.3	Fehler bei der Binarisierung	81
6.3.4	Fehlerhafter Vergrößerungsfaktor	82
6.3.5	Bedienungsfehler und Schlechte Parameterwahl	82
6.4	Fehlerhafte Daten / Robustheit	83
7	Zusammenfassung und Ausblick	85
7.1	Zusammenfassung	85
7.2	Ausblick	87

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Computertomographie (CT) ist ein, auf Röntgenstrahlen basierendes, bildgebendes Verfahren, welches in der Lage ist Informationen über das Innere eines Körpers zu liefern, ohne diesen zu beschädigen oder gar zu zerstören. Aufgrund dieser Eigenschaften konnte sich besagte Technik zum Einen als essentielles Diagnoseverfahren in der Medizin etablieren, zum Anderen ist die CT auch zu einer nicht wegzudenkenden Methode der industriellen zerstörungsfreien Prüfung (ZfP) herangewachsen.

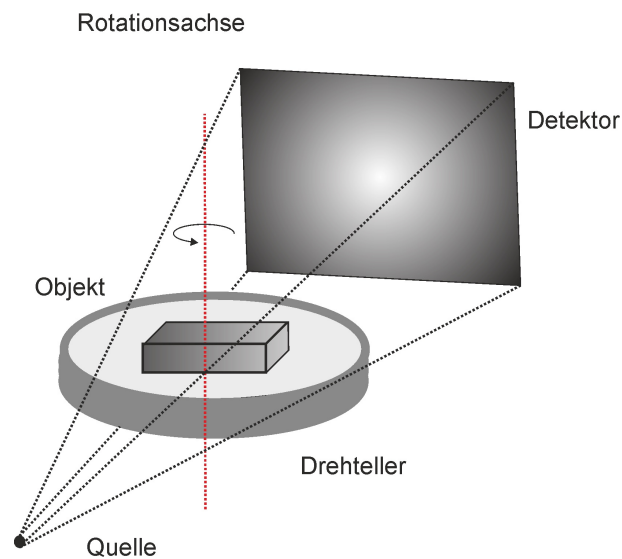


Abbildung 1.1: Computertomographie Anlage: Kegelstrahlgeometrie ([18])

Abbildung 1.1 zeigt den typischen Aufbau einer industriellen Computertomographie-Anlage. Elementarer Bestandteil ist dabei zunächst eine Röntgenquelle, die Röntgenstrahlen in Richtung eines (hier zweidimensionalen) Detektors aussendet. Auf ihrem Weg durchdringen diese Strahlen einen zu prüfenden Körper, wobei sie umso stärker abgeschwächt werden je mehr bzw. je dichteres Material sie dabei durchlaufen. Der hinter dem Objekt platzierte Detektor misst schließlich die abgeschwächte Intensität der Strahlen und erstellt anhand dessen ein zweidimensionales Bild, eine sogenannte Projek-

tion. Jede CT-Messung beinhaltet die Erstellung einer Vielzahl solcher Projektionen: Nach Aufnahme eines jeden Bildes wird das Objekt um einen gewissen Winkel auf einem Drehteller rotiert bis eine komplette Drehung um die eigene Achse, also um 360° , vollzogen ist. Vollkommen gleichwertige Messergebnisse können auch erzielt werden, indem Quelle und Detektor um selbige Rotationsachse rotiert werden, während die Position des Objektes fest bleibt. So ist es möglich den exakten Rotationsvorgang der Anlage zu beschreiben, indem lediglich Position (und Ausrichtung) von Quelle und Detektor zu den einzelnen Messzeitpunkten angegeben werden. Aus den erstellten Projektionen kann mit Hilfe verschiedener mathematischer Verfahren dann auf die Dichteverteilung im Objekttinneren geschlossen und ein dreidimensionales Bild, ein sogenanntes Volumen, rekonstruiert werden. Dies kann analytisch, zum Beispiel mit Hilfe von approximativen Inversen [13], [15], oder auch durch iterative Verfahren wie ART [9] oder SART [1], geschehen.

Typisch für den Aufbau einer jeden CT-Anlage ist es, dass die (vertikale) Rotationsachse, um die das Objekt gedreht wird, senkrecht auf der (horizontalen) Normalen des Detektors, die die Quelle schneidet, steht. Bei der hier abgebildeten Kegelstrahlgeometrie wird ein ganzer Kegel von Röntgenstrahlen in Richtung des Detektors ausgesandt. In diesem Fall bezeichnet man den Strahl der senkrecht auf den Detektor einfällt, und stets das Detektorzentrum trifft, als **Hauptstrahl**. Dieser Hauptstrahl steht hier also senkrecht auf der Rotationsachse. Somit ist der Anlagenaufbau allein durch Vorgabe der Abstände zwischen Quelle, Objekt und Detektor eindeutig bestimmt.

Betrachtet man den Aufbau der CT-Anlage, so wird deutlich, dass diese sehr gut zur Aufnahme kompakter Objekte von begrenzter Größe geeignet ist, während sich bei planaren oder sehr großen Prüfkörpern Probleme ergeben. Soll zum Beispiel ein planares Objekt mit sehr hoher Auflösung, d.h. stark vergrößert aufgenommen werden, so muss dieses sehr nah an die Quelle herangebracht werden. Hierdurch kann es bei der Rotation des Drehtellers zu einer Kollision des Prüflings mit der Quelle kommen. Dieselbe Gefahr droht auch allgemein bei sehr großen Objekten.

Durch einige Modifikationen im Aufbau der Tomographieanlage, welche im Folgenden genauer beschrieben werden, können diese Probleme umgangen werden. Dies führt zur sogenannten Computerlaminographie (CL).

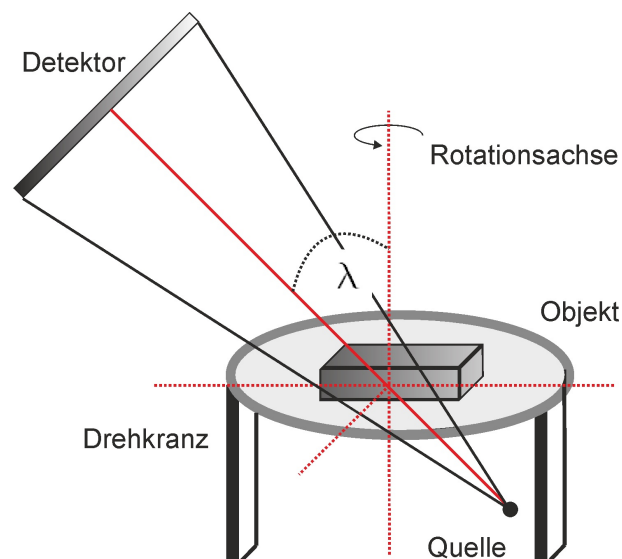


Abbildung 1.2: Computerlaminographieanlage "CLARA" (Computerlaminographie und Radiographie Anlage) ([18])

Es existieren eine ganze Reihe verschiedener Laminographiearten, doch im Rahmen dieser Arbeit ist lediglich eine Art der Laminographie von Bedeutung: die **Rotationslaminographie**. Der grundlegende Unterschied zur CT ist hierbei, dass der Winkel zwischen Hauptstrahl und Rotationsachse nicht vorgeschrieben ist, sondern nahezu frei gewählt werden kann. Dieser Winkel trägt sinngemäß die Bezeichnung **Laminographiewinkel**.

Auch innerhalb eben genannter Laminographieart gibt es wiederum eine Vielzahl verschiedener Geometrien, in dieser Arbeit wird jedoch nur auf einen speziellen Aufbau, die sogenannte '**CLARA**' (Computerlaminographie and Radiographie Anlage) Geometrie näher eingegangen. Die 'CLARA' wurde vom Fraunhofer Entwicklungszentrum Röntgentechnik (EZRT), das unter anderem am Saarbrücker Institut für zerstörungsfreie Prüfverfahren (IZFP) ansässig ist, entwickelt und wird dort auch in der Praxis angewendet. Abbildung 1.2 illustriert den zugehörigen Anlagenaufbau.

Wie vermutet werden kann, bringt die Einführung des Laminographiewinkels auch Nachteile mit sich: So lässt sich weniger Tiefeninformation, das heißt Information über die Dichteverteilung des Prüflings in vertikaler Richtung, gewinnen, je kleiner der Laminographiewinkel gewählt wird. Weiterhin bedingt es ein derartiger Anlagenaufbau, dass bei einem quaderförmigen Rekonstruktionsvolumen lediglich eine der horizontalen Schichten vollständig rekonstruierbar ist, diese Schicht wird auch **Fokusschicht** genannt. Je weiter man sich innerhalb des Quaders von dieser Fokusschicht entfernt, desto kleiner ist der Anteil der jeweiligen Schicht, über den vollständige Daten vorliegen, d.h. der sinnvoll rekonstruiert werden kann. Daher treten hier vermehrt Artefakte und Unschärfe auf.

Um diese, bei der CL auftretenden Probleme zu umgehen, wird in der Praxis oft gegebenes Vorwissen über den zu prüfenden Körper, wie beispielsweise dessen Größe oder Form, in den Rekonstruktionsprozess mit eingebunden. Solches Vorwissen, wie es in der industriellen zerstörungsfreien Prüfung oft in Form von CAD- oder STL-Daten vorliegt und auch für sogenannte Soll-Ist-Vergleiche herangezogen wird, nennt man **a priori Information**. Um solche Zusatzinformation sinnvoll nutzen zu können, greift man auf iterative Rekonstruktionsalgorithmen zurück, da es hier möglich ist die gegebene Information über den frei wählbaren Startwert (d.h. Startvolumen) in den Rekonstruktionsalgorithmus einzubinden. In dieser Arbeit wird das Verfahren **SART** (simultaneous algebraic reconstruction technique), das in Kapitel 2 genauer vorgestellt wird, benutzt.

Möchte man ein in Form eines 3-D Volumens gegebenes Vorwissen nun als Startvolumen verwenden, so muss man zunächst sicher gehen, dass Größe und Orientierung des Objekts im a priori Volumen genau mit ebendiesen Eigenschaften des tatsächlich geprüften Objektes (im aus den Messdaten rekonstruierbaren Volumen) übereinstimmt. Eine solche Übereinstimmung ist grundlegende Voraussetzung, um sinnvolle Rekonstruktionsergebnisse erwarten zu können. Die vorliegenden Daten des Objektes, das heißt die a priori Information und die Computerlaminographie-Aufnahme, müssen also zunächst durch Bestimmung einer geeigneten affinen Transformation miteinander registriert werden. Die gesuchte Transformation besteht hierbei aus einer Rotation, einer Translation und einer Skalierung im $\mathbb{R}^3$, wobei die Skalierung der Daten in der Praxis oft bereits übereinstimmt und somit nicht bestimmt werden muss.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine solche Transformation möglichst effizient und praxistauglich zu bestimmen. Gegebene Daten sind hierbei die Projektionen einer CLARA Laminographiemessung, sowie die zugehörigen Geometriedaten, und ein, in Form eines 3-D Volumens vorliegendes Vorwissen über den Prüfkörper. Das a priori Volumen kann hierbei auch in binärer Form (z.B. STL-Daten) vorliegen. Die Geometriedaten enthalten vollständige Information über den Anlagenaufbau, d.h. zu jeder vorliegenden Projektion die Position der Quelle, sowie die Position und die Ausrichtung des Detektors. Darüber hinaus wird in dieser Arbeit auch eine geschickte Methode zur Anwendung der gefundenen Transformation auf die vorliegenden Daten gefunden. Da hier 2-D und 3-D-Daten miteinander registriert werden müssen, spricht man von einem Problem der 2-D-3-D-Bildregistrierung.

1.2 Verwandte Arbeiten

Die Bildregistrierung ist inzwischen ein sehr großes, stetig wachsendes Gebiet der Bildverarbeitung, welches seit den 1970-er Jahren Thema zahlreicher Arbeiten und Veröffentlichungen ist und dessen Anwendungsmöglichkeiten ebenso schnell wachsen wie neue bildgebende Verfahren oder auch Kameratechniken entwickelt werden. Übersichten über die verschiedenen Aufgabenstellungen und Lösungsansätze der Bildregistrierung liefern unter Anderem Brown [3] oder Zitova [21]. Genanntes Gebiet umfasst jedoch nicht mehr nur die 2-D und 3-D Bildregistrierung, bei der Bilder gleicher Dimension miteinander in Verbindung gebracht werden sollen, sondern auch die 2-D-3-D-Bildregistrierung, bei der zwei- und dreidimensionale Daten registriert werden sollen, wie es auch in dieser Arbeit der Fall ist.

Die im Jahre 2008 veröffentlichte Dissertation von M. Franz [7] beschäftigt sich unter Anderem mit der Registrierung von a priori Volumina in der Computertomographie. Die Arbeit stellt eine Korrekturmethode für, im Rahmen eines Soll-Ist-Vergleiches erstellte, CT-Aufnahmen vor, die die gegebene a priori Information (Soll-Daten) ausnutzt, um eine Anwendung schon während der Rekonstruktion zu ermöglichen. Dies macht jedoch eine vorherige Registrierung von a priori Information und CT-Messdaten erforderlich. Einige der darin gefundenen Ansätze, gerade für die Bestimmung der Rotation, können auch im Fall der Computerlaminographie verwendet werden und kommen auch in dieser Arbeit, in angepasster Form, zur Anwendung.

1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 sollen zunächst die grundlegende Begriffe und Definitionen genauer besprochen werden. Neben den mathematischen Grundlagen und Eigenschaften von CT und CL wird hier vor allem das iterative Rekonstruktionsverfahren SART (simultaneous algebraic reconstruction technique) erklärt. Weiterhin wird gezeigt, wie a priori Information in den Rekonstruktionsprozess eingebunden werden kann.

Anschließend werden in Kapitel 3 einige Voruntersuchungen des eigentlichen Problems angestellt. Genauer gesagt wird ein vereinfachter Fall eines markierten Prüfkörpers betrachtet, für den das Problem deutlich einfacher zu lösen ist. Darüber hinaus wird auch die Anwendbarkeit der gefundenen Transformation auf die Daten sichergestellt.

Eine praxistaugliche Lösung des Problems wird in Kapitel 4 gefunden. Dieses ist wiederum unterteilt in die Bestimmung der einzelnen Komponenten der Transformation, d.h. Rotation, Translation und Skalierung.

In Kapitel 5 werden einige Spezialfälle angesprochen und zugehörige Beispiele betrachtet. Zum Beispiel wird hier auf Besonderheiten im Falle eines binären a priori Volumens eingegangen.

Kapitel 6 enthält weitere Untersuchungen des vorgestellten Algorithmus. Fehlerquellen, die zu schlechten Registrierungsergebnissen führen können werden benannt und es werden einige Genauigkeitsbetrachtungen durchgeführt. Auch die Robustheit des Verfahrens wird untersucht.

Letztlich werden im abschließenden Kapitel 7 die Ergebnisse zusammengestellt und bewertet. Es werden darüber hinaus Verbesserungsansätze und offene Punkte angesprochen.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Computertomographie (CT)

Die Computertomographie ist eine in den 1960-er Jahren von Allan M. Cormak und Godfrey Hounsfield entwickelte Technik, die es ermöglicht, ein dreidimensionales Bild, ein Volumen, das Informationen über die Dichteverteilung im Inneren eines Objektes enthält, zu erstellen. Dazu wird das Objekt mit Hilfe von Röntgenstrahlung aus verschiedenen Richtungen durchstrahlt. Anhand der nach Durchdringen des Objektes gemessenen Intensitäten dieser Strahlen werden sogenannte Projektionen (2D Bilder) erstellt. Die Dichteverteilung im Inneren des Körpers kann anschließend anhand der Projektionen berechnet werden. Dieser Vorgang nennt sich Rekonstruktion. Es handelt sich hierbei um ein inverses Problem, welches mit Hilfe verschiedener Inversionsformeln und Algorithmen gelöst werden kann. Bevor wir zu diesen Lösungsansätzen kommen, werden zunächst verschiedene Geometrien von CT-Anlagen besprochen und der Messvorgang, den es zu invertieren gilt, mathematisch modelliert. Auf die physikalischen Grundlagen der Röntgentechnik und der Computertomographie soll in dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Umfangreiche Informationen hierzu können zum Beispiel in [10] oder [15] gefunden werden.

2.1.1 CT Geometrien

In diesem Abschnitt werden zunächst die wichtigsten Geometrien der CT besprochen und zueinander in Korrelation gebracht.

Es wurde bereits in Kapitel 1 erwähnt, dass eine Rotation der Anlage, die zur Rotation des Objektes mit Hilfe eines Drehtellers vollkommen äquivalent ist, auch wie folgt erreicht werden kann: Man rotiert Quelle und Detektor in umgekehrter Richtung um eine vertikale Achse durch den (approximierten) Objektmittelpunkt, während die Position des Objektes unverändert bleibt. Von diesem Fall wird im Folgenden ausgegangen, um die Anlagenaufbauten und deren Rotationsvorgang während einer CT-Messung besser beschreiben zu können.

Weiterhin wird per Konvention festgelegt, dass das quaderförmige Rekonstruktionsvolumen, und damit auch die Rotationsachse, stets im Ursprung positioniert ist und weder Position noch Orientierung des Objektes während des Messvorganges verändert werden.

Parallelstrahlgeometrie

Bei der zweidimensionalen Parallelstrahlgeometrie, die in Abbildung 2.1 illustriert wird, verlaufen alle zu messenden Strahlen einer Projektion in paralleler Richtung. Somit besteht eine 1-zu-1 Beziehung zwischen Projektionen (d.h. der Rotation des Objektes) und der Durchstrahlungsrichtung.

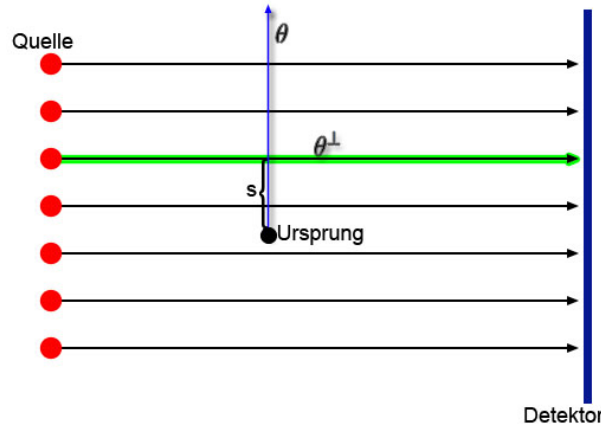


Abbildung 2.1: Parallelstrahlgeometrie

Während einer Messung werden Quelle und Detektor zunächst, wie oben beschrieben, auf Kreisbahnen um das Objekt bewegt, zusätzlich muss jedoch zumindest die Quelle während der Erstellung einer jeden Projektion mehrfach neu positioniert werden. Für jeden zu messenden Strahl (d.h. jedes Pixel) der Projektion, erfolgt daher eine Verschiebung der Quelle auf einer Geraden, die tangential auf der Kreisbahn steht. Im Falle eines nur aus einem Pixel bestehenden Detektors, muss dieser analog auf einer parallelen Geraden so bewegt werden, dass die abgeschwächte Intensität des Strahls gemessen werden kann. Da eine derart häufige Neujustierung der Anlage einen extrem hohen Aufwand mit sich bringt, wird diese Geometrie in der Praxis kaum verwendet. Die Parallelstrahlgeometrie eignet sich jedoch gut zur mathematischen Modellierung der CT, da insbesondere auch die praxistaugliche Fächerstrahlgeometrie darauf zurückgeführt werden kann.

Abbildung 2.1 zeigt auch, wie ein Strahl im $\mathbb{R}^2$ durch Angabe einer Richtung in Form eines Einheitsvektors θ , der senkrecht auf dem Strahl steht und vom Ursprung weg zeigt, und den orthogonalen Abstand des Strahls vom Ursprung $s \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist. Für den so angegebenen, in Richtung des Vektors $\theta^\perp$ verlaufende Strahl gilt

Definition 2.1 (Darstellung eines Strahles in der Parallelstrahlgeometrie)

Sei $\theta \in \mathcal{S}^1$, $s \in \mathbb{R}$, dann ist $S(\theta, s)$ der dadurch eindeutig bestimmte Strahl mit

$$\begin{aligned} S(\theta, s) &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \theta^T x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x = s \cdot \theta + t \cdot \theta^\perp, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

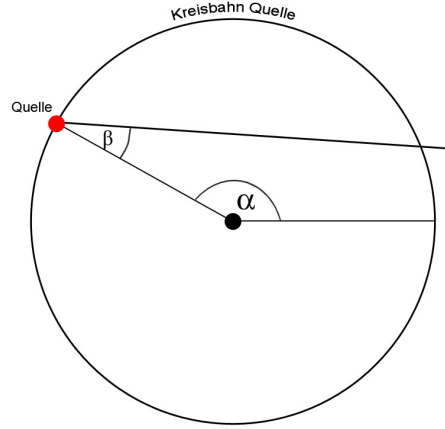


Abbildung 2.2: Fächerstrahlgeometrie

Fächerstrahlgeometrie

Ebenso wie bei der oben beschriebenen Parallelstrahlgeometrie bewegen sich Quelle und Detektor auch bei der zweidimensionalen Fächerstrahlgeometrie auf Kreisbahnen um das Objekt, das im Ursprung platziert ist. Eine zusätzliche Verschiebung der Quelle entlang einer Geraden ist jedoch nicht nötig, da diese zur Erstellung einer Projektion einen ganzen Fächer von Röntgenstrahlen in Richtung Detektor aussendet, so dass der gesamte zweidimensionale Detektor (Zeilendetektor) zeitgleich bestrahlt wird. Hierbei liegen Quelle und Detektormittelpunkt stets auf einer Ursprungsgeraden, die senkrecht auf dem Detektor steht. Der Abstand zwischen Quelle und Objekt $d_{SO} \in \mathbb{R}$ sowie der Abstand zwischen Quelle und Detektor $d_{SD} \in \mathbb{R}$ sind hierbei vorgeschrieben und bleiben während des gesamten Messvorgangs fix. Somit ist jeder während einer CT-Messung gemessene Strahl eindeutig bestimmt durch die beiden Winkel $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ und $\beta \in [-\beta_{max}, \beta_{max}]$. Diese Zuordnung ist in Abbildung 2.2 illustriert. Hierbei gibt α den Rotationszustand der Anlage und somit insbesondere die Position der Quelle an, während β den Winkel angibt, den der Strahl mit dem Hauptstrahl, also der zum Detektor orthogonalen Geraden durch die Quelle (und damit auch durch den Ursprung), einschließt.

Definition 2.2 (Anlagenaufbau Fächerstrahlgeometrie)

Bei der Fächerstrahlgeometrie gilt für $\alpha \in [0, 2\pi)$ für die Position der Quelle $Q_F(\alpha)$

$$Q_F(\alpha) = d_{SO} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

und die Position des Detektors D_F

$$D_F(\alpha) = -(d_{SD} - d_{SO}) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ist zusätzlich $\beta \in [-\beta_{max}, \beta_{max}]$, so ist dadurch ein eindeutiger Strahl $S_F(\alpha, \beta)$ bestimmt mit

$$S_F(\alpha, \beta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : Q_F + t \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Für $\alpha = 0^\circ$ ist die Quelle somit auf der positiven x-Achse und der Detektor dementsprechend auf dem negativen Teil dieser Koordinatenachse positioniert. Der Winkel β_{max} ist der sogenannte Öffnungswinkel, der sich aus Detektorgröße und dem Abstand des Detektors zum Ursprung, d_{SD} , berechnen lässt. (Dabei erhält man für $\beta = \pm\beta_{max}$ gerade die Strahlen, die die Kanten des Zeilendetektors treffen.)

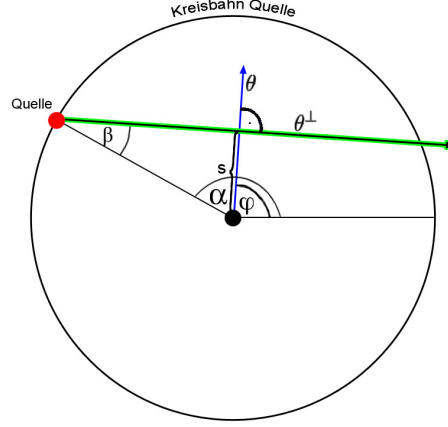


Abbildung 2.3: Fächerstrahlgeometrie mit transformierten Koordinaten

Aus diesen Koordinaten lässt sich durch eine einfache Umformung eine Darstellung des Strahls analog zur Parallelstrahlgeometrie berechnen, d.h. einen Einheitsvektor θ , der senkrecht auf dem Strahl steht sowie den orthogonale Abstand des Strahls vom Ursprung s . Um diese Transformation zu berechnen, bestimme man zunächst den Winkel φ , den Winkel zwischen θ und der x-Achse:

$$\varphi = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (2.1)$$

Betrachtet man Abbildung 2.3, so wird klar, dass sich diese Formel direkt aus der Winkelsumme eines Dreiecks ergibt. Mit dem Sinussatz lässt sich ebenso einfach der Abstand s berechnen. Es gilt:

Definition 2.3 (Fächerstrahltransformation)

Für $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$, $\beta \in [-\beta_{max}, \beta_{max}]$, $\varphi = \alpha - (\frac{\pi}{2} - \beta)$ kann der zugehörige Strahl beschrieben werden durch einen orthogonalen Einheitsvektor θ und den Abstand vom Ursprung s :

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ s(\alpha, \beta) &= d_{SO} \cdot \sin(\beta) \end{aligned}$$

Mit dieser Transformation gilt also

$$S_F(\alpha, \beta) = S(\theta(\alpha, \beta), s(\alpha, \beta)) \quad (2.2)$$

mit S dem Strahl in der Darstellung der Parallelstrahlgeometrie nach Definition 2.1.

Diese Transformation ist insofern sehr nützlich, da damit alle mathematischen Modelle, die im Folgenden für die Parallelstrahlgeometrie entwickelt werden, durch Umrechnung der Koordinaten direkt für die Fächerstrahlgeometrie übernommen werden können.

Kegelstrahlgeometrie

Die Kegelstrahlgeometrie, die bereits einleitend in Abbildung 1.1 graphisch dargestellt wurde, ist das 3-D Analogon der Fächerstrahlgeometrie. Sie wird in der Praxis der zerstörungsfreien Prüfung oft angewendet. Die Quelle bestrahlt hier also durch einen Kegel von Röntgenstrahlung den gesamten, meist quadratischen, zweidimensionalen Detektor. Quelle und Detektor bewegen sich in der y-z-Ebene komplett analog zur Fächerstrahlgeometrie, sodass die Rotationsachse mit der z-Achse übereinstimmt. Damit lässt sich der Rotationszustand der Anlage auch hier durch einen Winkel $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ beschreiben. Der Detektor ist so orientiert, dass eine seiner Kanten parallel zur x-Achse verläuft, während die andere Kante zu Beginn in z-Richtung verläuft und dadurch im Laufe der Rotation stets kollinear zu einer Geraden der y-z-Ebene bleibt.

Definition 2.4 (Anlagenaufbau Kegelstrahlgeometrie)

Bei der Kegelstrahlgeometrie gilt für $\alpha \in [0, 2\pi)$ für die Position der Quelle $Q(\alpha)$

$$Q(\alpha) = d_{SO} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

und die Position des Detektors D

$$D(\alpha) = -(d_{SD} - d_{SO}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die den 2-D Detektor aufspannenden Vektoren d^h, d^v sind gegeben durch

$$d^v(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$d^h(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Um einen einzelnen Strahl zu beschreiben sind hier, neben dem Winkel $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$, zwei weitere Winkel bzw. ein Einheitsvektor $\theta \in \Theta_\alpha \subset \mathcal{S}^2$, der die Richtung des Strahls angibt, erforderlich. Θ_α beschreibt dabei die Menge der zulässigen Strahlenrichtungen für den Rotationszustand α und enthält alle Richtungen, in die Strahlen von der Quelle ausgesandt werden können, so dass der Detektor tatsächlich getroffen wird.

2.1.2 Mathematische Modellierung

Die Modellierung des tomographischen Messvorgangs erfolgt zunächst für den einfacheren, zweidimensionalen Aufbau. Der für die zerstörungsfreie Prüfung relevante, dreidimensionale Fall lässt sich anschließend darauf zurückführen.

Die mathematische Grundlage der Computertomographie bildet die von Johann Radon 1917 vorgestellte Radon-Transformation:

Definition 2.5 (Radon Transformation)

Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$, $\theta \in \mathcal{S}^1 = \partial\Omega$ ein Einheitsvektor, $s \in \mathbb{R}$.

Dann ist die zweidimensionale Radon-Transformation einer Schwartzschen Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ definiert als

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(\theta, s) &:= \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(s - x^T \theta) dx\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\theta^\perp \in \mathcal{S}^1$ den zu θ orthogonalen Einheitsvektor und δ die Delta Distribution.

Der Schwartzsche Raum $\mathcal{S}$, der Raum der schnell fallenden Funktionen, ist dabei definiert als

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^2 : \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty\}$$

Eine Modellierung der Fächerstrahlgeometrie lässt sich daraus gewinnen, indem die in 2.1.1 eingeführte Koordinatentransformation vorangestellt wird.

Die Definition der Radon-Transformation lässt sich für Funktionen höherer Dimensionen wie folgt verallgemeinern:

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - x^T \theta) dx \quad (2.5)$$

wobei $\theta \in \mathcal{S}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$.

Dabei geben θ und s stets eine Hyperebene des jeweiligen Raumes $\mathbb{R}^n$ an: θ gibt den Normalenvektor der Ebene an und s entspricht dem orthogonalen Abstand vom Ursprung (in Richtung des Vektors θ). Somit gilt für die dadurch bestimmte Hyperebene $H(\theta, s)$:

$$H(\theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T \theta = s\}$$

Im zweidimensionalen Fall entspricht eine Hyperebene einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ und somit gegebenenfalls einem gemessenen Röntgenstrahl während einer CT-Aufnahme.

Die Radon-Transformation ist, wie leicht zu erkennen ist, ein linearer Operator, der so für Schwartzsche Funktionen, also sogenannte schnell fallende Funktionen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert ist. Wie zum Beispiel in [15] gezeigt wird, lässt sich dieser Operator jedoch stetig für Funktionen $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen:

$$\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathcal{S}^{n-1}, \mathbb{R})$$

Um die in der zerstörungsfreien Prüfung relevante Kegelstrahlgeometrie zu beschreiben, verwendet man die Kegelstrahltransformation, welche als Spezialfall der Röntgentransformation angesehen werden kann. Im Gegensatz zur Radon-Transformation erhält man die Transformaten hier unabhängig von der betrachteten Dimension stets durch Integration über einen Strahl, nicht über Hyperebenen des jeweiligen Raumes. Somit kann sie benutzt werden um Röntgenstrahlung in beliebig dimensionalen Räumen zu modellieren.

Definition 2.6 (Röntgentransformation)

Es sei $a \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in \mathcal{S}^{N-1}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, dann ist die Röntgentransformation von f definiert als:

$$\mathcal{P}f(a, \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(a + t\theta) dt \quad (2.6)$$

Im Fall $N = 3$ spricht man auch von der Kegelstrahltransformation $\mathcal{D}f : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Hierbei gibt a die Position der Quelle und der Einheitsvektor θ die tatsächliche Richtung des Strahls an.

So lässt sich der Vorgang der Computertomographie mit Hilfe der Radon- bzw. der Kegelstrahl-Transformation mathematisch modellieren. In der Praxis besteht die eigentliche Aufgabe der CT jedoch darin die Funktion f aus den gemessenen Intensitäten, das heißt aus den Werten von $\mathcal{R}f$, zu bestimmen. Es muss also ein Weg gefunden werden die soeben vorgestellten Transformationen zu invertieren.

2.2 Rekonstruktionsverfahren

Auf der Suche nach einer für die CT geeigneten Inversionsformel wurden im Laufe der Jahre zahlreiche, verschiedene Ansätze verfolgt und somit eine Vielzahl von Rekonstruktionsalgorithmen entwickelt. Für die Praxis bedeutsame, derartige Verfahren sind zum Beispiel das Verfahren von Cormack [5], welches die erste analytische Inversionsformel der Radon-Transformation lieferte, oder der Feldkamp-Algorithmus [6], der für die Fächerstrahl- und auch für die Kegelstrahlgeometrie geeignet ist. Diese sollen hier nicht diskutiert werden, einen umfangreichen Einblick gibt zum Beispiel Natterer [16]. Einzig die iterativen Rekonstruktionsverfahren ART (algebraic reconstruction technique) und SART (simultaneous algebraic reconstruction technique), die auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit Verwendung finden werden, werden im Folgenden vollständig vorgestellt. Eine Besonderheit dieser Verfahren besteht darin, dass sie formal keinerlei Anforderungen an den Anlagenaufbau stellen und somit universell einsetzbar sind. Lediglich die Aufnahmegeometrie, und damit der Verlauf aller gemessenen Strahlen, muss dazu bekannt sein.

2.2.1 ART

Die Idee des ART-Verfahrens (Algebraic Reconstruction Technique) besteht darin, den Messvorgang mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems zu modellieren und dieses System anschließend mit dem iterativen Kaczmarz-Verfahren [12] zu lösen. Das Verfahren wurde 1970 von Gordon et al. veröffentlicht [9]. Ein grundlegender Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass es für jeden beliebigen Anlagenaufbau geeignet ist, solange nur die zugehörige Geometrie bekannt ist.

Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Um die CT-Messung in einem linearen Gleichungssystem modellieren und dieses lösen zu können, muss das Problem zunächst diskretisiert werden. Daher wird, wie es in der Praxis auch der Fall ist, zunächst von einer begrenzten Anzahl von erstellten Projektionen, d.h. Rotationszuständen der Anlage, ausgegangen. Die einzelnen Projektionen werden mit P_α bezeichnet, wobei α dem Winkel entspricht, um den die Anlage vor Erstellung der Projektion Rotiert wurde. Jede Projektion setzt sich wiederum aus einer Vielzahl gemessener Strahlen zusammen. Die Werte bzw. die gemessenen Intensitäten dieser Strahlen werden mit p_i , $i = 1, \dots, m$ bezeichnet, m entspricht also der Zahl aller Strahlen (aus allen Projektionen) der CT-Messung. Das zu bestimmende Bild (bzw. Objekt) wird fortan mit f bezeichnet, dabei ist $f \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der alle (Pixel-/Voxel-)Werte des mehrdimensionalen Bildes enthält.

Wendet man nun das mathematische Modell der Computertomographie, d.h. die Radontransformation in diskretisierter Form, an so erhält man folgende Aussagen über die Relation von Strahlenwert und Bild:

$$p_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \cdot f_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7)$$

Dabei bezeichne ω_{ij} jeweils die Länge des Stückes des i . Strahls, das durch Pixel mit Index j verläuft. Wird ein Pixel j von einem Strahl mit Index i nicht getroffen, so gilt $\omega_{ij} = 0$. Diese Werte sind dabei charakteristisch für den jeweiligen Anlagenaufbau, Bildgröße und -dimension, sodass sie nicht zwingend in jedem Rekonstruktionsprozess erneut berechnet werden müssen. Schreibt man diese Gewichtungsfaktoren in eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so lässt sich das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form schreiben als

$$Wf = p \quad (2.8)$$

Man beachte hierbei, dass W eine dünnbesetzte Matrix ist, da jeder Strahl i im Allgemeinen nur einen kleinen Teil aller Pixel j trifft.

Lösen des linearen Gleichungssystems

Im ART-Verfahren wird das aufgestellte lineare Gleichungssystem mit Hilfe des iterativen Kaczmarz-Verfahrens gelöst. Die Anwendung eines iterativen Algorithmus ist hier notwendig, da direkte Verfahren auf das angegebene Gleichungssystem nicht sinnvoll anwendbar sind. Dies ist auf verschiedene Ursachen zurückzuführen; Zum Einen zunächst auf die sehr große Zahl von Strahlen und unbekannten Bildwerten, welche in einem enorm hohen Rechenaufwand resultiert. Hinzu kommt, dass das Gleichungssystem oft unterbestimmt ist, da (gerade im 3-D Fall) die Anzahl der unbekannten Pixel- bzw. Voxel-Werte die Zahl der Strahlen deutlich übersteigt. Weiterhin ist in der Praxis stets mit Messfehlern zu rechnen, was zur Inkonsistenz des Gleichungssystems führen kann, d.h. selbst im Falle von unterbestimmten Gleichungssystemen existiert oft keine Lösung. Somit ist es hier sinnvoll, auf ein iteratives Lösungsverfahren zurückzugreifen.

Kaczmarz Verfahren

Die Idee des Kaczmarz Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist die konsekutive orthogonale Projektion der Iterierten auf die einzelnen Gleichungen, welche als Hyperebenen des Lösungsraums, hier $\mathbb{R}^n$, interpretiert werden können. Existiert eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems, kommt es so zu einer schrittweisen Annäherung an die Lösung. Diese Vorgehensweise ist für den zweidimensionalen Fall (Lösungsraum $\mathbb{R}^2$) in Abbildung 2.4 dargestellt.

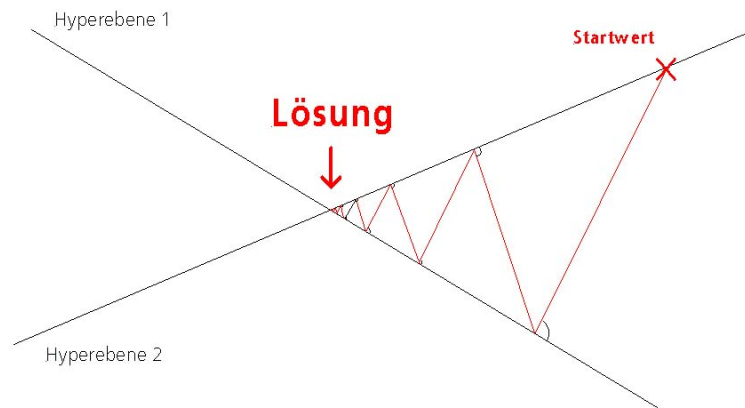


Abbildung 2.4: Kaczmarz Verfahren im $\mathbb{R}^2$

Eine eindeutige Lösung kann nur dann existieren, wenn die Anzahl der Gleichungen der Dimension des Lösungsraumes entspricht, wovon im Falle dieses Gleichungssystems nicht ausgegangen werden kann. Das Kaczmarz Verfahren ist jedoch ebenso geeignet um (Näherungs-)Lösungen für unter- und überbestimmte Gleichungssysteme zu bestimmen.

Die Anwendung des Kaczmarz-Verfahrens auf das oben aufgestellte lineare Gleichungssystem führt zur Definition des ART Algorithmus:

Definition 2.7 (ART)

Seien Pixelwerte $f_j, j = 1, \dots, n$, Strahlen $p_i, i = 1, \dots, m$ und Gewichte ω_{ij} , die das Gewicht des i -ten Strahls im j -ten Pixel angeben, gegeben.

Dann schreibt sich das ART-Verfahren für Strahl i in der k -ten Iteration:

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \lambda \frac{p_i - \sum_{l=1}^n \omega_{il} f_l^{(k)}}{\sum_{l=1}^n \omega_{il}^2} \omega_{ij}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

wobei $\lambda > 0$ Relaxationsparameter und $k \in \mathbb{R}^+$.

Natterer [15] zeigt, dass das ART Verfahren im Falle inkonsistenter Daten, welche für reale Messungen zu erwarten sind, gegen die Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\operatorname{argmin}_{f \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{p_i - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} f_j}{\sum_{j=1}^n \omega_{ij}} \right)^2 \quad (2.10)$$

konvergiert.

Die Verwendung eines Relaxationsparameters λ kann, insofern sinnvoll gewählt, die Konvergenzgeschwindigkeit positiv beeinflussen.

Der große Vorteil des ART Verfahrens liegt darin, dass es auf jede vorstellbare Geometrie, und somit insbesondere auch auf die Laminographie, anwendbar ist. Weiterhin ist der Algorithmus sogar in der Lage mit eingeschränkten Daten (z.B. unvollständige Winkel oder auch fehlende Projektionen/Strahlen) zu arbeiten, wobei hier nicht zwingend qualitativ hochwertige Ergebnisse zu erwarten sind.

Ein entscheidender Nachteil von ART ist der, insbesondere für 'große' Iterationszahlen, sehr hohe Rechenaufwand: In jeder Iteration des ART Verfahren müssen für jeden einzelnen Strahl p_i die Pixelwerte neu berechnet werden, da jeweils eine orthogonale Projektion auf die zum Strahl gehörende Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ durchgeführt wird. Da somit bereits nach wenigen Multiplikationen und einer Division stets ein Pixelwert abgeändert wird und dieser geänderte Pixelwert in allen darauffolgenden Berechnungen benötigt wird, ist das Verfahren auch kaum parallelisierbar und auf diesem Wege nicht zu beschleunigen. Dem SART-Verfahren, einer leicht abgewandelten Form von ART, gelingt es, diese Einschränkung zu umgehen.

2.2.2 SART

Beim SART-Verfahren werden alle Strahlen einer Projektion in einem Aktualisierungsschritt zusammengefasst. Diese Idee aus dem Jahre 1984 geht auf Andersen [1] zurück und kann wie folgt formuliert werden:

Definition 2.8 (SART)

Seien Pixelwerte $f_j, j = 1, \dots, n$, Strahlen $p_i, i = 1, \dots, m$ und Gewichte ω_{ij} , die das Gewicht des i -ten Strahls im j -ten Pixel angeben, gegeben. $P_\alpha, \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, seien die Projektionen, die jeweils aus einer Menge von Strahlen bestehen.

Dann schreibt sich das SART-Verfahren in der k -ten Iteration:

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \lambda \frac{\sum_{p_i \in P_\alpha} \left(\frac{p_i - \sum_{l=1}^n \omega_{il} f_l^{(k)}}{\sum_{l=1}^n \omega_{il}} \right) \omega_{ij}}{\sum_{p_i \in P_\alpha} \omega_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

wobei $\lambda > 0$ Relaxationsparameter und $k \in \mathbb{R}^+$.

In dieser abgewandelten Form wird also für jede Projektion ein kumulierter Korrekturwert, der die Informationen aller Strahlen dieser Projektion zusammenfasst, berechnet. Die Summationen, die zur Berechnung dieses Wertes durchzuführen sind, sind gut parallelisierbar, wodurch die Geschwindigkeit des Verfahrens deutlich verbessert werden kann. In der Praxis hat sich gezeigt, dass es dem SART-Algorithmus zusätzlich gelingt, die Qualität der berechneten Rekonstruktionen zu steigern.

2.3 Computerlaminographie

Bei der Computertomographie von sehr großen und insbesondere planaren Objekten kann es zu Problemen kommen. Per Definition sind planare Objekte 2-dimensionale Objekte im euklidischen, 3-dimensionalen Raum. Im Rahmen dieser Arbeit sind damit allgemeiner Körper gemeint die in einer Ebene (oder einer Richtung) eine sehr große Erstreckung haben, während ihre Größe in dazu orthogonaler Richtung sehr gering ist. In der zerstörungsfreien Prüfung auftretende planare Objekte können zum Beispiel verschiedene Platinen, Rotorblätter für Windkraftanlagen oder Trageflächen eines Flugzeugs sein.

Um eine hochauflösende 3-D Aufnahme solcher Objekte zu ermöglichen, kann man eine der CT sehr ähnliche Technik, die sogenannte Computerlaminographie (CL) anwenden. Der grundlegende Unterschied zwischen beiden Techniken ist, dass das Objekt der Laminographie zwar ebenfalls mit unterschiedlichen Winkeln, jedoch stets von der selben Seite aus durchstrahlt wird.

Man unterscheidet verschiedene Arten der Computerlaminographie:

- Limited Angle CT
- Translationslaminographie
- Rotationslaminographie

Bei der Limited Angle CT, oder auch Swing Laminographie, besteht die einzige Modifikation gegenüber der klassischen CT darin, dass keine volle Drehung des Objektes vollzogen wird; der Drehwinkel kann sogar weniger als 90° betragen. Dadurch kann bei einigen Anwendungen eine Kollision des Objektes mit der Anlage vermieden werden. Die Translationslaminographie verzichtet sogar ganz auf eine Rotation des Prüflings, im Gegenzug werden Quelle und Detektor (in gleicher oder entgegengesetzter Richtung) auf linearen parallelen Bahnen bewegt. Während diese beiden Laminographiearten, sowie die klassische planare Rotationslaminographie hier von keiner Bedeutung sind, wird im Folgenden die (für diese Arbeit relevante) 'CLARA'-Geometrie, eine spezielle Form der Rotationslaminographie, näher erläutert und mathematisch beschrieben. Einen vollständigen Überblick über die genannten Laminographie-Techniken kann in [18] eingesehen werden.

2.3.1 Anlagenaufbau: CLARA

Bei der CLARA (Computerlaminographie and Radiographie Anlage) handelt es sich um eine am Fraunhofer EZRT entwickelte Rotationslaminographieanlage für die Anwendung in der zerstörungsfreien Prüfung. Der Aufbau der Anlage wurde in Kapitel 1, Abbildung 1.2 bereits dargestellt. Zentraler Punkt dieser Anlage ist wiederum das auf einem Drehteller platzierte Objekt, das während der Messung eine Drehung von 360° um eine vertikale Drehachse vollzieht. Bedingt durch den Laminographiewinkel $\lambda \in (0^\circ, 90^\circ)$ (Winkel zwischen Rotationsachse und Hauptstrahl) befinden sich Quelle, Objekt und Detektor dabei keinesfalls in einer horizontalen Ebenen, stattdessen ist die Quelle räumlich gesehen schräg unterhalb und der Detektor auf der gegenüberliegenden Seite, oberhalb des Objektes platziert. Dadurch kann es bei flachen Prüfkörpern, selbst bei sehr großer Erstreckung in horizontaler Ebene, niemals zu einer Kollision mit Quelle oder Detektor kommen.

Abbildung 2.5 zeigt schematisch den zugehörigen Querschnitt des Anlagenaufbaus. Die hierbei rot eingezeichneten Strahlen stellen jeweils den Hauptstrahl dar, der orthogonal auf den Detektor einfällt. Der Laminographiewinkel entspricht dem Winkel zwischen diesem Hauptstrahl und der vertikalen Rotationsachse.

Zu beachten ist hierbei, dass eine beliebige Verschiebung des Detektors senkrecht zum Hauptstrahl möglich ist, sodass der sogenannte Zentralstrahl, der den Detektormittelpunkt trifft, nicht notwendigerweise mit dem Hauptstrahl zu identifizieren ist.

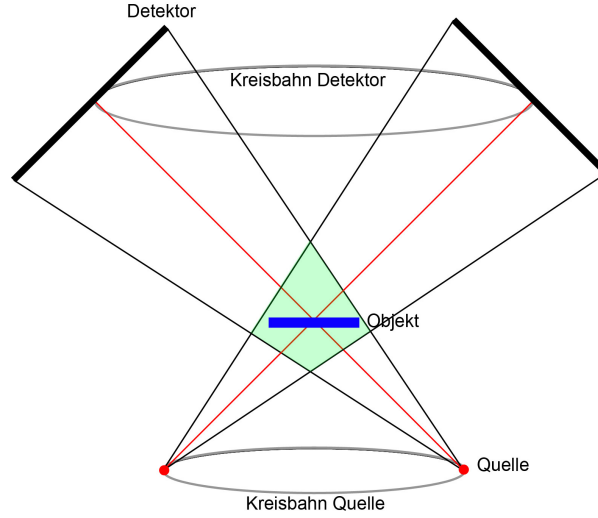


Abbildung 2.5: Rotationslaminographieanlage CLARA, Querschnitt

Ebenso wie in der CT, sind Rotationsachse und Objekt im Ursprung positioniert und der Abstand zwischen Quelle und Objekt, d_{SO} , sowie der orthogonale Abstand zwischen Quelle und Detektorebene, d_{SD} , sind fest vorgeschrieben. Ist auch hier der Rotationszustand der Anlage wieder durch einen Winkel $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$ gegeben, so lassen sich Position von Quelle Q und Detektor D wie folgt berechnen:

$$Q(\alpha) = R_\alpha^x \cdot Q_0 = R_\alpha^x \cdot R_\lambda^z \cdot \begin{pmatrix} -d_{SO} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$D(\alpha) = R_\alpha^x \cdot D_0 = R_\alpha^x \cdot R_\lambda^z \cdot \begin{pmatrix} d_{SD} - d_{SO} \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Die oben bereits angesprochene Verschiebung des Detektormittelpunktes senkrecht zum Hauptstrahl ist dabei gegeben durch t_y und t_z . Dabei bezeichnet t_z die Verschiebung in Richtung der horizontalen Detektorkante und t_y die Verschiebung in Richtung der anderen (bei hypothetischem Laminographiewinkel von 90° vertikalen) Detektorkante. Weiterhin sind R_α^x bzw. R_λ^z die Rotationsmatrizen, die eine Rotation um α um die x-Achse bzw. eine Rotation um λ um die z-Achse beschreiben, d.h.

$$R_\alpha^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$R_\lambda^z = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & 0 \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Erstere dieser beiden Rotationen beschreibt die Rotation der Anlage während der Laminographie-Messung, die zweite Rotation entspricht der durch den Laminographiewinkel $\lambda \in (0^\circ, 90^\circ)$ bedingten Kippung des Aufbaus.

Die Vektoren d_h und d_v , die die Detektorebene aufspannen und somit jeweils den Kanten der Detektorpixel entsprechen sind analog zu obigen Formeln gegeben durch

$$d^h(\alpha) = R_\alpha^x \cdot R_\lambda^z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$d^v(\alpha) = R_\alpha^x \cdot R_\lambda^z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Dabei entspricht $p \in \mathbb{R}$ der Kantenlänge der quadratischen Detektorpixel.

Somit ist die Geometrie der CLARA eindeutig definiert durch Vorgabe folgender Größen:

- Abstand Quelle - Detektor d_{SD}
- Abstand Quelle - Objekt d_{SO}
- Laminographiewinkel λ
- Detektorverschiebung (t_y, t_z)
- Kantenlänge der Detektorpixel p
- Rotationsfolge $\{\alpha_i\}_i$

2.3.2 Einschränkungen der Computerlaminographie

Im Vergleich mit der traditionellen Computertomographie, bringt die Computerlaminographie auch Nachteile mit sich. So ist bei der CL kein komplettes, quaderförmige Volumen rekonstruierbar. Um dies zu veranschaulichen kann erneut der in Abbildung 2.5 dargestellte Anlagenquerschnitt dienen. Der in der Abbildung grün hinterlegte, viereckige Bereich ist der Bereich des Querschnitts, über den vollständige Informationen vorliegen. Die horizontale Strecke zwischen den beiden seitlichen Eckpunkten stellt den Querschnitt der sogenannten Fokusebene dar. Dies ist die einzige Ebene im Objekt, die vollständig und scharf rekonstruiert werden kann. Entfernt man sich in vertikaler Richtung von dieser Fokusebene, kommt es innerhalb des Objektes zu 'pyramidenförmiger Verwischung', d.h. zunehmender Unschärfe und Unvollständigkeit. Diese Verwischung in den Durchstrahlungsrichtungen ist mit der fehlenden Tiefeninformation, d.h. Information über die Dichteverteilung innerhalb des Prüfkörpers in vertikaler Richtung, zu begründen.

Abbildung 2.6 illustriert diese, für die Laminographie typische Unschärfe. Hier sind jeweils eine frontale und eine seitliche Ansicht der CT- und der CL-Rekonstruktion einer Platine, also eines planaren Objektes, zu sehen. Dabei ist jeweils nur eine einzige, zentrale Schicht (2-D) der Volumina zu sehen. Vergleicht man die beiden links abgebildeten, frontalen Ansichten miteinander, so fällt kein allzu gravierender Qualitätsunterschied auf. In beiden Rekonstruktionen ist die Platine in der jeweils abgebildeten Schicht mitsamt Konturen und angebrachten Objekten scharf zu erkennen. Im Falle der Laminographie ist die abgebildete Schicht eine Parallele der Fokusebene, die nahe der Volumenmitte zu finden ist. Betrachtet man nun die dazu orthogonalen, rechts abgebildeten Schichten der Volumina, so muss ein anderer Schluß gezogen werden: Diese seitliche Ansicht der Platine ist lediglich in der Computertomographischen Rekonstruktion scharf dargestellt. Die abgebildete Schicht des Laminographie-Volumens hingegen weist sehr große Unschärfe und, bei genauer Betrachtung, eine pyramidenförmige Verwischung in horizontaler Richtung (d.h. senkrecht zur Fokussicht) auf. Man beachte, dass es sich bei den hier abgebildeten Volumina um Rekonstruktionen simulierter Messungen vergleichbarer Genauigkeit und Auflösung handelt, so dass keine Messfehler, die solche Qualitätsminderungen begründen oder

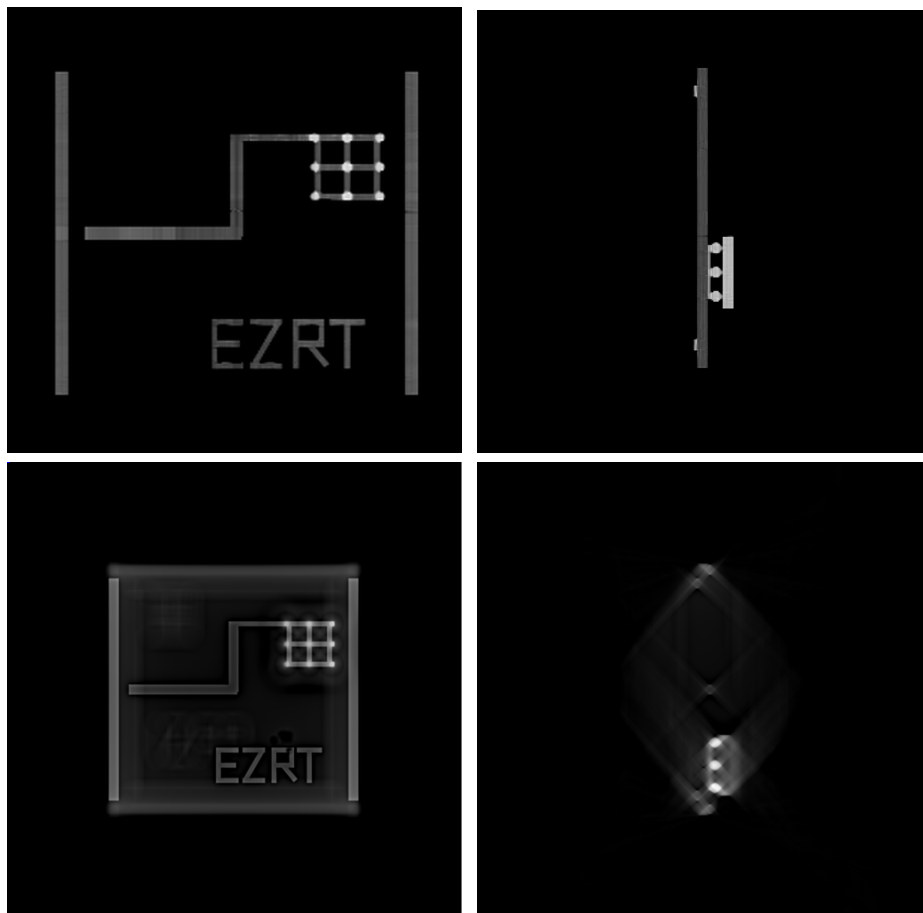


Abbildung 2.6: Rekonstruktionen simulierter Messungen einer Platine. Oben: CT, unten: Laminographie, Links: frontale Ansicht, rechts: seitliche Ansicht. ([18])

verstärken können, vorliegen. Vielmehr ist eine solche Qualitätsminderung bei CL-Rekonstruktionen in der Regel zu erwarten und kann nur durch die Nutzung zusätzlicher Information, die nicht im Rahmen der eigentlichen CL-Messung gewonnen werden kann, eingeschränkt werden.

2.4 A priori Information

Eine Möglichkeit die Qualität von CL-Rekonstruktionen erheblich zu verbessern bildet die Einbindung von gegebenem Vorwissen über das Prüfobjekt, sogenannter a priori Information. Solches Vorwissen liegt in der zerstörungsfreien Prüfung oft in Form von CAD- oder STL-Daten, die exakte Informationen über Form und Größe des Körpers enthalten, vor. Es wäre jedoch auch denkbar, a priori Information mit Hilfe anderer bildgebender Verfahren, wie z.B. durch Prüfung des Objektes mit einem Laserscanner, zu gewinnen. Durch den Einsatz solcher a priori Information kann der zu rekonstruierende Bereich des Volumens sinnvoll eingeschränkt werden, um so eine Verwischung der Information in den Durchstrahlungsrichtungen zu verhindern. Dadurch können erhebliche Qualitätssteigerungen der Rekonstruktionsvolumina erreicht werden, welche unter Anderem in [19] oder [8] veranschaulicht werden.

2.4.1 SART und a priori Information

Iterative Rekonstruktionsverfahren, wie insbesondere das SART-Verfahren eignen sich besonders gut um a priori Information, die in Form eines 3-D Volumens vorliegt, in den Rekonstruktionsprozess einzubinden. Man unterscheidet zwei Arten Vorwissen in einen solchen Algorithmus einzubinden:

1. Vorwissen als Startwert
2. Vorwissen als binäre Gewichtung

Im erstgenannten Fall muss ein vollständiges Volumen des Prüflings, das auch Informationen über die Dichteverteilung in dessen Inneren enthält, vorliegen. Dieses Volumen wird dann schlicht als Startwert, also $f_j^{(0)}$, in das oben besprochene SART Verfahren (2.11) eingesetzt. Im anschließenden Rekonstruktionsvorgang kommt es zu Abweichungen von diesem Startwert, die einerseits gewünscht ist, da Defekte oder Unregelmäßigkeiten im Inneren des Objektes detektiert werden sollen, andererseits kommt es hierbei jedoch auch zur charakteristischen Verwischung der Information über die Objektkanten hinaus und damit zur CL-typischen Unschärfe.

Im Rahmen dieser Arbeit ist die zweitgenannte Methode a priori Information zu verwenden von Bedeutung. Liegt die a priori Information in binärer Form vor, d.h. sind nur Informationen über die Umrisse des Objektes vorhanden, so liegt es nahe, dem SART Algorithmus eine binäre Gewichtung der Voxel hinzuzufügen. Dadurch kann nur in mit 1 gewichteten Voxeln, also in solchen Voxeln, in denen tatsächlich Material vorliegt, Information rekonstruiert werden. Alle anderen Voxel bleiben mit Wert 0 fixiert. Bezeichnet $g \in \mathbb{R}$ das in Vektorschreibweise geschriebene a priori Volumen, so ist das dementsprechend angepasste SART Verfahren gegeben durch

Definition 2.9 (SART mit a priori Gewichtung)

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + g_j \cdot \lambda \frac{\sum_{p_i \in P_\alpha} \left(\frac{p_i - \sum_{l=1}^n \omega_{il} f_l^{(k)}}{\sum_{l=1}^n \omega_{il}} \right) \omega_{ij}}{\sum_{p_i \in P_\alpha} \omega_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

Dabei hat das a priori Volumen g identische Dimension wie das Rekonstruktionsvolumen f . $g_j = 1$ bedeutet, dass in Pixel j Material vorliegt, $g_j = 0$ hingegen bedeutet, in Pixel j ist kein Material, sondern nur Luft, vorzufinden. Offensichtlich ist diese Methode durch einfache Binarisierung des a Volumens auch für nicht binäre a priori Daten einsetzbar.

Kapitel 3

Voruntersuchung

In diesem Kapitel soll zunächst eine vereinfachte Problemstellung betrachtet werden, um erste Erkenntnisse über die Lösbarkeit des Problems und die Umsetzbarkeit der Ergebnisse in der Praxis zu gewinnen. Dazu werden vor Erzeugung der Messdaten und des a priori Volumens drei Markerkugeln auf dem Prüfkörper angebracht, die eine schnelle Registrierung ermöglichen sollen. Anschließend wird eine Methode gezeigt, um die so gefundene Transformation sinnvoll auf die Daten anzuwenden und so eine Rekonstruktion mit korrekt positioniertem a priori Volumen zu ermöglichen.

3.1 Vereinfachte Problemstellung

In den nun folgenden ersten Untersuchungen wird von einem kompakten Testobjekt, das durchaus von einer gewöhnlichen CT-Anlage aufgenommen werden kann, ausgegangen. Auf dem zu prüfenden Körper werden zunächst drei Markerkugeln aus einem stark absorbierenden Metall angebracht. Danach wird eine CT-Aufnahme und eine CLARA-Aufnahme des modifizierten Prüflings erstellt. Da hierbei keine exakte Justierung des Objektes in den Röntgenanlagen erfolgt, ist der Körper in beiden Aufnahmen im Allgemeinen unterschiedlich orientiert. Um eine Rekonstruktion der CL-Daten unter Verwendung von Vorwissen zu ermöglichen ist also eine Registrierung der Daten erforderlich.

Durch Rekonstruktion der CT-Daten erhält man ein Volumen, das als a priori Information dienen soll. Die CL-Daten werden ebenfalls rekonstruiert. Aufgrund der noch nicht einsetzbaren a priori Daten, ist dies bisher nur mit geringer Qualität möglich. Mit Hilfe eines Visualisierungstools für 3-D-Bilddaten (hier: VolumePlayerPlus 6.4.1) werden nun die Positionen der drei Markerkugeln in den rekonstruierten Volumina, d.h. die zu den Kugelmittelpunkten gehörenden Voxelkoordinaten, ermittelt. Die gefundenen Kugelpositionen werden einander zugeordnet, so dass drei Paare von Koordinaten, die bei der Registrierung aufeinander abgebildet werden müssen, vorhanden sind. Durch diese drei Koordinatenpaare ist die zugehörige homogene Transformation bereits eindeutig bestimmt und kann analytisch bestimmt werden.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die beiden Volumina (CT- und CL-Rekonstruktion) identische Dimensionen, d.h. die gleiche Anzahl an Voxeln haben. Weiterhin werden stets kubische Voxel angenommen.

3.1.1 Mathematische Grundlage

Das zu lösende Problem ist hier also die Bestimmung einer affinen Transformation, die drei Punkte im Raum $p_j^{(1)} \in \mathbb{R}^3, j = 1, 2, 3$ auf drei andere vorgegebene Punkte $p_j^{(2)} \in \mathbb{R}^3, j = 1, 2, 3$ abbildet. Eine solche Transformation existiert genau dann, wenn die beiden durch die gegebenen Punkte auf-

gespannten Dreiecke identische Innenwinkel (d.h. identische Relation der Kantenlängen) haben. Für die homogene Matrix einer solchen Transformation $H \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ gilt dann

$$H \cdot \tilde{p}_j^{(1)} = \tilde{p}_j^{(2)} \quad (3.1)$$

Dabei stellt $\tilde{p}_j^{(i)} \in \mathbb{R}^4$ jeweils den zu $p_j^{(i)}$ gehörenden Vektor in homogenen Koordinaten dar, es gilt also

$$\tilde{p}_j^{(i)} = \begin{pmatrix} p_j^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Lässt man Mess- und Diskretisierungsfehler außer Acht, so sind in der hier vorliegenden Problemstellung die Dreiecke, ebenso wie die beiden rekonstruierten Volumina, affin zueinander.

3.2 Transformationsbestimmung

In diesem Abschnitt wird erläutert wie die Transformation mit Hilfe der Markerkugeln bestimmt wird. Dazu seien die Positionen der Kugeln in Voxelkoordinaten gegeben durch

$$q_j^{(i)} = \begin{pmatrix} (q_j^{(i)})_1 \\ (q_j^{(i)})_2 \\ (q_j^{(i)})_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Für festes $j = 1, 2, 3$ bezeichne dabei $q_j^{(1)}$ die Positionen einer Kugel in der Laminographie-Rekonstruktion und $q_j^{(2)}$ die Position selbiger Kugel im CT (a priori) Volumen. Diese Voxelkoordinaten werden wie folgt in Raumkoordinaten umgerechnet

$$p_j^{(i)} = s^{(i)} \left(q_j^{(i)} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n \\ n \\ n \end{pmatrix} \right) =: \begin{pmatrix} x_j^{(i)} \\ y_j^{(i)} \\ z_j^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

Dabei bestehen beide Volumina aus $n \times n \times n$ Voxeln und $s^{(i)}$ seien die Voxelgrößen der jeweiligen Volumina. Es wird also wie in der gesamten Arbeit angenommen, dass die zentralen Voxel der Volumina im Ursprung positioniert sind.

Gesucht ist eine affine Transformation, d.h. eine homogene Transformationsmatrix $H \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, so dass

$$H \cdot \begin{pmatrix} x_j^{(1)} \\ y_j^{(1)} \\ z_j^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j^{(2)} \\ y_j^{(2)} \\ z_j^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Bei der Bestimmung der Transformation wird Schritt für Schritt vorgegangen. So wird zuerst die Skalierung bestimmt, anschließend die Rotation und zuletzt die Translation.

3.2.1 Skalierung

Die Berechnung eines Skalierungsfaktors ist nicht erforderlich, wenn die Daten auf oben beschriebene Art und Weise gewonnen wurden, da es sich dann in a priori Volumen und CL Daten um ein identisches Objekt handelt. Aus Vollständigkeitsgründen soll dennoch beschrieben werden, wie ein Skalierungsfaktor für markierte Volumina berechnet werden kann. Es werden zunächst die Kantenlängen der Dreiecke, die durch die drei Kugeln einer Aufnahme gebildet werden, bestimmt. Dazu müssen die Abstände zwischen den Kugeln berechnet werden:

$$d_{k,j}^{(i)} = \|p_j^{(i)} - p_k^{(i)}\|_2, \quad i = 1, 2, \quad j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad k < j \quad (3.6)$$

Daraus lässt sich der Skalierungsfaktor f_s wie folgt berechnen:

$$f_s = \frac{1}{3} \sum_{j=2}^3 \sum_{k=1}^j \frac{d_{k,j}^{(2)}}{d_{k,j}^{(1)}} \quad (3.7)$$

Die zugehörige homogene Skalierungs-Matrix lautet:

$$H_{\text{skal}} = \begin{pmatrix} f_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.2 Rotation

Die Rotationsberechnung erfordert etwas mehr Rechenarbeit und erfolgt hier in zwei Schritten.

1. Rotation Zunächst wird eine Rotation, die die Dreiecke in parallele Ebenen rotiert, bestimmt. Hierzu wird jeweils der Normalenvektor der Ebene, die alle drei Kugelmittelpunkte enthält, berechnet:

$$n^{(i)} = \frac{(p_2^{(i)} - p_1^{(i)}) \times (p_3^{(i)} - p_1^{(i)})}{\|(p_2^{(i)} - p_1^{(i)}) \times (p_3^{(i)} - p_1^{(i)})\|_2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

Sind diese beiden Vektoren kollinear, so sind die durch die drei Punkte aufgespannten Ebenen bereits parallel zueinander und der Schritt kann übersprungen werden. Andernfalls ist, um $n^{(1)}$ auf $n^{(2)}$ abzubilden, eine Rotation um eine (normierte) Achse $r = \frac{n^{(1)} \times n^{(2)}}{|n^{(1)} \times n^{(2)}|}$, die auf beiden Normalenvektoren senkrecht steht, erforderlich. Ein solcher Vektor r existiert stets, wenn $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$ nicht kollinear sind. Eine Rotation um einen Winkel α um diese Achse lässt sich beschreiben durch die Rotationsmatrix

$$R_{r,\alpha} = \begin{pmatrix} r_1^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & r_1 r_2(1 - \cos \alpha) - r_3 \sin \alpha & r_1 r_3(1 - \cos \alpha) + r_2 \sin \alpha \\ r_1 r_2(1 - \cos \alpha) + r_3 \sin \alpha & r_2^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & r_2 r_3(1 - \cos \alpha) - r_1 \sin \alpha \\ r_1 r_3(1 - \cos \alpha) - r_2 \sin \alpha & r_2 r_3(1 - \cos \alpha) + r_1 \sin \alpha & r_3^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Der Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ muss also so bestimmt werden, dass gilt

$$R_{r,\alpha} n^{(1)} = n^{(2)} \quad (3.11)$$

Da r orthogonal zu $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$ ist, gilt

$$r \cdot n^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.12)$$

Damit lässt sich (3.11) schreiben als

$$n_1^{(1)} \cos \alpha + \sin \alpha (r_2 n_3^{(1)} - r_3 n_2^{(1)}) = n_1^{(2)} \quad (3.13)$$

$$n_2^{(1)} \cos \alpha + \sin \alpha (r_3 n_1^{(1)} - r_1 n_3^{(1)}) = n_2^{(2)} \quad (3.14)$$

$$n_3^{(1)} \cos \alpha + \sin \alpha (r_1 n_2^{(1)} - r_2 n_1^{(1)}) = n_3^{(2)} \quad (3.15)$$

Gilt $r_2 n_3^{(1)} - r_3 n_2^{(1)} \neq 0$, so ergibt eine einfache Umformung von Gleichung (3.13)

$$\sin \alpha = \frac{n_1^{(2)} - n_1^{(1)} \cos \alpha}{r_2 n_3^{(1)} - r_3 n_2^{(1)}} \quad (3.16)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.14) erhält man somit

$$\cos \alpha = \frac{n_2^{(2)}(r_2 n_3^{(1)} - r_3 n_2^{(1)}) - n_1^{(2)}(r_3 n_1^{(1)} - r_1 n_3^{(1)})}{n_2^{(1)}(r_2 n_3^{(1)} - r_3 n_2^{(1)}) - n_1^{(1)}(r_3 n_1^{(1)} - r_1 n_3^{(1)})} \quad (3.17)$$

Sollte einer der beiden Nenner in Gleichung (3.16) oder (3.17) verschwinden, so kann vollkommen analog eine der anderen beiden Gleichungen (d.h. (3.14) oder (3.15)) nach $\sin \alpha$ aufgelöst und erneut in Gleichungssystem (3.11) eingesetzt werden. (Man beachte, dass ein derartiger Rechenweg für $n^{(1)} \cdot n^{(2)} \neq 0$ stets möglich ist, da $r \times n^{(i)} \neq 0$ und $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$ nicht kollinear sind und somit eine Wahl von Gleichungen möglich ist, sodass keiner der Nenner verschwindet.)

Einzig im Falle $n^{(1)} \perp n^{(2)}$ ist eine solche Vorgehensweise nicht möglich, da die Terme in Form des Nenners in Gleichung (3.17) alle verschwinden. Dann gilt jedoch $\cos \alpha = 0$ und der Rotationswinkel $\alpha \in \{90^\circ, 270^\circ\}$ ist durch Gleichung (3.16) eindeutig bestimmt.

Somit kann $\cos \alpha$ stets aus den Vektoren $n^{(1)}, n^{(2)}, r$ berechnet werden, bei der Berechnung von α ist lediglich zu beachten, dass aufgrund der Identität $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, noch immer zwei Rotationswinkel in Frage kommen. Einer der beiden Fälle kann jedoch durch erneutes einsetzen in eine der Gleichungen des linearen Systems (3.11) ausgeschlossen werden.

Die zu dieser ersten Rotation gehörende homogene Transformationsmatrix $H_{r,\alpha} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ erhält man durch Erweiterung der Rotationsmatrix $R_{r,\alpha}$ zu

$$H_{r,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & R_{r,\alpha} & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.18)$$

2. Rotation Nachdem die beiden zu registrierenden Dreiecke sich durch die soeben berechnete, erste Rotation bereits in parallelen Ebenen befinden, soll eine zweite Rotation die Ausrichtung der Dreiecke innerhalb der Ebenen angleichen. Dazu ist eine Rotation um den Normalenvektor der Ebene, $n^{(2)}$, erforderlich. Der Winkel β , um den um diese Achse rotiert werden muss ist so zu wählen, dass die zugehörige Rotationsmatrix die Verbindungsvektoren der Eckpunkte der Dreiecke aufeinander abbildet. Analog zu obiger Vorgehensweise kann der Rotationswinkel also durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden. In diesem Fall ist dieses Gleichungssystem gegeben durch

$$R_{n^{(2)},\beta} \left(R_{r,\alpha} \cdot f_s \cdot (p_k^{(1)} - p_j^{(1)}) \right) = p_k^{(2)} - p_j^{(2)}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j < k \quad (3.19)$$

Die spezielle Wahl der Kante des Dreiecks (d.h. die Wahl der Indizes j, k) spielt hierbei keine Rolle.

Ist das Gleichungssystem gelöst und der Rotationswinkel β bestimmt, so kann die Gesamtrotation aus den beiden Einzelrotationen berechnet werden:

$$R = R_{n^{(2)},\beta} \cdot R_{r,\alpha} \quad (3.20)$$

Die zugehörige homogene Matrix, die sich durch Erweiterung analog zu (3.18) ergibt, wird im Folgenden mit H_{rot} bezeichnet.

3.2.3 Translation

Da Skalierungs- und Rotationsberechnung bereits erfolgt sind, bleibt lediglich der Translationsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen. Dieser entspricht gerade der Differenz der Kugelkoordinaten im Raum nach Anwendung der bereits berechneten Transformationsteilen. Es gilt also:

$$v = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \left(p_j^{(2)} - (R \cdot f_s \cdot p_j^{(1)}) \right) \quad (3.21)$$

In der Theorie ist auch hier die Wahl des Eckpunktes, der zur Translationsberechnung herangezogen wird, unerheblich. Da die Differenzen der Eckpunkte aufgrund unumgänglicher Fehler in der Praxis jedoch voneinander Abweichen können, ist eine Durchschnittsbildung hier sinnvoll.

Die zugehörige homogene Translationsmatrix lautet

$$H_{\text{trans}} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.22)$$

3.2.4 Gesamte Transformation

Um die beiden Dreiecke, die durch die Markerkugeln definiert sind, zur Übereinstimmung zu bringen, müssen die berechneten Komponenten der Transformation in angegebener Reihenfolge ausgeführt werden. Die homogene Transformationsmatrix, die die Gesamt-Transformation beschreibt berechnet sich als

$$H = H_{\text{trans}} \cdot H_{n^{(2)},\beta} \cdot H_{r,\alpha} \cdot H_{\text{skal}} \quad (3.23)$$

Es gilt also

$$H \cdot p_j^{(1)} = p_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

3.3 Anwendung der Transformation

Nachdem die Transformation, die eine Registrierung der laminographischen Messdaten mit einem a priori Volumen bewirkt, berechnet wurde, stellt sich die Frage, wie diese sinnvoll auf die vorliegenden Daten angewendet werden kann. Eine Möglichkeit besteht darin, entsprechende Transformationen auf das a priori Volumen anzuwenden und dieses somit in die richtige Position zu bringen. Dies könnte zum Beispiel mit dem Visualisierungstool VolumePlayerPlus, das auch zur Bestimmung der Koordinaten der Markerkugeln verwendet wurde, geschehen. Wie bei diskretisierten Daten jedoch üblich, macht eine derartige Vorgehensweise eine erneute Interpolation des Volumens erforderlich und bewirkt somit einen Genauigkeitsverlust. Darüber hinaus bedeutet dies einen zusätzlichen Verarbeitungsschritt und damit nicht nur einen Mehraufwand, sondern auch eine weitere Fehlerquelle.

Im Folgenden soll eine Idee zur Einbindung der Transformation in den Rekonstruktionsvorgang vorgestellt werden. Dazu wird zunächst die zur CLARA-Messung gehörige Geometriedatei näher erläutert.

3.3.1 Die Geometriedatei

Zu jeder durchgeführten CLARA-Messung gehört neben den gemessenen Projektionen auch eine sogenannte Geometriedatei, die vollständige Informationen über die Anlagengeometrie enthält. Die Geometrie wird hierbei beschrieben durch die Positionen von Quelle und Detektor und die Ausrichtung und Größe des Detektors bei Erstellung der einzelnen Projektionen. Somit enthält diese Textdatei zu jeder erstellten Projektion (bzw. zu jedem Rotationszustand der Anlage) vier Vektoren:

- Position der Quelle im Raum
- Position des Detektors im Raum
- Kante eines horizontalen Detektorpixels
- Kante eines vertikalen Detektorpixels

Dabei sind die Detektorpixel stets quadratisch, so dass die Längen des dritten und vierten Vektors identisch sind.

Die Anzahl solcher Datensätze in der Geometriedatei entspricht offensichtlich der Anzahl der Projektionen. Um die eindeutige Zuordnung von Projektionen und Anlagenaufbau nachvollziehen zu können, sind die Projektion entsprechend der Einträge der Geometriedatei nummeriert.

Aus diesen Geometriedaten können eindeutige Rückschlüsse auf die Größen, mit deren Hilfe der Anlagenaufbau in Abschnitt 2.3.1 eindeutig festgelegt wurde, gezogen werden. Die Abstände zwischen Quelle und Objekt bzw. Detektor, sowie die Kantenlänge der Detektorpixel können sogar aus einem einzigen Datensatz bestimmt werden. Konsistenz der Geometriedatei ist somit unbedingt erforderlich und wird im Folgenden angenommen.

Für eine Rekonstruktion mit Hilfe des SART-Algorithmus ist die Geometriedatei sehr hilfreich, da sie eine einfache Berechnung der Strahlen zwischen Quelle und Detektor ermöglicht.

3.3.2 Anwendung der Skalierung

Die Skalierung wird, insofern notwendig, nicht auf die gemessenen CLARA-Daten angewendet, da dies die tatsächliche Größe des Prüflings in der Rekonstruktion verfälschen würde. Stattdessen wird diese Transformation in die a priori Daten eingebracht, indem die Voxelgröße des a priori Volumens entsprechend angepasst, d.h. durch den Skalierungsfaktor f_s dividiert wird. Man beachte hierbei, dass dieses Vorgehen weder zusätzliche Fehlerquellen noch nennbaren Rechenaufwand mit sich bringt, da die Voxelwerte selbst in keiner Weise angepasst werden müssen. Lediglich der im sogenannten Header des a priori Volumens enthaltene Eintrag, der die Voxelgröße festlegt, ist entsprechend anzupassen.

3.3.3 Anwendung von Rotation und Translation

Rotation und Translation sollen mit Hilfe der Geometriedaten umgesetzt werden. Dazu muss zunächst bemerkt werden, dass die Orientierung des zu rekonstruierenden Körpers im Volumen bestimmt ist durch die Kombination aus Projektionsbildern und Geometriedaten. Die Geometriedaten zu einer Projektion geben jeweils an, aus welcher Richtung das Objekt betrachtet wurde, um eine derartige Aufnahme zu erhalten. Ändert man nun die Geometriedaten, während die gemessenen Projektionen identisch bleiben so bewirkt dies eine entsprechend veränderte Orientierung des Objektes im Rekonstruktionsvolumen. Eine Rotation von Quelle und Detektor um den Ursprung bewirkt dabei eine entsprechende Rotation des Objektes. Um eine Translation des Objektes zu erhalten müssen Quelle und Detektor identisch verschoben werden, die Orientierung des Detektors bleibt dabei unverändert.

Seien die Geometriedaten zu einer Messung mit m Projektionen nun gegeben durch

$$\{q_i\}_{i=1,\dots,m}, \quad \{d_i\}_{i=1,\dots,m}, \quad \{d_i^h\}_{i=1,\dots,m}, \quad \{d_i^v\}_{i=1,\dots,m} \quad (3.25)$$

Hierbei gibt q_i jeweils die Position der Quelle und d_i die Position des Detektormittelpunktes an. Die Vektoren d_i^h und d_i^v sind die Vektoren, die den Detektor aufspannen und deren Länge gerade der Kantenlänge eines Detektorpixels entspricht. Dann wird eine Rotation des rekonstruierbaren Objektes entsprechend einer Rotationsmatrix $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ erreicht durch Multiplikation eben dieser Matrix mit den Geometriedaten

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= R \cdot q_i \\ \tilde{d}_i &= R \cdot d_i \\ \tilde{d}_i^h &= R \cdot d_i^h \\ \tilde{d}_i^v &= R \cdot d_i^v \end{aligned}$$

Eine Translation der CL-Daten um einen Vektor $t \in \mathbb{R}^3$ wird erreicht durch folgende Anpassungen:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i + t \\ \tilde{d}_i &= d_i + t \\ \tilde{d}_i^h &= d_i^h \\ \tilde{d}_i^v &= d_i^v \end{aligned}$$

In diesem speziellen Anwendungsfall muss also zunächst die oben berechnete Rotation mit Rotationsmatrix R (siehe Gleichung (3.20)) auf alle Einträge der Geometriedatei angewendet werden. Anschließend wird der in Gleichung (3.21) berechnete Translationsvektor v zu den Quell- und Detektorpositionen entsprechenden Einträgen addiert.

3.4 Beispiel Skischuhschnalle

Die beschriebene Vorgehensweise soll nun anhand eines Beispiels gezeigt werden. Der Prüfkörper ist hierbei eine Skischuh-Schnalle aus einer Magnesium-Legierung. Abbildung 3.1 zeigt die Rekonstruktion der CT-Aufnahme dieser Schnalle, das aus den CLARA-Aufnahmen erzeugte Volumen ist in Abbildung 3.2 zu sehen. Bei der Laminographiemessung betrug der Abstand zwischen Quelle und Detektor 202cm, der Abstand zwischen Quelle und Objekt (Ursprung) 54.5cm. Der Laminographiewinkel, also der Winkel zwischen Rotationsachse und Hauptstrahl betrug 30° .



Abbildung 3.1: SART-Rekonstruktion der Skischuhschnalle aus der CT-Aufnahme, links: frontale Ansicht, mitte: seitliche Ansicht, rechts: Ansicht von oben. 512^3 Voxel, Voxelkantenlänge $213.79\mu\text{m}$.

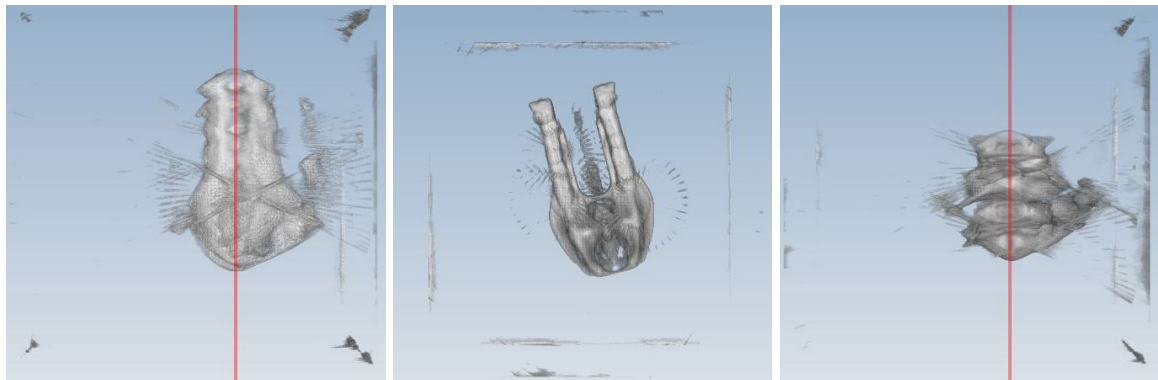


Abbildung 3.2: SART-Rekonstruktion der Skischuhschnalle aus der CLARA-Aufnahme, links: frontale Ansicht, mitte: seitliche Ansicht, rechts: Ansicht von oben. Die rote Gerade skizziert die laminographische Fokusschicht. 512^3 Voxel, Voxelkantenlänge $213.79\mu\text{m}$.

Hier springt der enorme Qualitätsunterschied der Rekonstruktionen sofort ins Auge. Während die Konturen des Objektes in der CT-Rekonstruktion deutlich zu erkennen sind, fällt dies im CLARA-Volumen deutlich schwerer. Bei genauerer Betrachtung der Laminographie-Aufnahme ist hier die bereits in Abschnitt 2.3.1 erwähnte Fokusschicht zu erkennen. Im linken und rechten Bild fällt diese jeweils mit einer vertikalen Geraden durch das Objekt überein, die als rote Linie eingezeichnet ist. Hier wirkt das Bild in senkrechter Richtung zu dieser Fokusschicht sehr stark pyramidenförmig verwischt, d.h. die Unschärfe nimmt zu, umso größer die Entfernung zur Fokusschicht wird. Im mittleren Bild,

der seitlichen Ansicht, ist die Fokusschicht orthogonal zur Betrachtungsrichtung. Aus eben diesem Grund sind aus dieser Richtung die Konturen des Objektes weniger verschwommen, denn in Richtung der Fokusschicht kommt es nicht zu zusätzlicher Unschärfe und Artefakten.

3.4.1 Transformationsberechnung

Betrachtet man beide Volumina Schicht für Schicht so ist es möglich die in die in den obigen Abbildungen nur schwer zu erkennenden Kugeln ausfindig zu machen und deren Voxelkoordinaten zu ermitteln. Dies kann zum Beispiel mit Hilfe des VolumePlayerPlus geschehen. Die Koordinaten der Kugeln im Fall der Skischuhschnalle lauten:

#	CT			CL		
1	217	193	218	349	192	283
2	241	193	279	342	257	285
3	261	308	279	343	268	169

Tabelle 3.1: Positionen der Kugeln in den Rekonstruktionen der Skischuhschnalle (in Voxel)

Die Kantenlänge eines Voxels beträgt in beiden Volumina jeweils $213.79\mu\text{m}$. Es gilt also für die Raumkoordinaten der Kugeln (in μm):

$$p_1^{(1)} = 213.79 \cdot \begin{pmatrix} 349 \\ 192 \\ 283 \end{pmatrix}, \quad p_2^{(1)} = 213.79 \cdot \begin{pmatrix} 342 \\ 257 \\ 285 \end{pmatrix}, \quad p_3^{(1)} = 213.79 \cdot \begin{pmatrix} 343 \\ 268 \\ 169 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$p_1^{(2)} = 213.79 \cdot \begin{pmatrix} 217 \\ 193 \\ 218 \end{pmatrix}, \quad p_2^{(2)} = 213.79 \cdot \begin{pmatrix} 241 \\ 193 \\ 279 \end{pmatrix}, \quad p_3^{(2)} = 213.79 \cdot \begin{pmatrix} 261 \\ 308 \\ 279 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Skalierung In diesem Fall muss kein Skalierungsfaktor bestimmt werden, die Objektgrößen stimmen bereits überein, da es sich um zwei Aufnahmen desselben Körpers handelt. Rechnet man nach, so sollte der Skalierungsfaktor f also 1.0 betragen. Tatsächlich erhält man hier $f = 1,002$. Dies entspricht einer Abweichung von 0,2%, die auf unvermeidbare Mess- und Diskretisierungsfehler zurückzuführen ist.

Rotation Die Rotation soll nach obiger Vorgehensweise bestimmt werden. Dazu werden zunächst die Normalenvektoren berechnet:

$$n^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.9941 \\ -0.1065 \\ -0.0187 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$n^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.9186 \\ 0.1598 \\ 0.3614 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Die Achse der ersten Rotation lautet damit

$$r = \begin{pmatrix} -0.07769 \\ 0.8238 \\ -0.5616 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Durch Einsetzen in Formel (3.17) erhält man

$$\cos(\alpha) = 0.88947 \quad (3.31)$$

und damit

$$\alpha = 27.193 \quad (3.32)$$

Diese Lösung kann durch erneutes einsetzen in das Gleichungssystem (3.11) bzw. in (3.13), (3.14), (3.15) überprüft werden. Damit ist die erste zu vollführende Rotation eine Drehung um r um 27.193° .

Es bleibt die Rotation innerhalb der Kugelebene zu bestimmen. Die zugehörige Rotationsachse ist der Vektor $n^{(2)}$. Durch Lösen des Gleichungssystems (3.19) erhält man den gesuchten Rotationswinkel $\beta = 87.526^\circ$.

Fasst man die beiden Rotationen in einem Rotationsschritt zusammen, so erhält man die Rotationsachse

$$\begin{pmatrix} 0.9371 \\ 0.1697 \\ -0.3051 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

und Rotationswinkel 90.8298° .

Translation Um die Translation zu bestimmen sind nun lediglich die Positionen der Skalierten und Rotierten Kugeln des CL-Volumens mit den Kugelpositionen im CT-Volumen zu vergleichen. Man erhält für den gesuchten Translationsvektor in μm :

$$t = \begin{pmatrix} -18667.18 \\ -4671.54 \\ 12675.75 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

3.4.2 Registrierungsergebnisse

Fehlermaß Wendet man die gefundene Transformation auf die Kugelpositionen des CL-Volumens an, so erhält man durch $\tilde{q}_j^{(2)} = \frac{1}{s^{(2)}} \left(H \cdot p_j^{(1)} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n \\ n \\ n \end{pmatrix} \right)$ die Kugelpositionen in Voxelkoordinaten nach der Transformation. Hier ergibt sich

$$\tilde{q}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 217.0 \\ 193.0 \\ 218.0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 240.9 \\ 192.9 \\ 278.9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 260.9 \\ 308.0 \\ 278.9 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Ein Fehlermaß lässt sich berechnen als

$$\sqrt{\sum_{j=1}^3 \|H \cdot p_j^{(1)} - p_j^{(2)}\|_2^2} = 213.79 \mu\text{m} \cdot \sqrt{0 + 0.03 + 0.02} = 47.89 \mu\text{m} \quad (3.36)$$

Diese Abweichung ist durch unumgängliche Mess- und Diskretisierungsfehler bedingt und entspricht etwa dem 0.22-fachen der Kantenlänge eines Voxels.

Rekonstruktion Die gefundene Transformation wird nun entsprechend der in Abschnitt 3.3 vorgestellten Vorgehensweise auf die Daten angewendet. Translation und Rotation werden also nicht auf die Volumina, sondern auf die zur CL-Messung gehörige Geometriedatei angewendet.

Das Volumen, das unter Verwendung der registrierten und binarisierten a priori Daten aus den CL-Daten rekonstruiert werden kann, ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

Im visuellen Vergleich fallen verschiedene Gegebenheiten auf. Zunächst ist das Objekt nun deutlich schärfer abgebildet als in der ursprünglichen CL-Rekonstruktion in Abbildung 3.2, die zu Beginn

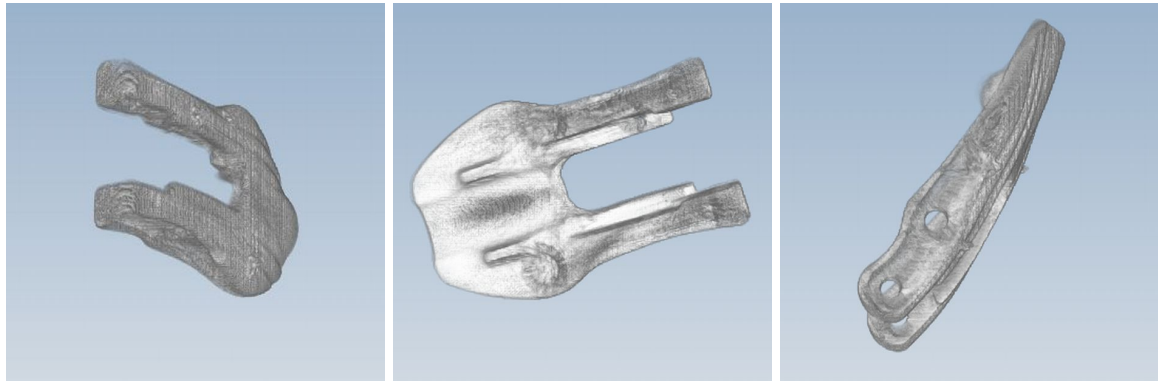


Abbildung 3.3: SART-Rekonstruktion der Skischuhschnalle aus der CL-Aufnahme unter Verwendung der registrierten a priori Daten, links: frontale Ansicht, mitte: seitliche Ansicht, rechts: Ansicht von oben. $512 \times 512 \times 512$ Voxel, Voxelkantenlänge $213.79\mu m$.

des Abschnittes diskutiert wurde. Die für die Laminographie typischen Verwischungen und Artefakte treten nicht mehr auf. Wie zu erwarten kann durch die Verwendung von a priori Information eine Qualitätssteigerung erzielt werden. Diese wird auch deutlich, wenn man die Grauwertprofile korrespondierender Strecken durch die Rekonstruktionen miteinander vergleicht, was hier jedoch nicht weiter ausgeführt wird. Vergleichbare Untersuchungen, die den Nutzen der Verwendung von a priori Information für die Computerlaminographie belegen, sind unter Anderem in [19] illustriert.

Weiterhin ist bei genauerer Betrachtung zu erkennen, dass die Orientierung des Objektes in der transformierten CL-Rekonstruktion mit der Orientierung des Objektes in den a priori Daten (CT-Rekonstruktion) übereinstimmt. Das wird auch durch visuelle Untersuchung und Ermittlung der Kugelpositionen mit Hilfe des VolumePlayers belegt.

3.5 Auswertung

Es sollen nun die Feststellungen und Erkenntnisse dieses Kapitels zusammengefasst werden.

3.5.1 Ergebnisse

Als Ergebnis des Abschnittes ist in erster Linie zu erwähnen, dass es gelungen ist, die affine Transformation, die die Ausrichtung, gegebenenfalls die Größe und auch die Position zwei baugleicher Objekte zur Übereinstimmung bringt, zu finden. Obwohl dies hier mit Hilfe dreier Markerkugeln erfolgte, die im Allgemeinen nicht als gegeben vorausgesetzt werden können, liefert dies eine weitere Grundlage für die anschließenden Untersuchungen. So können die Ergebnisse dieser 3-Punkt-Registrierung zum Beispiel als Vergleichswert für die späteren Registrierungsergebnisse genutzt werden. (Siehe Abschnitt 5.1)

Weiterhin wurde in diesem Kapitel gezeigt, dass die gefundene Rotation und Translation, durch Anwendung auf die Geometriedaten, praxistauglich umgesetzt werden können, wodurch eine erneute Interpolation des a priori Volumens umgangen werden kann.

3.5.2 Einschränkungen

Trotz eben genannter Erfolge ist die vorgestellte Herangehensweise in keiner Form praktikabel und somit nicht als Lösung des eigentlichen Problems zu betrachten. So ist die Anbringung von Markerkugeln auf dem Objekt in der Praxis nicht nur zu umständlich, sondern oft auch nicht durchführbar. Werden die a priori Informationen zum Beispiel nicht aus einem weiteren bildgebenden Verfahren (Röntgenstrahlung, Laserscanner etc.) gewonnen, sondern liegen bereits in digitaler Form vor, so müssten diese Daten nachträglich mit Markierungen an identischen Positionen versehen werden. Dies beinhaltet ein weiteres, oftmals nicht triviales Registrierungsproblem und stellt eine zusätzliche Fehlerquelle dar. Somit ist die Registrierung anhand der Kugelpositionen keine praxistaugliche Vorgehensweise und daher nicht weiter zu verfolgen. Im anschließenden Kapitel wird daher ein Algorithmus vorgestellt, der ohne derartige Vorverarbeitung der Daten auskommt.

Kapitel 4

Algorithmus

In diesem Kapitel soll eine anwendungstaugliche Vorgehensweise zur Registrierung von a priori Volumina vorgestellt werden. Die Transformationsbestimmung ist auch hier in die drei Teile Rotation, Skalierung und Translation unterteilt. Zunächst wird jedoch die Problemstellung noch einmal klar abgegrenzt.

Der vorgestellte Algorithmus soll im Laufe des Kapitels anhand eines Beispiels erläutert und vorgeführt werden. In diesem Beispiel dient eine Platine, also ein planares Objekt, als Testkörper.

4.1 Problemstellung

4.1.1 Allgemeine Formulierung

Die gegebenen Daten, anhand derer eine Registrierung erfolgen soll sind

- A priori Volumen, 3-D
- CLARA-Messdaten, bestehend aus:
 - Projektionen, 2-D
 - Geometriedatei

Die Berechnung der Transformation soll dabei erfolgen ohne eine Rekonstruktion der Laminographie-Daten vorzunehmen und zunächst ohne zusätzliche Eingabe oder Interaktion des Anwenders (abgesehen von initialer Parameterwahl). Weiterhin werden lediglich drei der CLARA-Projektionen, welche im Folgenden auch als 'Referenzprojektionen' bezeichnet werden, in den Berechnungen genutzt. Die Distanz zwischen den Durchstrahlungsrichtungen dieser Projektionen wird möglichst groß gewählt um möglichst viel Information zu erhalten, d.h. man wählt die Projektionen so, dass die Abstände zwischen den zugehörigen Rotationswinkeln der Anlage etwa 120° betragen. Hierbei genügen drei Projektionen, da in den einzelnen Schritten (Rotations-, Translations- und Skalierungsberechnung) jeweils nur bis zu drei unbekannte Größen zu bestimmen sind.

4.1.2 Beispiel: Platine

Anhand des Beispiels einer Platine werden nun die gegebenen Daten veranschaulicht. Abbildung 4.1 zeigt die frontale und seitliche Ansicht auf die 3-D Rekonstruktion der CT-Aufnahme der Platine. Diese hinreichend scharfe und detailgetreue Rekonstruktion wird in diesem Beispiel als a priori Volumen verwendet. Bei praxisrelevanten Registrierungsproblemen ist es im Allgemeinen nicht möglich eine

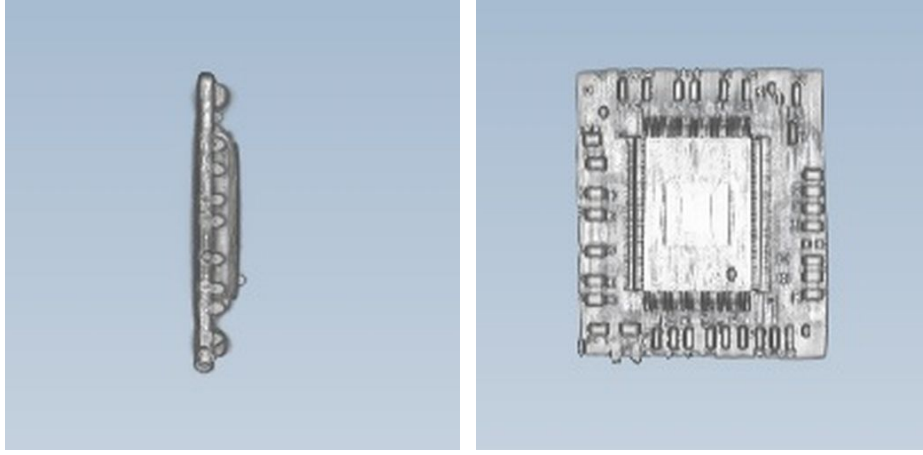


Abbildung 4.1: Als a priori Volumen verwandte CT-Rekonstruktion der Platine, links: frontale Ansicht, rechts: seitliche Ansicht. Dimension: $512 \times 512 \times 512$, Voxelgröße: $225.74\mu\text{m} \times 225.74\mu\text{m} \times 225.74\mu\text{m}$.

```

215.645759 44.387776 107.485355 -1300.606907 -260.620724 -645.076361 0.094337 -0.066062 -0.163513 0.000000 -0.185437 0.074920
215.645759 46.070607 106.774882 -1300.606907 -270.720991 -640.903127 0.094337 -0.068622 -0.162455 0.000000 -0.184238 0.077823
215.645759 47.742070 106.038064 -1300.606907 -280.754462 -636.571760 0.094337 -0.071165 -0.161357 0.000000 -0.182993 0.080707
215.645759 49.401754 105.275082 -1300.606907 -290.718660 -632.083328 0.094337 -0.073691 -0.160219 0.000000 -0.181702 0.083572
215.645759 51.049249 104.486126 -1300.606907 -300.611130 -627.438939 0.094337 -0.076198 -0.159042 0.000000 -0.180367 0.086415
215.643759 52.684148 103.671389 -1300.606907 -310.429426 -622.639739 0.094337 -0.078687 -0.157826 0.000000 -0.178988 0.089238
215.645759 54.306047 102.831073 -1300.606907 -320.171129 -617.686912 0.094337 -0.081156 -0.156570 0.000000 -0.177564 0.092038
215.645759 55.914548 101.965384 -1300.606907 -329.833834 -612.581681 0.094337 -0.083606 -0.155276 0.000000 -0.176096 0.094816
215.645759 57.509253 101.074537 -1300.606907 -339.415162 -607.325301 0.094337 -0.086034 -0.153944 0.000000 -0.174585 0.097570
.
.
.

```

Abbildung 4.2: Auszug der Geometriedatei zur CLARA-Messung der Platine

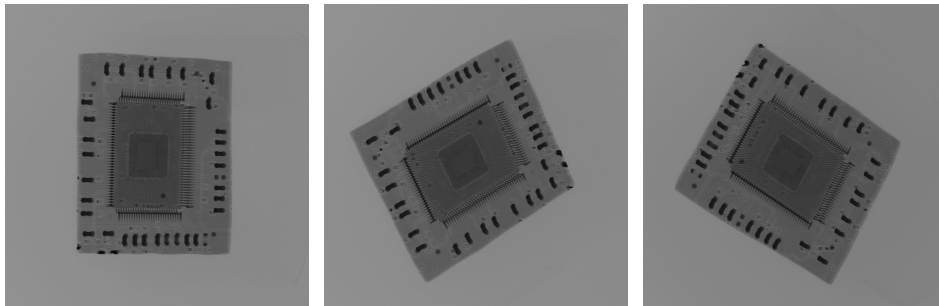


Abbildung 4.3: CLARA-Projektionen der Platine für Rotationswinkel $\alpha_0 + 0^\circ$, $\alpha_0 + 119.7^\circ$, $\alpha_0 + 240.3^\circ$.

CT-Aufnahme des Prüfkörpers (mit hinreichend großer Auflösung) durchzuführen, sodass die a priori Daten auf andere Art und Weise gewonnen werden müssen. Da im Rahmen dieser Arbeit jedoch weder entsprechenden Daten, noch die zur Erstellung notwendigen technischen Möglichkeiten zur Verfügung standen, wird hier dennoch eine CT-Rekonstruktion als a priori Volumen verwendet. Dies stellt jedoch keine Einschränkung der Gültigkeit der folgenden Aussagen oder der Anwendbarkeit des vorgestellten Algorithmus dar, da es dafür im wesentlichen unerheblich ist, auf welche Art und Weise die verwendeten a priori Daten gewonnen wurden.

Ein Auszug aus der Geometriedatei, die entsprechend der Projektionszahl 400 Einträge enthält, ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Wie in Abschnitt 3.3.1 erläutert, entsprechen hierbei die ersten drei Einträge der Position der Quelle im Raum und die darauffolgenden Einträge der Position des Detektors und den beiden den Detektor aufspannenden Vektoren. In diesem Falle sind die Einträge in mm angegeben.

Da die Rotationswinkel der Anlage äquidistant sind, beträgt die Distanz zwischen zwei aufeinander folgenden Winkeln bei 400 Projektionen jeweils $\frac{360^\circ}{400} = 0.9^\circ$. Die drei zur Transformationsfindung herangezogenen Projektionen, welche größtmöglichen Rotationsabständen und somit konkret den Winkeln $\alpha_0 + 0^\circ$, $\alpha_0 + 119.7^\circ$ und $\alpha_0 + 240.3^\circ$ entsprechen, sind in Abbildung 4.3 abgebildet. Der Laminographiewinkel betrug auch bei dieser CLARA-Messung 30° . Weiterhin kann aus der Geometriedatei gefolgert werden, dass die Abstände zwischen Quelle und Detektor bzw. Quelle und Objekt hier 172cm und 24.5cm betrugen. Der verwendete Detektor besteht aus 2048×2048 Pixeln der Kantenlänge $200\mu\text{m}$. Dadurch bedingt ist auch die Dimension der CL-Projektionen jeweils 2048×2048 Pixel.

4.2 Rotationsberechnung

4.2.1 Problembetrachtung und Lösungsansatz

Zunächst soll die Rotation berechnet werden. Dazu wird jedoch angenommen, dass die Skalierung des Objektes in a priori Volumen und Messdaten (nahezu) identisch ist. Gesucht ist somit eine Rotation, bestehend aus

- Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^3$
- Rotationswinkel $\alpha \in [0, 2\pi]$,

die die Orientierung der Messdaten der Orientierung des a priori Volumens anpasst. Hierbei handelt es sich insbesondere im Fall binärer a priori Information um ein nicht konvexes Problem, da gerade im Fall planarer, regelmäßiger Objekte eine Vielzahl lokaler Minima existieren können. Da dies die Anwendung vieler mathematischer Optimierungsverfahren erschwert, wird nun zunächst ein Abtastverfahren zur Bestimmung der optimalen Rotation vorgestellt. In Abschnitt 4.5 wird später zumindest ein Teilproblem der Rotationsbestimmung mit Hilfe eines Gradientenverfahrens gelöst.

Der hier vorgestellte Algorithmus basiert auf 'systematischem Abtasten' des Parameterraumes. Dabei wird in jedem Iterationsschritt wie folgt vorgegangen:

1. Abtasten des Parameterraumes
2. Erzeugen entsprechender Projektionen aus dem a priori Volumen
3. Evaluation der erzeugten Projektionen
4. Auswahl der besten Rotation(en) (und Verfeinerung des Suchraumes)

Durch Wiederholung dieser Vorgehensweise nähert man sich so der bestmöglichen Rotation, also dem globalen Minimum einer Evaluierungsfunktion an, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

4.2.2 Schritt 1: Abtasten des Parameterraums

Der Parameterraum D_R , bestehend aus Einheitsvektor und Rotationswinkel, ist ein dreidimensionaler Raum, konkret

$$D_R = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad (4.1)$$

Für jedes Element des Parameterraums $d = (\theta, \varphi, \psi) \in D_R$ gibt der letzte Eintrag ψ dann den Rotationswinkel an. Die ersten beiden Einträge entsprechen den Kugelkoordinaten ([2], S. 216ff) der (normierten) Rotationsachse $p \in \mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$p = p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Betrachtet man die Einheitskugel als Globus mit Nordpol bei $(0, 0, 1)^T$ und Südpol bei $(0, 0, -1)^T$, so bestimmt θ den Breitengrad, während φ den Längengrad des Einheitsvektors angibt. Für $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ entspricht der zugehörige Vektor also gerade dem Nord- bzw. Südpol, für $\theta = \frac{\pi}{2}$ liegt der Vektor auf dem Äquator, d.h. es gilt $p_3 = 0$.

Die Rotationsmatrix der Rotation $d = (\theta, \varphi, \psi)$ lässt sich schreiben als

$$R_{p,\psi} = \begin{pmatrix} p_1^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & p_1 p_2(1 - \cos \psi) - p_3 \sin \psi & p_1 p_3(1 - \cos \psi) + p_2 \sin \psi \\ p_1 p_2(1 - \cos \psi) + p_3 \sin \psi & p_2^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & p_2 p_3(1 - \cos \psi) - p_1 \sin \psi \\ p_1 p_3(1 - \cos \psi) - p_2 \sin \psi & p_2 p_3(1 - \cos \psi) + p_1 \sin \psi & p_3^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Man beachte, dass die Rotationsachse wegen $\theta, \varphi \in [0, \pi)$ (und damit $\sin \theta \geq 0, \sin \varphi \geq 0$) hier ein Vektor in $\mathbb{R}_+^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \geq 0\}$ ist. Es werden nur Vektoren dieses Halbraumes betrachtet, um sicherzustellen, dass jede Rotationen in $\mathbb{R}^3$ nur einmal im Parameterraum D_R enthalten ist. Dies ist notwendig aufgrund der Identität

$$R_{p(\theta, \varphi), \psi} = R_{-p(\theta, \varphi), -\psi} = R_{p(\theta + \pi, \varphi), 2\pi - \psi} \quad (4.4)$$

Eine geschickte Abtastung dieses Parameterraums ist nicht trivial, da eine äquidistante Abtastung von D_R , aufgrund der nichtlinearen Funktion $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, zu einer nicht äquidistanten Abtastung der Einheitskugel führt. Gleiche Abstände zwischen den zu testenden Rotationswinkeln sind hier jedoch gerade aufgrund der nicht konvexen Problemstellung, welche eine Vielzahl lokaler Minima bedeuten kann, wünschenswert, um Konvergenz in das globale Minimum schon bei möglichst groben Abtastungen zu gewährleisten und bessere Rechenzeiten zu erreichen.

Abtastung des gesamten Parameterraums Es soll nun eine äquidistante Abtastung des Parameterraums D_R gefunden werden. Die Schrittweite, d.h. die Distanz zwischen enthaltenen Rotationsachsen und -winkeln, sei dabei vorgegeben und wird im folgenden mit $d \in \mathbb{R}_+$ bezeichnet.

Zunächst wird lediglich eine Abtastung der Menge $[0, \pi) \times [0, \pi)$ bestimmt, die ein äquidistantes Gitter G_d auf der Einheits-Halbkugel des $\mathbb{R}_+^3$, also $G_d \subset \mathbb{R}_+^3$, induziert. Diese Abtastung wird im folgenden mit M_d bezeichnet. Dann gilt:

$$G_d = p(M_d) = \{p(\theta, \varphi) | (\theta, \varphi) \in M_d\} \quad (4.5)$$

Für benachbarte Elemente $g_k, g_l \in G_d$ soll also gelten:

$$\|g_k - g_l\|_2 = d \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \|p(\theta_k, \varphi_k) - p(\theta_l, \varphi_l)\|_2 = d$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} \sin \theta_k \cos \varphi_k \\ \sin \theta_k \sin \varphi_k \\ \cos \theta_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin \theta_l \cos \varphi_l \\ \sin \theta_l \sin \varphi_l \\ \cos \theta_l \end{pmatrix} \right\|_2 = d \quad (4.7)$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$\|p(\theta_1, \varphi) - p(\theta_2, \varphi)\|_2 = \|p(\theta_1, \tilde{\varphi}) - p(\theta_2, \tilde{\varphi})\|_2, \quad \forall \theta_1, \theta_2, \varphi, \tilde{\varphi} \in [0, \pi) \quad (4.8)$$

jedoch

$$\|p(\theta, \varphi_1) - p(\theta, \varphi_2)\|_2 > \|p(\tilde{\theta}, \varphi_1) - p(\tilde{\theta}, \varphi_2)\|_2 \quad (4.9)$$

für

$$\theta, \tilde{\theta}, \varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi) \text{ mit } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right|_2 < \left| \tilde{\theta} - \frac{\pi}{2} \right|_2$$

Geometrisch interpretiert bedeutet dies, dass bei gleichen Abständen des Winkels φ die Abstände der resultierenden Einheitsvektoren größer sind, je näher sich die Vektoren am Äquator befindet, d.h. je kleiner die Distanz zwischen θ und $\frac{\pi}{2}$ ist. Für $\theta = 0$ spielt die Wahl von φ hingegen gar keine Rolle, der resultierende Vektor ist stets der Nordpol $(0, 0, 1)^T$.

Somit werden nun zunächst Winkel $\theta_1, \dots, \theta_n \subset [0, \pi)$, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ bestimmt, so dass

$$\|p(\theta_i, \varphi) - p(\theta_{i+1}, \varphi)\|_2 = d, \quad \forall \varphi \in [0, \pi), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.10)$$

Dies entspricht einer Abtastung der Breitengrade. Anschließend wird für jedes $\theta_i, i = 1, \dots, n$ eine Abtastung der Längengrade, d.h. Winkel $\varphi_1^i, \dots, \varphi_m^i$, bestimmt, so dass

$$\|p(\theta_i, \varphi_j^i) - p(\theta_i, \varphi_{j+1}^i)\|_2 = d, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (4.11)$$

Für die Wahl der θ_i kann φ beliebig gewählt werden, wir setzen also $\varphi = 0$. Dann gilt wegen $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$:

$$\begin{aligned}
& \|p(\tilde{\theta}, 0) - p(\theta, 0)\|_2 = d \quad (4.12) \\
\Leftrightarrow & \left\| \begin{pmatrix} \sin \tilde{\theta} - \sin \theta \\ 0 \\ \cos \tilde{\theta} - \cos \theta \end{pmatrix} \right\|_2^2 = d^2 \\
\Leftrightarrow & \sin^2 \tilde{\theta} - 2 \sin \tilde{\theta} \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \tilde{\theta} - 2 \cos \tilde{\theta} \cos \theta + \cos^2 \theta = d^2 \\
\Leftrightarrow & 2 - 2(\sin \tilde{\theta} \sin \theta + \cos \tilde{\theta} \cos \theta) = d^2 \\
\Leftrightarrow & 2 - 2 \cos(\tilde{\theta} - \theta) = d^2 \\
\Leftrightarrow & \tilde{\theta} - \theta = \arccos\left(\frac{2-d^2}{2}\right) =: h_\theta \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Damit gilt $\theta_i = (i-1) \cdot h_\theta$, $i = 1, \dots, n$ und für die Anzahl der Breitengrade $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\frac{\pi}{h_\theta} - 1 \leq n < \frac{\pi}{h_\theta} \quad (4.14)$$

Um zugehörige Schrittweiten für φ zu bestimmen sei nun $\theta \in [0, \pi)$ fest. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \|p(\theta, \tilde{\varphi}) - p(\theta, \varphi)\|_2 = d \quad (4.15) \\
\Leftrightarrow & \left\| \begin{pmatrix} \sin \theta (\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi) \\ \sin \theta (\sin \tilde{\varphi} - \sin \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = d^2 \\
\Leftrightarrow & \sin^2 \theta (\cos^2 \tilde{\varphi} - 2 \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + \sin^2 \theta (\sin^2 \tilde{\varphi} - 2 \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \sin^2 \varphi) = d^2 \\
\Leftrightarrow & -2 \sin^2 \theta (\cos(\tilde{\varphi} - \varphi) - 1) = d^2 \\
\Leftrightarrow & \tilde{\varphi} - \varphi = \arccos\left(\frac{-d^2}{2 \sin^2 \theta} + 1\right) =: h_\varphi(\theta) \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass für hinreichend kleine Winkel θ bei gegebenem Abstand d gelten kann:

$$\left| \frac{-d^2}{2 \sin^2 \theta} + 1 \right| > 1 \quad (4.17)$$

In diesem Fall existieren keine $\varphi_1 \neq \varphi_2$ so dass

$$\|p(\theta, \varphi_1) - p(\theta, \varphi_2)\|_2 \leq d \quad (4.18)$$

Dann setzt man $h_\varphi(\theta) := 0$. Für diesen Breitengrad ist dann lediglich ein Längengrad abzutasten.

Für die Menge M_d gilt somit

$$M_d = \{(\theta_i, \varphi_j^i) | \theta_i = (i-1) \cdot h_\theta, \varphi_j^i = (j-1) \cdot h_\varphi(\theta_i), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n_i\} \quad (4.19)$$

wobei $n_i = 1$, falls (4.17) gilt. Andernfalls gilt

$$\frac{\pi}{h_\varphi(\theta_i)} - 1 \leq n_i < \frac{\pi}{h_\varphi(\theta_i)} \quad (4.20)$$

und $n_i \leq n$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dabei ist $n_i = n$, falls θ_i hinreichend nahe bei $\frac{\pi}{2}$ gilt.

Insgesamt gilt nun mit $n \in \mathbb{N}$ wie in (4.14)

$$|G_d| = |M_d| = n \cdot \sum_{i=1}^n n_i \leq n^2 < \left(\frac{\pi}{\arccos\left(\frac{2-d^2}{2}\right)} \right)^2 \quad (4.21)$$

Um aus diesem Gitter auf der Einheits-Halbkugel nun eine Abtastung des Parameterraumes D_R zu erhalten, muss lediglich eine Menge N_d von äquidistanten Rotationswinkeln aus $[0, 2\pi)$ hinzugefügt werden. Dazu wähle

$$N_d = \{(i-1) \cdot d \mid i = 1, \dots, m\} \quad (4.22)$$

mit $\frac{2\pi}{d} - 1 \leq m < \frac{2\pi}{d}$, $m \in \mathbb{N}$.

Eine äquidistante Abtastung des Parameterraumes $P_d \subset D_R$ ist somit gegeben durch

$$P_d = M_d \times N_d \quad (4.23)$$

Abtastung bei Vorgabe eines Startwertes Soll nicht der gesamte Parameterraum D_R sondern lediglich die Umgebung eines Elementes $s = (\theta_0, \varphi_0, \psi_0) \in D_R$ abgetastet werden, so werden sogar zwei zusätzliche Parameter benötigt: Die Schrittweite $d \in \mathbb{R}$ zwischen den Gitterelementen, sowie der maximale Abstand $d_{max} \in \mathbb{R}$ zum Startwert s . Hier kann analog zu obiger Vorgehensweise gearbeitet werden: Zunächst wird eine Abtastung der Breitengerade mit Abständen h_θ , wie in (4.13), gefunden:

$$\theta_{-n}, \theta_{-n+1}, \dots, \theta_n, \text{ mit } \theta_i = \theta + i \cdot h_\theta, n \in \mathbb{N}, \frac{d_{max}}{d} - 1 \leq n < \frac{d_{max}}{d}. \quad (4.24)$$

Anschließend wird zu jedem θ_i , ebenfalls mit Hilfe der Formel (4.16) für $h_\varphi(\theta_i)$, eine Abtastung der Breitengrade bestimmt:

$$\varphi_{-n_i}^i, \dots, \varphi_{n_i}^i, \varphi_j^i = \varphi_i + j \cdot h_\varphi(\theta_i), \quad (4.25)$$

Um die Einhaltung des maximalen Abstandes d_{max} zu gewährleisten gilt hierbei für $n_i \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sqrt{(d_{max}^2 - (i \cdot h_\theta)^2)}}{h_\varphi(\theta_i)} - 1 \leq n_i < \frac{\sqrt{(d_{max}^2 - (i \cdot h_\theta)^2)}}{h_\varphi(\theta_i)} \quad (4.26)$$

bzw. $n_i = 0$, falls $h_\varphi(\theta_i) = 0$. Damit gilt für die abzutastenden Rotationsachsen in Kugelkoordinaten:

$$M_d(s, d_{max}) = \{(\theta_i, \varphi_j^i) \mid \theta_i = \theta_0 + i \cdot h_\theta, \varphi_j^i = \varphi_0 + j \cdot h_\varphi(\theta_i), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n_i\} \quad (4.27)$$

Die Abtastung der Rotationswinkel N_d ist gegeben durch

$$N_d(s, d_{max}) = \{(i-1) \cdot d \mid i = 1, \dots, n\} \quad (4.28)$$

Auch hier erhält man die gesuchte äquidistante Abtastung als

$$P_d(s, d_{max}) = M_d(s, d_{max}) \times N_d(s, d_{max}) \quad (4.29)$$

Distanz und Nachbarschaftsbeziehungen von Rotationen Im Folgenden wird es hilfreich sein, über Distanzen zwischen zwei Rotationen $s_1 = (\theta_1, \varphi_1, \alpha_1), s_2 = (\theta_2, \varphi_2, \alpha_2) \in D_R$ sprechen zu können. Diese Distanz wird definiert als

$$\|s_1 - s_2\| = (\|p(\theta_1, \varphi_1) - p(\theta_2, \varphi_2)\|_2^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2)^{0.5} \quad (4.30)$$

Auf einem Gitter $P_d = M_d \times N_d \subset D_R$, definiert wie in Gleichungen (4.19) und (4.22), sei $s = (\theta, \varphi, \alpha)$ ein innerer Punkt (d.h. $(\theta \pm h_\theta, \varphi \pm h_\varphi(\theta), \alpha \pm d) \in P_d$). Dann hat s auf diesem Gitter

- 6 Nachbarn 1. Klasse mit Distanz d :
 $(\theta, \varphi, \alpha \pm d), (\theta, \varphi \pm h_\varphi(\theta), \alpha), (\theta \pm h_\theta, \varphi, \alpha)$
- 12 Nachbarn 2. Klasse mit Distanz $\leq \sqrt{2} \cdot d$:
 $(\theta, \varphi \pm h_\varphi(\theta), \alpha \pm d), (\theta \pm h_\theta, \varphi, \alpha \pm d), (\theta \pm h_\theta, \varphi \pm h_\varphi(\theta), \alpha)$
- 8 Nachbarn 3. Klasse mit Distanz $\leq \sqrt{3} \cdot d$:
 $(\theta \pm h_\theta, \varphi \pm h_\varphi(\theta), \alpha \pm d)$

4.2.3 Schritt 2: Erzeugen von Vergleichs-Projektionen

Es sei nun eine Menge zu bewertender Elemente aus D_R gegeben. Um eine bestimmte Rotation $p \in D_R$ zu evaluieren, wird diese zunächst auf die vorliegenden Daten angewendet werden. Anschließend werden Projektionen des a priori Volumens in entsprechend angepasster Orientierung erstellt und mit den Referenzprojektionen verglichen. Die entsprechenden Hintergründe werden Folgenden erläutert.

Zunächst soll beschrieben werden, wie die Projektionserstellung abläuft und welche Daten dazu herangezogen werden. Zur Simulation der Projektionen wird ein am IZFP bereits vorhandenes C++ Programm, der sogenannte 'Projection Maker' eingesetzt. Dieses Programm erfordert als Eingabe ein Voxelvolumen (hier das a priori Volumen) sowie die aus vier Vektoren bestehenden Geometriedaten. Die Größe und Auflösung der zu erstellenden Projektionen kann vom Benutzer frei gewählt werden. Eine Projektion wird simuliert, indem für gegebene Positionen von Quelle und Detektor, wie im SART-Verfahren auch, jeder einzelne Strahl verfolgt und dessen Abschwächung beim Durchlaufen des Objektes berechnet wird. Die Anzahl der zu simulierenden Strahlen entspricht also der gewählten Anzahl der Detektorpixel. Zu jedem Strahl wird (wie im SART-Verfahren) zunächst eine Gewichtung der Voxel bestimmt, die der relativen Länge des Strahls durch die einzelnen Voxel entspricht. Diese Gewichtung ist von den Voxelwerten selbst vollkommen unabhängig. Zur Berechnung der Abschwächung der Strahlen werden lediglich die Werte aller getroffenen Voxel mit der entsprechenden Gewichtung multipliziert und aufsummiert. Die Grauwerte der Projektionen ergeben sich dann direkt aus der berechneten Abschwächung der entsprechenden Strahlen. Hierbei bleiben einige physikalischen Phänomene, wie z.B. Strahlenaufhärtung oder Streuung der Strahlen, außer Acht, was zum Einen die Qualität der Projektionen erhöhen, zum Anderen aber den Vergleich der Grauwerte zu real gemessenen Projektionen erschweren kann. Nicht zuletzt dadurch ist ein direkter Vergleich der Grauwerte der erstellten Projektionen mit den Referenzprojektionen nicht möglich, eine Vorbearbeitung der Projektionen ist also möglich. Darauf soll jedoch im nächsten Abschnitt, wenn es darum geht eine geeignete Evaluationsfunktion zu konstruieren, näher eingegangen werden.

Es sollen Projektionen aus dem a priori Volumen erstellt werden, die dann mit den gegebenen CL-Projektionen verglichen werden. Um eine Vergleichbarkeit der Objektorientierungen der simulierten Projektionen mit den tatsächlichen CLARA-Aufnahmen zu erreichen, muss bei der Simulation dieselbe Geometrie wie bei der Laminographie-Messung benutzt werden. Diese Geometrie kann der zur Messung gehörigen Geometriedatei entnommen werden. Dabei müssen dieser Datei genau die Einträge entnommen werden, die den Referenzprojektionen entsprechen.

Setzt man diese Geometriedaten in den Simulationsvorgang ein ohne jegliche Modifikationen vorzunehmen, so geben die zu vergleichenden Projektionenpaare die Transformationsunterschiede der Objekte in den Ausgangsdaten wider. Die vorliegenden Rotationskandidaten sollen jedoch darauf getestet werden, wie ähnlich die Objektorientierungen nach Anwendung der entsprechenden Rotationen auf die CL-Daten sind. Die dazu notwendige Änderung der Orientierung wird dabei durch Anpassung der Geometriedaten umgesetzt. In Kapitel 3 wurde erklärt, dass eine Rotation auf die Laminographie-Daten angewendet werden kann, indem man diese Rotation auf die vier Vektoren der Geometriedatei anwendet. Setzt man eine so modifizierte Geometriedatei nun nicht im Rekonstruktionsvorgang, sondern bei der Erstellung der Projektionen ein, so wird selbiges Ergebnis erzielt: Die umgekehrte Transformation wird auf die zu erstellenden Projektionen, also hier auf das a priori Volumen angewendet, was vollkommen analog zur Anwendung der eigentlichen Transformation auf die CLARA-Daten ist.

Die Geometriedaten zur Erstellung von Projektionen, in denen das Objekt gegenüber seiner Ausgangsorientierung um eine Rotation $p^{-1} \in D_R$ rotiert ist, erhält man also wie folgt: Man wählt zunächst die drei Datensätze der Geometriedatei aus, die den drei Referenzprojektionen entsprechen, und wendet jeweils auf alle vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ (Position Quelle, Position Detektor, 2 Detektor aufspannende Vektoren) die Rotation p an. Die so modifizierten Daten werden anschließend zur Simulation von Projektionen aus dem a priori Volumen herangezogen. Anhand der Ähnlichkeit der

resultierenden Projektionen zu den vorhandenen CLARA-Projektionen kann die Rotation p evaluiert werden.

4.2.4 Schritt 3: Evaluation der Rotation

Sollen die erstellten Projektionen nun hinsichtlich der Orientierung des Körpers mit den Referenzprojektionen verglichen werden, so treten zwei Probleme auf: Zum Einen ist, wie im letzten Abschnitt bereits erwähnt, ein direkter Vergleich der Grauwerte nicht zielführend, da es sich um Daten aus unterschiedlichen bildgebenden Verfahren handelt. So ist es im Allgemeinen nicht ohne Weiteres möglich, eine reelle Röntgenmessung, wie hier z.B. die CLARA-Messung, in vollständiger Übereinstimmung zu simulieren, da nicht alle dazu notwendigen Parameter bekannt sind. Insbesondere ist z.B. meist die tatsächliche Beschleunigungsspannung der Röntgenquelle nicht nachvollziehbar.

Das zweite Problem, welches der Vergleichbarkeit der Projektionen im Wege stehen kann, ist bedingt durch die unbekannte Verschiebung zwischen a priori Volumens und Prüfkörper in der CLARA-Messung. Dadurch können auch die Objekte in den Projektionspaaren zusammengehöriger Durchstrahlungsrichtungen nahezu beliebig verschoben sein. Dieses Problem ist jedoch einfach und effizient zu lösen indem man zu jeder Projektion einen Bildschwerpunkt berechnet und diesen ins Detektorzentrum verschiebt. Die genaue Vorgehensweise dazu wird unten näher erläutert, wenn die Berechnung des Abweichungswertes thematisiert wird. Zunächst soll nun das erstgenannte Problem in Angriff genommen werden, es soll also ein Weg gefunden werden, die Projektionen zu vergleichen ohne direkt die Pixelwerte in Relation zu setzen.

Ein häufig gewählter Ausweg, um die Vergleichbarkeit in solchen Fällen zu ermöglichen, ist die Binarisierung der Bilddaten. Dies bedeutet, dass das Bild in zwei charakteristische Bereiche unterteilt wird, deren Pixel je nach Zugehörigkeit den Wert 0 oder den Wert 1 erhalten. Sinnvoll ist es hier, die Detektorbilder danach zu unterteilen, ob die jeweiligen Strahlen auf ihrem Weg von Quelle zu Detektor tatsächlich das Objekt durchdringen mussten oder nicht.

Diese Vereinfachung der Projektionsbilder bringt jedoch im Falle nicht binärer a priori Information oft auch einen gravierenden Nachteil mit sich: So kann durch den Vorgang der Binarisierung nicht nur die Zahl der lokalen Minima weiter erhöht werden, es kann sogar zur Existenz mehrerer globaler Minima kommen. Um dies zu vermeiden und Lösbarkeit des Problems auf dem Suchraum D_R nicht weiter zu erschweren, kann ein weiterer Bildverarbeitungsschritt vorgenommen werden: Der Materialbereich jeder Projektion wird ein weiteres Mal binarisiert wodurch eine Unterteilung der Projektion in nicht mehr nur zwei, sondern nunmehr drei Bereiche erreicht wird. Dazu definiert man eine dritten Klasse, die Strahlen entspricht, die besonders stark abgeschwächt wurden, d.h. Strahlen die entweder Bereiche größter Materialdichte zu durchdringen hatten oder die einen sehr langen Weg durch das Objekt zurückzulegen hatten. Diese Unterscheidung ist nur dann sinnvoll möglich, wenn Informationen über die Dichteverteilung des a priori Volumens gegeben sind, wenn die a priori Daten also nicht in Binärform vorliegen. Dieser Schritt, der fortan als 'Trinarisierung' der Projektion bezeichnet wird, ist somit optional und nur in manchen Fällen gewinnbringend.

1. Binarisierung Die erste Binarisierung, d.h. die Unterteilung der Projektion in Luft- und Objekt-Pixel geschieht mit Hilfe eines Schwellwertes, der ähnlich wie im Verfahren von Otsu [17] bestimmt wird. Otsu unterteilt das Bild f_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ (mit ganzzahligen Pixelwerten, d.h. $f_{ij} \in \{1, \dots, P\} \subset \mathbb{N}$) anhand eines Schwellwertes $T \in \mathbb{N}$ entsprechend seiner Grauwerte in zwei Klassen:

- $C_0(T)$ mit $(i, j) \in C_0(T) \Leftrightarrow f_{ij} \leq T$
- $C_1(T)$ mit $(i, j) \in C_1(T) \Leftrightarrow f_{ij} > T$

Die Wahrscheinlichkeit, d.h. die relative Häufigkeit eines Grauwertes $k \in \{1, \dots, P\}$ wird im Folgenden mit p_k bezeichnet. Die relativen Häufigkeiten der beiden Klassen sind dann gegeben durch

$$P(C_0(T)) = \sum_{k=0}^T p_k =: \omega(T) \quad (4.31)$$

$$P(C_1(T)) = \sum_{k=T+1}^P p_k = 1 - \omega(T) \quad (4.32)$$

Dann berechnet sich der kumulierte Mittelwert des Bildes als

$$\mu(T) = \sum_{k=0}^T k \cdot p_k \quad (4.33)$$

und der Mittelwert des gesamten Bildes als

$$\mu := \mu(P) = \sum_{k=0}^P k \cdot p_k \quad (4.34)$$

Die Mittelwerte beider Klassen erhält man durch

$$\mu_0(T) = \frac{1}{\omega(T)} \sum_{k=0}^T k p_k = \frac{\mu(T)}{\omega(T)} \quad (4.35)$$

$$\mu_1(T) = \frac{1}{1-\omega(T)} \sum_{k=T+1}^P k p_k = \frac{\mu - \mu(T)}{1 - \omega(T)} \quad (4.36)$$

Otsu's Ansatz, einen optimalen Schwellwert zur Binarisierung des Bildes zu finden besteht nun darin, diesen Schwellwert T so zu wählen, dass die Zwischenklassenvarianz $\sigma_Z^2(T)$ maximal wird. Dieser Wert lässt sich berechnen als

$$\sigma_Z^2(T) = \omega(T)(\mu_0(T) - \mu)^2 + (1 - \omega(T))(\mu_1(T) - \mu)^2 \quad (4.37)$$

Die Zwischenklassenvarianz wird dabei genau dann maximal, wenn die gewichtete Summe der Varianzen beider Klassen minimal wird.

Zur Binarisierung der Projektionen wird dieser Ansatz hier nur leicht abgewandelt und der benötigte Schwellwert T_1 wird berechnet durch

$$T_1 := \operatorname{argmax}_{T \in \{1, \dots, P\}} \left\{ \omega(T)(\mu_0(T) - \mu)^2 + (1 - \omega(T))(\mu_1(T) - \mu)^b \right\}, \quad b \geq 2 \quad (4.38)$$

Dies entspricht für $b = 2$ gerade der Methode von Otsu. Für $b > 2$ wird größeres Gewicht darauf gelegt, dass die Varianz innerhalb der Klasse $C_1(T_1)$, welche hier dem Bereich 'Luft' entspricht, klein ist. Eine kleinere Varianz wird dabei durch Verkleinerung der Klasse C_1 selbst, also durch einen größeren Schwellwert T_1 erreicht. Dies ist insofern sinnvoll, als zu dieser Klasse nur solche Detektorpixel gehören sollen deren zugehöriger Röntgenstrahl kein Material durchdringen musste und die Grauwerte in dieser Klasse im Idealfall somit allesamt identisch sein sollten. Durch Messfehler, Rauschen und auch aus physikalischen Gründen kann es innerhalb dieser Klasse dennoch zu leichten Abweichungen kommen. Eine solche Gewichtung der 'Luft'-Klasse gewinnt für planare Objekte an zusätzlicher Bedeutung, da die Durchstrahlungslängen hier oft sehr kurz sind und somit auch solche Strahlen zur 'Material'-Klasse $C_0(T_1)$ gehören, die auf ihrem Weg nur sehr wenig abgeschwächt wurden. Dadurch kann für diese Klasse eine große Varianz notwendig sein. Um zu verhindern, dass solche Strahlen der 'Luft'-Klasse zugeordnet werden, muss also höheres Gewicht auf eine sehr niedrige Varianz dieser Klasse

$C_1(T_1)$ gelegt werden. So wird bei der Binarisierung von Projektionen der Skischuhschnalle (vgl. Kapitel 3) $b = 2.2$ gewählt, während im Falle der Platine $b = 2.3$ gesetzt wurde.

Der Schwellwert T_1 muss nur einmal für die drei Referenzprojektionen und einmal für die zu erstellenden Vergleichsprojektionen berechnet werden, da eine Anpassung des Wertes bei Projektionen identischer bildgebender Verfahren, bei gleichbleibender Parameterwahl, nicht notwendig ist. In vielen Fällen (z.B. bei konvexen Objekten oder bei verrauschten Projektionen), kann es sinnvoll sein, vor der Einteilung in die Klassen C_1 und C_0 , eine Glättung (z.B. Lowpass-Filter, Gauß-Filter, siehe [4]) auf die Projektionen anzuwenden.

2. Binarisierung / Trinarisierung Liegt eine Dichteverteilung des a priori Volumens vor, so kann eine Trinarisierung der Projektionen sinnvoll sein, um lokale Minima stärker voneinander abgrenzen zu können oder sogar ein distinktes globales Minimum zu schaffen. In diesem Fall wird eine weitere Binarisierung der Klasse C_0 vorgenommen mit dem Ziel, die Bereiche des Objektes, die eine besonders hohe Strahlenabschwächung bewirken (lange Durchstrahlungslänge, große Dichte), abzugrenzen. Hier wird der Schwellwert T_2 als ein bestimmtes p-Quantil ($0 < p < 1$), der jeweiligen Projektion gewählt. Es wird also der kleinstmögliche Schwellwert bestimmt, so dass die $p\%$ aller Pixel, die die niedrigsten Grauwerte besitzen, in eine Klasse C_0^0 eingeteilt werden und die übrigen Pixel in eine Klasse C_0^1 . Es gilt also:

$$T_2 := \min_{T \in \{1, \dots, P\}} \left\{ \frac{|C_0^0|}{|C_0|} \geq p \right\} \quad (4.39)$$

$$C_0^0 = \{(i, j) | (i, j) \in C_0, f_{ij} \leq T_2\} \quad (4.40)$$

$$C_0^1 = \{(i, j) | (i, j) \in C_0, f_{ij} > T_2\} \quad (4.41)$$

Ein solcher, auf Quantilen basierender Schwellwert muss für jede Projektionen neu berechnet werden, da die Quantilsverteilungen verschiedener Projektionen identischer Objekte sehr unterschiedlich sein können.

Wie bereits diskutiert, sind die Grauwerte der Projektionen nicht direkt vergleichbar, jedoch stimmt die Ordnung der Pixel entsprechend ihrer Grauwerte im Allgemeinen überein. Da es sich darüber hinaus um Durchstrahlungsbilder identischer Objekte handelt, führt diese Vorgehensweise, bei der Pixel, die zu stark abgeschwächten Strahlen gehören, hervorgehoben werden, zu vergleichbaren Trinarisierungen.

Berechnung des Abweichungswertes Mit Hilfe der erstellten Bi-/Trinarisierung der Referenzprojektionen und der für eine Rotation erstellten Projektionen, kann ein Wert berechnet werden, der ein Maß für die Übereinstimmung dieser Rotation mit der gesuchten Rotation darstellt. Es bezeichne im folgenden $p_i^R \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$, $i = 1, 2, 3$ die trinarisierten (bzw. binarisierten) Referenzprojektionen und $p_i^E(d) \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$, $i = 1, 2, 3$ die zu einer Rotation $d = (\theta, \varphi, \psi) \in D_R$ erstellten Projektionen, ebenfalls in trinarisierter (bzw. binarisierter) Form.

Wie bereits oben erwähnt muss dabei beachtet werden, dass die Objekte aufgrund der noch unbekannten Translation zwischen a priori Volumen und Prüfkörper innerhalb der Projektionen beliebig verschoben sein können. Um diese Verschiebung auszugleichen wird nun zu jeder Projektion $p \in \{0, 1, 2\}^{n \times n}$ ein sogenannter Bildschwerpunkt $S(p) \in \{1, \dots, n\}^2$ auf folgende Art und Weise berechnet:

$$S(p) = \left[\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\delta(p_{(j,k)}) \cdot (j, k))}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta(p_{(j,k)})} \right] \quad (4.42)$$

Dabei ist $\delta(p_{(j,k)}) \in \{0, 1\}$ genau dann gleich 1, wenn $p_{(j,k)} \geq 1$ und $d_x, d_y \in \{-1, 0, 1\}$ existieren mit $p_{(j+d_x, k+d_y)} = 0$. Dies ist der Fall, wenn (j, k) ein 'Vordergrundpixel' (d.h. Pixelwert > 0) ist, das mindestens ein benachbartes 'Hintergrundpixel' (Wert $= 0$) hat. Es wird also der Durchschnitt der Koordinaten aller Pixel, die als Rand des Objektes bezeichnet werden können, gebildet. Bei konvexen Objekten erhält man so stets Koordinaten eines Pixels im Inneren des Objektes.

Der so berechnete Bildschwerpunkt wird nun ins Bildzentrum verschoben. Dabei werden solche Pixel nahe des Randes, die erst in den Bildbereich hineinverschoben wurden, für die also kein Wert vorliegt, dem Hintergrund zugeordnet, diese Pixel erhalten also den Wert 0. Ist die Projektionsgröße sinnvoll gewählt und konnte das Objekt bei der Messung komplett auf dem Detektor erfasst werden, so kommt es hierbei zu keinerlei Informationsverlust, d.h. kein Pixel mit Wert > 0 wird aus dem Bildbereich hinausgeschoben.

Dann wird der Abweichungswert $\Delta(d)$ der Rotation d berechnet als

$$\Delta(d) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{1000}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left((p_i^R)_{(j,k)} - (p_i^E(d))_{(j,k)} \right)^2 \quad (4.43)$$

Dieser Wert gibt das 1000-fache der durchschnittlichen quadratischen Abweichung der Pixelwerte aller Projektionenpaare an. Werden binarisierte Projektionen verglichen, so entspricht dies dem Anteil der nicht übereinstimmenden Pixel in Promille. In der Praxis muss stets dahingehend unterschieden werden, ob binarisierte oder trinarisierte Projektionen zur Berechnung dieses Δ -Wertes herangezogen wurden. So ist der Wert bei trinarisierten Projektionen niemals kleiner als der Wert der identischen, binarisierten Projektionen, sondern in der Regel sogar um ein Vielfaches größer. Dies ist damit zu begründen, dass die Klasse der Hintergrundpixel (Wert 0) bei einer möglichen Trinarisierung unverändert bleibt.

Insgesamt erhält man ein Maß, welches angibt, wie ähnlich die Orientierung des Objektes in den drei Projektionen, d.h. in drei speziellen Betrachtungsrichtungen, ist. Nimmt man ideale Bi-/Trinarisierung der Daten an, so wird dieses Maß genau dann minimal, wenn die Objekte identisch orientiert sind. Gerade bei planaren Objekten, kann jedoch eine Vielzahl lokaler Minima existieren. Die Funktion $\Delta : D_R \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Rotation einen Abweichungswert zuordnet ist also im Allgemeinen nicht konvex.

4.2.5 Schritt 4: Auswahl des Minimums und weiteres Vorgehen

Da stets nur eine beschränkte Anzahl von Rotationen aus D_R abgetastet werden kann und das zugehörige Gitter zunächst nicht hinreichend fein, sondern gar beliebig grob gewählt werden kann, muss bei der Suche des Minimums, d.h. der Rotation mit minimalem Abweichungswert, iterativ vorgegangen werden. Das bedeutet, dass das Gitter schrittweise verfeinert wird bis eine beliebige Genauigkeit, also ein gewünschter maximaler Abstand zwischen den abgetasteten Rotationen, erreicht ist. Die Gitterabstände müssen also in jedem Schritt sinnvoll verfeinert werden, so dass zum Einen nicht unnötig viele Abweichungswerte berechnet werden müssen, andererseits aber zumindest die Annäherung an ein naheliegendes lokales Minimum garantiert werden kann.

Im Folgenden wird die angewandte Vorgehensweise allgemein beschrieben, zunächst jedoch ohne näher auf sinnvolle Abstände und Genauigkeiten einzugehen.

1. Schritt Es sei nun $P_{t_1}^{(1)}$, ein Gitter mit Abständen t_1 , die erste Abtastung des Parameterraumes D_R . Ist kein Startwert gegeben, so ist deckt dieses Gitter den gesamten Parameterraum D_R ab. Wird hingegen ein Startwert $d_0 \in D_R$ benutzt, so ist $P_{t_1}^{(1)}$ ein Gitter mit zentraler Rotation d_0 und Abständen t_1 . Die Anzahl der Gitterelemente ist für die weitere Vorgehensweise nicht von Bedeutung.

Setze

$$d_{min}^{(1)} := \operatorname{argmin}\{\Delta(d) | d \in P_{t_1}^{(1)}\} \quad (4.44)$$

$$\Delta_{min}^{(1)} := \min\{\Delta(d) | d \in P_{t_1}^{(1)}\} = \Delta(d_{min}^{(1)}) \quad (4.45)$$

Für festes $\delta_1 \geq 0$ sei $Q^{(1)} \subset P_{t_1}^{(1)}$ weiterhin eine möglichst große Menge mit $d_{min}^{(1)} \in Q^{(1)}$ und so dass

$$\left| \frac{\Delta(d_q) - \Delta_{min}^{(1)}}{\Delta_{min}^{(1)}} \right| \leq \delta_1 \quad \forall d_q \in Q^{(1)} \quad (4.46)$$

$Q^{(1)}$ ist also eine Menge von Rotationen, deren Δ -Wert von $\Delta_{min}^{(1)}$ relativ betrachtet nur um ein gewisses Maß δ_1 abweicht. Weiterhin soll $Q^{(1)}$ nur Rotationen enthalten, die ein lokales Minimum der Evaluationsfunktion Δ auf dem Abtastgitter darstellen, also:

$$\Delta(d) \geq \Delta(d_q) \quad \forall d_q \in Q^{(1)}, d \in P_{t_1}^{(1)} \text{ mit } \|d - d_q\| \leq \sqrt{3} \cdot t_1 \quad (4.47)$$

Jede Rotation $d_q \in Q^{(1)}$ führt also zu einem distinkten lokalen Minimum von Δ . Damit diese Vorgehensweise sinngemäß ausgeführt werden kann und möglichst alle lokalen Minima ermittelt werden können, muss t_1 also 'hinreichend klein' gewählt werden.

Weitere Schritte Es seien nun für $m > 1$ bereits $m - 1$ Schritte ausgeführt und eine (endliche) Menge $Q^{(m-1)} = \{q_1, \dots, q_r\}$ von Rotationen mit zugehörigen Abweichungswerten, die als Minimum-Kandidaten in Frage kommen, gegeben. Die Genauigkeit im $(m-1)$ -ten Schritt, d.h. die Abstände der Rotationen in jedem Abtastungsgitter auf D_R , sei gegeben durch t_{m-1} .

Im m -ten Schritt werden nun zunächst, wie in Abschnitt 4.2.2, Gleichungen (4.27) - (4.29), die Mengen der abzutastenden Rotationen $P_j^{(m)}, j = 1, \dots, r$ bestimmt:

$$P_j^{(m)} = P_{t_m}(q_j, c_g \cdot t_m) \quad (4.48)$$

wobei der Gitterabstand gegeben ist durch $t_m = c_t \cdot t_{m-1}$ mit festem $0 < c_t < 1$ und die maximale Distanz zum Gittermittelpunkt q_j ist $c_g \cdot t_m$ mit festem $c_g > 1$. Dabei sind die Parameter c_t und c_g sinnvollerweise so zu wählen, dass alle Rotationen, die als lokales Minimum in Frage kommen in wenigen Schritten erreichbar bleiben, jedoch keine überflüssigen Berechnungen durchgeführt werden. Siehe dazu auch Abschnitt 4.2.6

Für jede solche Menge wird nun analog zu Schritt 1 der minimale Abweichungswert $\Delta_{min}^{(m,j)}$ mit zugehöriger Rotation $d_{min}^{(m,j)} \in P_j^{(m)}$ bestimmt. Anschließend wird $\Delta_{min}^{(m)} = \min\{\Delta_{min}^{(m,j)} | j = 1, \dots, r\}$ gewählt. Die Menge der Minimums-Kandidaten nach Schritt m , erhält man nun als

$$Q^{(m)} = \bigcup_{j=1, \dots, r} \{d_{min}^{(m,j)}\} \quad (4.49)$$

Hierbei gilt stets $\Delta_{min}^{(m)} \leq \Delta_{min}^{(m-1)}$, denn $d_{min}^{(m-1)} \in P_j^{(m)}$ für ein $j \in \{1, \dots, r\}$.

Sind die Abstände zwischen den Rotationen in irgendeiner vorgegebenen Form 'klein', d.h. sind die lokalen Minima entsprechend genau bestimmt, so können Rotationen mit schlechteren Evaluierungswerten eliminiert werden. Dazu setzte man

$$Q^{(m)} = Q^{(m)} \cap \left\{ d \in D_R \mid \left| \frac{\Delta(d) - \Delta_{min}^{(m)}}{\Delta_{min}^{(m)}} \right| \leq \delta_2 \right\} \quad (4.50)$$

für festen $\delta_2 \geq 0$.

Die beschriebene Vorgehensweise ist für $m = 2, 3, \dots$ so lange zu wiederholen, bis eine gewünschte Genauigkeit $t \in \mathbb{R}$ erreicht ist, also bis k Schritte mit Endgenauigkeit $t_k < t$ durchgeführt sind. Das globale Minimum wird dann approximiert durch $d_{min}^{(k,j)}$.

4.2.6 Parameterwahl

Für die Rotationsberechnung durch systematisches Abtasten sind einige Eingabeparameter erforderlich. Diese sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Parameter	Beschreibung	Bedingungen
d_0	Startwert Rotation	$d \in D_R$, nicht notwendig
t_1	Abstände initiale Abtastung	$0 < t_1 \leq \pi$
c_t	Faktor Abstandsverkleinerung	$0 < c_t < 1$
c_g	Gittergröße	$c_g > 1$
t	Zielgenauigkeit	$0 < t \leq t_1$
δ_1	1. Δ -Toleranz	$\delta_1 \geq 0$
δ_2	2. Δ -Toleranz	$\delta_2 \geq 0$
b	Binarisierungs-Parameter	$b \geq 2$

Tabelle 4.1: Parameter der Rotationsberechnung

Insbesondere wenn kein Startwert d_0 eingesetzt wird, ist die Feinheit des ersten Gitters t_1 von großer Bedeutung. So wird durch diesen Abstand die Anzahl der Elemente der ersten Abtastung und damit auch die Anzahl der maximal auffindbaren lokalen Minima bestimmt. Dieser Abstand sollte also auf keinen Fall zu grob gewählt werden. Im Falle der Platine führte beispielsweise die Wahl von $t_1 = 0.445$ zur Konvergenz gegen die gesuchte Rotation, während dies durch die Wahl $t_1 = 0.89$ nicht erreicht wurde. Halbiert man jedoch erstgenannte Schrittweite, so wird die Anzahl der Gitterelemente und damit der Rechenaufwand des ersten Schrittes asymptotisch mit 8 multipliziert. Daher ist auch eine zu kleine Wahl für den Parameter t_1 nicht zielführend, da dies die Rechendauer enorm erhöhen kann.

Die Genauigkeitssteigerung in jedem Schritt wird bestimmt durch die Konstante c_t , d.h. c_t gibt an, wie sich die Abtastungsabstände verkleinern. Der Parameter $c_g > 1$ bestimmt die Anzahl der Gitterelemente jedes neu berechneten Gitters. Durch Multiplikation dieses Parameters mit der aktuellen Gittergenauigkeit t_m erhält man nämlich den maximal zulässigen Abstand der Gitterelemente vom zentralen Gitterelement. Im Falle der Platine wurde $c_t = \frac{2}{3}$ und $c_g = \sqrt{3} + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ 'sehr klein' gewählt. Man beachte, dass der maximale Abstand dann so gewählt ist, dass jede neu berechnete Abtastung $P_j^{(m)}$ ein $3 \times 3 \times 3$ Gitter darstellt und somit genau 27 Elemente enthält. Dadurch werden die Berechnungen jedes einzelnen Schrittes klein und im Allgemeinen können somit überflüssige Berechnungen vermieden werden.

Der Parameter $t > 0$ gibt die gewünschte Zielgenauigkeit an und ist somit sehr klein zu wählen. Die Anzahl der durchzuführenden Schritte n lässt sich berechnen als

$$n = \left\lceil \frac{\log(t) - \log(t_1)}{\log(c_t)} \right\rceil \quad (4.51)$$

Die beiden Parameter für die Δ -Toleranz, δ_1 und δ_2 legen fest, wie stark der Abweichungswert der Minimumskandidaten vom bisher besten gefundenen Δ -Wert abweichen darf. Je größer δ_1 dabei gewählt wird, desto mehr Kandidaten können nach dem ersten Schritt ausgewählt werden. Wird δ_2 kleiner gewählt, so werden diese Kandidaten nach allen weiteren Schritten schneller wieder verworfen. Es kann hierbei sinnvoll sein, δ_2 mit zunehmender Schrittzahl zu verkleinern, da nach mehr Schritten bereits eine größere Genauigkeit und somit eine kleinere Varianz der Δ -Werte der Minimumskandidaten erwartet werden kann. Im hier angeführten Beispiel der Platine wurde gewählt: $\delta_1 = 0.18$, $\delta_2 = 0.2$. Dadurch wurden im ersten Schritt solche Rotationen als Minimum in Betracht gezogen, deren Δ -Wert den bis dahin besten Wert $\Delta_m^{(1)}$ um maximal 18% übersteigen. Nach allen weiteren Schritten werden Kandidaten, die den nunmehr besten Wert um mehr als 20% überschreiten, verworfen.

Der letzte Parameter b , entspricht dem in der Otsu-Binarisierung verwendeten Parameter, der die Gewichtung der zu minimierenden Intra-Klassen-Varianzen festlegt und bereits in Abschnitt 4.2.4 beschrieben wurde.

4.2.7 Projektionsgröße

Über die im letzten Abschnitt bereits aufgezählten Parameter hinausgehend kann die Größe der zu erstellenden Projektionen vom Nutzer gewählt werden und kann somit als weiterer Parameter der Rotationsberechnung angesehen werden. Dabei sinkt die Rechendauer sehr stark, je kleiner die Projektionsgröße gewählt wird. Die Detektorpixelgröße (d.h. die Länge der Detektorvektoren der Geometriedaten) muss entsprechend der Projektionsgröße so angepasst werden, dass die Gesamtgröße des Detektors identisch bleibt.

In der Praxis beträgt die Pixelanzahl des Detektors oft 2048×2048 . Zur Berechnung der Transformation haben sich jedoch 64×64 Pixel als ausreichend erwiesen. Bei entsprechender Wahl muss also die Kantenlänge der Detektorpixel mit 32 multipliziert werden. Die Gesamtzahl der Pixel hingegen wird durch $32 \cdot 32 = 1024$ dividiert und somit enorm verringert. In allen in dieser Arbeit angeführten Beispielen werden Projektionen der Größe 64×64 verwendet.

Unabhängig davon wie die Pixelanzahl der zu erstellenden Projektionen gewählt wird, muss auch stets die Pixelanzahl der Referenzprojektionen entsprechend angepasst werden, um Vergleichbarkeit der binarisierten Pixelwerte zu erreichen. Dazu ist eine Interpolation der Pixelwerte von Nöten, was zu zusätzlichen Diskretisierungsfehlern führt.

4.2.8 Beispiel: Platine

Die Rotationsberechnung soll nun anhand des oben vorgestellten Platinenbeispiels veranschaulicht werden. Die Geometriedaten zu den drei gewählten Projektionen (vgl. Abbildung 4.3) lassen sich der Geometriedatei entnehmen. Man erhält:

#	Quelle [mm]	Detektor [mm]	1. Detektorvektor [mm]	2. Detektorvektor [mm]
1	$\begin{pmatrix} 215.65 \\ 44.39 \\ 107.49 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1300.61 \\ -260.62 \\ -645.08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.094 \\ -0.067 \\ -0.164 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ -0.185 \\ 0.075 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 215.65 \\ 71.37 \\ -14.70 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1300.61 \\ -431.21 \\ 545.99 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.094 \\ -0.109 \\ 0.138 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.157 \\ 0.124 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 215.65 \\ -115.36 \\ -14.70 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1300.61 \\ 689.46 \\ 93.23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.094 \\ 0.175 \\ 0.024 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.027 \\ -0.198 \end{pmatrix}$

Die Angaben entsprechen Koordinaten des euklidischen Raumes in Millimetern.

Erstellt man Projektionen aus dem a priori CT-Volumen ohne eine Transformation auf die Geometriedaten anzuwenden, so erhält man die in Abbildung 4.4 dargestellten Durchstrahlungsbilder. Beispielhaft sind in Abbildung 4.5 die erstellten Projektionen nach Anwendung zweier abgetasteter Transformationen auf die Geometriedaten dargestellt. Hierbei ist sofort offensichtlich, dass die Orientierung des Objektes in diesen bisher erstellten Projektionen sehr stark von der Orientierung des Prüfkörpers in den CLARA-Projektionen abweicht. Dies soll jedoch wie oben beschrieben, mit Hilfe des Abweichungswertes Δ überprüft werden. Dazu werden sowohl die Referenzprojektionen, als auch die erstellten Projektionen trinarisiert und der Bildschwerpunkt ins Projektionszentrum verschoben. Zugehörige Ergebnisse sind in Abbildung 4.6 zu sehen. Der Abweichungswert der dort illustrierten Null-Rotation beträgt 144.86.

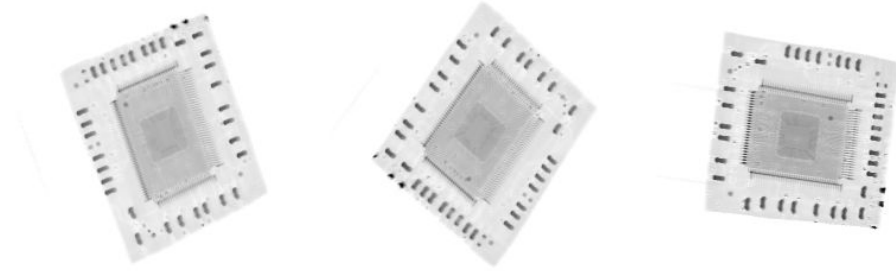


Abbildung 4.4: Erstellte Projektionen der Platine ohne vorherige Anwendung einer Transformation

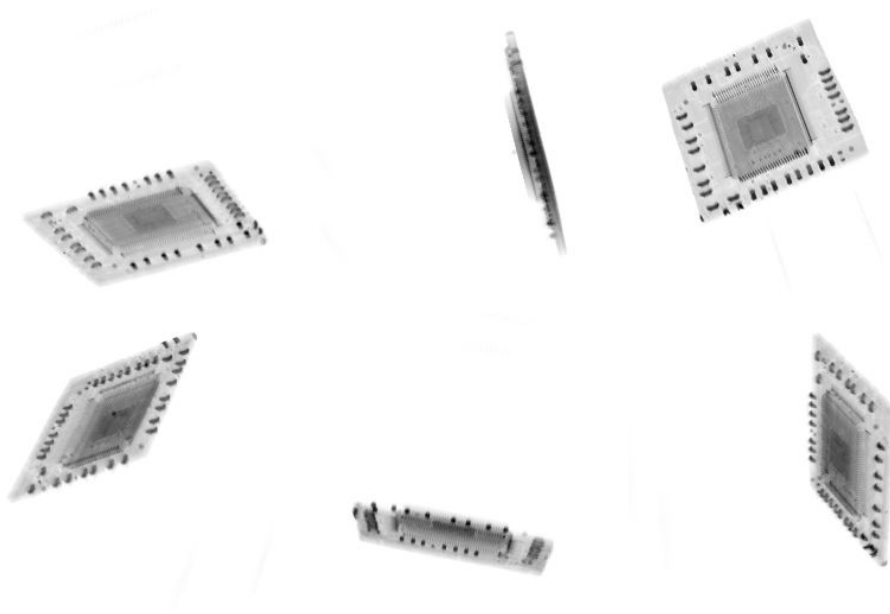


Abbildung 4.5: Erstellte Projektionen der Platine nach vorheriger Anwendung einer Rotation. Oben: Rotation um 90° um $(0.7071, 0, -0.7071)^T$, unten: Rotation um 270° um $(-0.354, 0.612, -0.7071)^T$

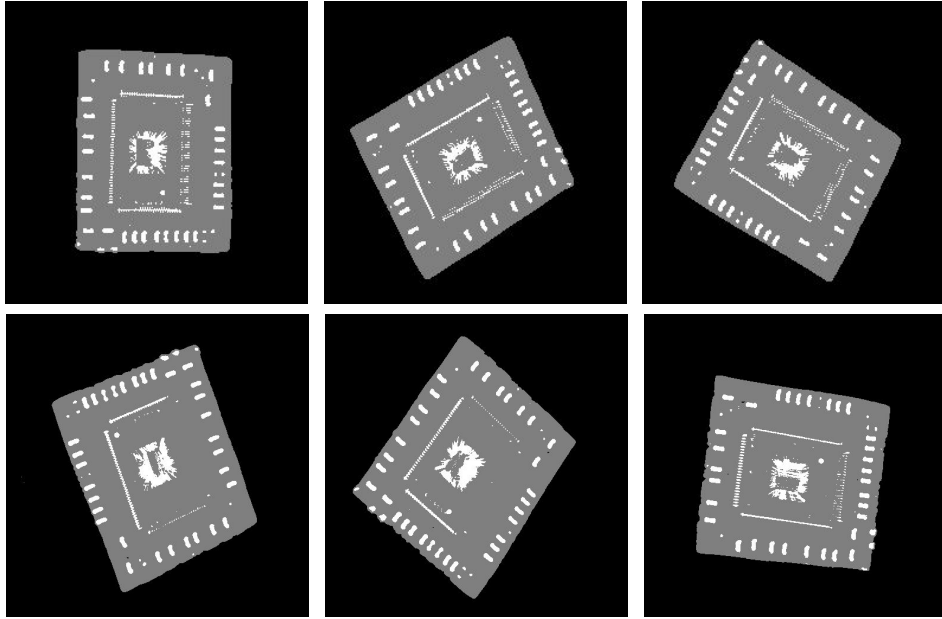


Abbildung 4.6: Trinarisierte und zentrierte Projektionen. Oben: Referenzprojektionen (CLARA-Aufnahme), unten: Erstellte Projektionen (aus a priori Volumen).

Durch iterative Vorgehensweise, wie in Abschnitt 4.2.5 beschrieben, erhält man nach 5 Schritten die Rotation um 205.7° um die Achse $(0.997802, 0, -0.0662625)^T$. Abbildung 4.7 zeigt die zugehörigen Projektionen, zu welchen sich nach Trinarisierung und Verschiebung ein Abweichungswert von 64.37 berechnen lässt. Die Genauigkeit $t \in \mathbb{R}$ bis auf welche dieses Minimum hier bestimmt wurde beträgt 0.142, dieser Wert entspricht der maximalen Distanz (in euklidischer Norm) zwischen der gefundenen Rotation und dem benachbarten lokalen Minimum (globales Minimum). Der berechnete Abweichungswert erscheint auf den ersten Blick noch recht groß, was jedoch vor allem auf Fehler bei der Trinarisierung, die aufgrund der gewählten Trinarisierungsmethode (Quantil als Schwellwert) unumgänglich sind, zurückzuführen ist. So ist der Δ -Wert selbiger Projektionen bei Binarisierung mit 23.03 deutlich kleiner.

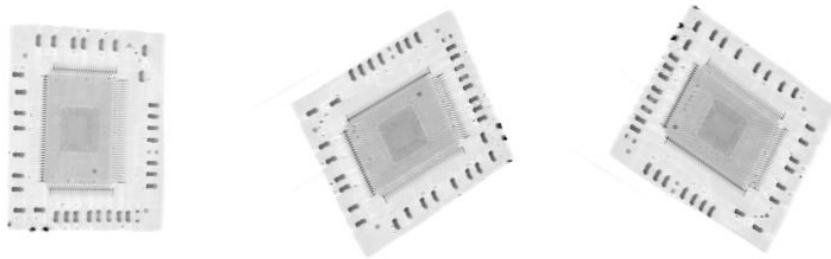


Abbildung 4.7: Erstellte Projektionen zu einer mit Hilfe des beschriebenen Algorithmus nach 4 Schritten gefundenen Rotation. Abweichungswert 64.37.

4.3 Skalierungsberechnung

Nun soll der Skalierungsfaktor, der auf die CLARA-Daten angewendet werden muss, um die Größen beider Objekte zur Übereinstimmung zu bringen, berechnet werden. Man beachte, dass dieser Schritt in der Praxis oft nicht notwendig ist, da die Größe des Objekts im a priori Volumen meist bereits mit der tatsächlichen Objektgröße übereinstimmt.

Bei der Rotationsbestimmung wurde angenommen, dass beide Objekte bereits identisch skaliert sind, da der vorgestellte Algorithmus sonst keine sinnvollen Ergebnisse liefern kann. Ebenso ist es nicht möglich, die Skalierung anhand der vorliegenden Projektionen hinreichend genau zu bestimmen, wenn die Orientierungen der Objekte nicht zumindest annähernd übereinstimmen, d.h. wenn die Rotation noch nicht bekannt ist. Die Rotations- und Skalierungsberechnungen sind also stark voneinander abhängig und können nicht unabhängig voneinander ausgeführt werden. Daher wird hier eine alternierende Vorgehensweise gewählt: Rotation und Skalierung werden im Wechsel berechnet bzw. verfeinert bis beide Komponenten der Transformation hinreichend genau bestimmt sind. Weicht die Skalierung beider Objekte sehr stark voneinander ab, so ist eine initiale, manuelle Eingabe eines groben Skalierungsfaktors sinnvoll.

Das Vorgehen in jedem Schritt der Skalierungsberechnung beruht dabei auf folgender Überlegung: Ist die Rotation bereits bekannt, liegen also Projektionen beider Objekte in identischer Orientierung vor, so kann der gesuchte Skalierungsfaktor sehr einfach bestimmt werden: Dazu werden die Projektionen wie oben beschrieben bi-/trinarisiert und z.B. eine der folgenden Eigenschaften eines Projektionspaares (CLARA-Projektion und erstellte Projektion, identisch orientiert) zueinander in Relation gesetzt

- Längen der Objekte in einer Richtung (z.B. x- oder y-Richtung)
- Flächen der Objekte

Die Fläche des Objektes kann dabei simpel durch Zählen aller Objektpixel und Multiplikation mit der Fläche eines Voxels berechnet werden. Gibt F_1 die Objektfläche in den erstellten Projektionen und F_2 die Fläche des Objektes in den Referenzprojektionen an, so berechnet sich der Skalierungsfaktor $f_s \in \mathbb{R}$ als

$$f_s = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \quad (4.52)$$

Die Umsetzung der Skalierung erfolgt durch Division der Voxelgröße des a priori Volumens durch diesen Faktor f_s . Ob mit binarisierten oder trinarisierten Projektionen gearbeitet wird spielt dabei keine Rolle.

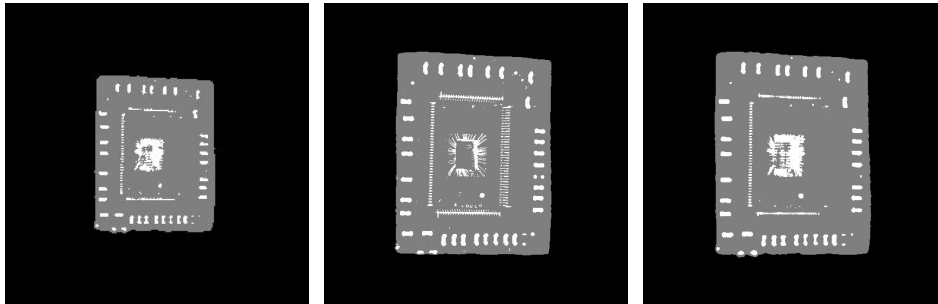


Abbildung 4.8: Links: erstellte Projektion des reskalierten a priori Volumens, mitte: CLARA-Projektion, rechts: erstellte Projektion nach Anwendung des berechneten Skalierungsfaktors.

Dies ist illustriert anhand des Platinenbeispiels in Abbildung 4.8. Dazu wurde zunächst bei identischer Skalierung die gesuchte Transformation so genau wie möglich berechnet (wie in Abschnitt 4.5 beschrieben). Anschließend wurde das a priori Volumen zu Testzwecken mit dem Faktor 0.8 skaliert (und neu interpoliert). Das soeben beschriebene Vorgehen lieferte dabei einen approximierten Skalierungsfaktor von 0.7994 gegenüber der Ausgangstransformation, also eine Abweichung von lediglich etwa 0.08%. Eine weitergehende Genauigkeitsuntersuchung des Algorithmus zur Skalierungsberechnung findet sich in Abschnitt 6.2.

Sind die Objekte nicht identisch orientiert, so kann die genannte Vorgehensweise auch deutlich abweichende Ergebnisse liefern. Dieser Fall tritt insbesondere auf, wenn ein planares Objekt in einer Projektion frontal und in der anderen seitlich betrachtet wird. Um die Gefahr solcher 'Ausreißer' zu minimieren, wird in jedem Schritt der Skalierungsberechnung daher nicht nur ein Projektionenpaar, sondern alle drei Paare herangezogen und ein Durchschnitt gebildet.

Das Maß Δ , welches im Rahmen der Rotationsberechnung vorgestellt wurde, kann hierbei weiterhin verwendet werden und liefert ohne weitere Anpassung ein gemeinsames Maß für die Übereinstimmung von Rotation und Translation beim Vergleich nicht zentrierter Projektionenpaare.

Bei der alternierenden Rotations-/Skalierungsberechnung wird wie folgt vorgegangen: Optional kann zu Beginn $d_{min}^0 := (\theta_0, \varphi_0, 0) \in D_R$ (Identitätsrotation) gesetzt werden und der Skalierungsfaktor approximiert werden. Dies macht jedoch nur dann Sinn, wenn die Skalierungen sehr stark voneinander abweichen, da hier keine Ähnlichkeit der Orientierungen angenommen werden kann und der berechnete Skalierungsfaktor somit nur eine sehr grobe Approximation darstellt. Für $m = 1, 2, \dots$ wird nun in der m -ten Iteration zunächst ein Schritt der Rotationsberechnung, wie in Abschnitt 4.2.5 beschrieben, durchgeführt und damit die bisher am Besten evaluierte Rotation d_{min}^m bestimmt. Approximiere dann die Skalierung durch Vergleich der Projektionsflächen in CLARA-Projektionen und den zur Rotation d_{min}^m erstellten Projektionen. Wende die approximierte Skalierung auf das a priori Volumen an, die Kandidatenmengen $Q^{(m)}$ bleiben hierbei gegebenenfalls gleich. Wie im vorangegangenen Kapitel beschrieben wird die Skalierung dabei umgesetzt, indem die Voxelgröße des a priori Volumens durch den Skalierungsfaktor dividiert wird.

4.4 Translationsberechnung

Zuletzt soll die Translation bestimmt werden. Hierbei wird angenommen, dass Rotation und Skalierung bereits bestimmt wurden und somit Projektionspaare vorhanden sind, in denen Größe und Orientierung der Objekte übereinstimmen. Bei diesen Projektionspaaren handelt es sich um die drei CLARA-Projektionen, sowie drei simulierte Projektionen, zu deren Erstellung das reskalierte a priori Volumen und die modifizierten Geometriedaten verwendet wurden. In der Berechnung dieser beiden Transformationskomponenten wurde die unbekannte Translation durch Verschiebung der Bildschwerpunkte ausgeglichen.

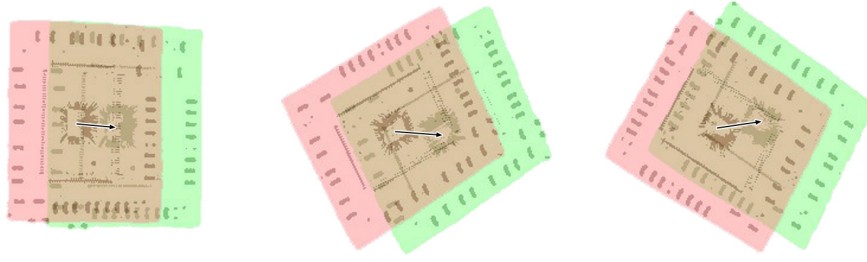


Abbildung 4.9: Übereinander gelegte Projektionenpaare, die 2-D Translationsvektoren (x_i, y_i) sind jeweils als schwarzer Pfeil eingezeichnet. Grün: Laminographie-Projektionen, Rot: Erstellte Projektion aus a priori Volumen

Um nun die 3-D Translation zwischen den Objekten im Raum zu bestimmen werden erneut die Bildschwerpunkte

$$(x_i^{(k)}, y_i^{(k)})^T, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3$$

und damit die 2-D Translation auf dem Detektor

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

in allen drei Projektionspaaren berechnet, siehe dazu Abbildung 4.9. Man beachte, dass es hierbei unerheblich ist, ob die Projektionen in binarisierter oder trinarisierter Form vorliegen. Aus diesen Translationen lässt sich mit Hilfe der Geometriedatei jeweils die zugehörige 3-D Translation im Raum t^i , $i = 1, 2, 3$ bestimmen:

$$t^i = x_i \cdot p_i^h h_i + y_i \cdot p_i^v, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.53)$$

Dabei bezeichnen p_i^h und p_i^v die Detektor aufspannenden Vektoren der zu den Projektionen gehörenden Geometriedaten.

Es ist zu beachten, dass die Translation eines Punktes in Durchstrahlungsrichtung nicht auf dem Detektor erfasst werden kann. Daher gibt t^i jeweils nur die Projektion der 3-D Translation t in Strahlenrichtung auf den Detektor an. Das heißt t^i enthält nur den zur Strahlenrichtung orthogonalen Anteil von t . Die Durchstrahlungsrichtung des Translationsendpunktes ist dabei jeweils gegeben durch

$$s^i = d^i + (x_i^{(2)} \cdot p_i^h + y_i^{(2)} \cdot p_i^v) - q^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.54)$$

wobei mit d^i und q^i die Position von Quelle und Detektor bezeichnet werden, die ebenfalls den Geometriedaten entnommen werden können.

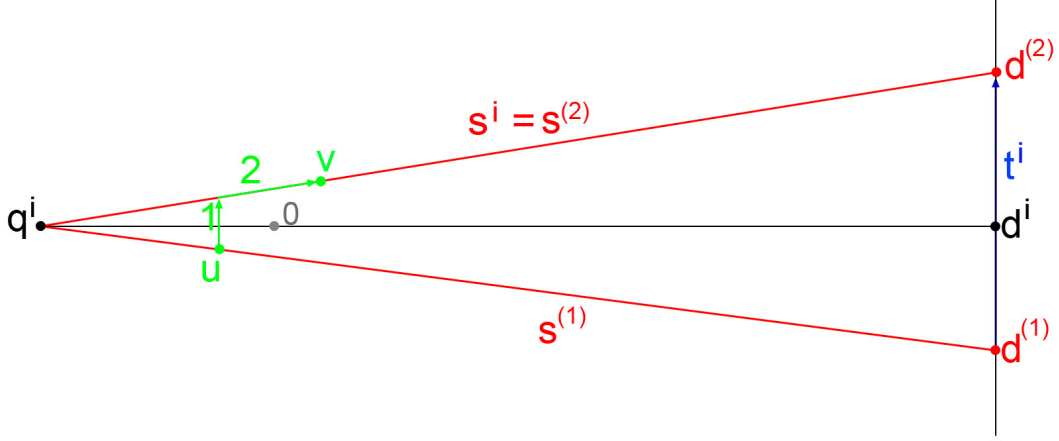


Abbildung 4.10: Skizze zur Illustration der Translationsberechnung, 2-D

Anhand von Abbildung 4.10 soll erklärt werden, wie die Translation t nun also aus dem Vektor t^i bestimmt werden soll. In der Abbildung ist ein zweidimensionaler Querschnitt der Anlage zu sehen: Quelle q^i , Detektorzentrum d^i , sowie, in Rot, die beiden Bildschwerpunkte auf dem Detektor $d^{(1)}$ und $d^{(2)}$ (mit $d^{(k)} = x_i^{(k)} \cdot p_h^i + y_i^{(k)} \cdot p_v^i$). Die beiden grünen Punkte u , v kennzeichnen die unbekannten Objektschwerpunkte im Raum. Es soll also der Verschiebungsvektor $v - u = t$ bestimmt werden ohne die Koordinaten der Punkte u und v zu kennen. Dies erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird ein Vektor bestimmt, der u auf die Gerade $s^i = s^{(2)}$, also den Strahl durch v mit Endpunkt $d^{(2)}$, translatiert. Dieser Vektor ist in der Skizze mit einer grünen 1 gekennzeichnet. Er ist stets kollinear zu t^i und kann somit bestimmt werden, indem man t^i durch den Vergrößerungsfaktor an Position u dividiert. Da dieser Faktor aufgrund der unbekannten Objektposition u nicht exakt bestimmt werden kann, wird hier der allgemeine Vergrößerungsfaktor des Anlagenaufbaus f , also die tatsächliche Vergrößerung im Ursprung, eingesetzt (siehe dazu auch Abschnitt 6.1). Anschließend muss eine Verschiebung unbekannter Länge in Durchstrahlungsrichtung, also entlang der Geraden s^i , erfolgen, um zum Zielpunkt v zu gelangen. Diese Verschiebung entspricht dem mit einer grünen 2 versehenen Vektor in der Abbildung.

Somit ergeben sich folgende Gleichungen für die unbekannte Translation $t \in \mathbb{R}^3$:

$$t = \frac{1}{f} \cdot t^i + \lambda_i \cdot s^i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.55)$$

Dabei bezeichnet f den Vergrößerungsfaktor des Objektes auf dem Detektor, der gegeben ist durch das Verhältnis der Strecken zwischen Quelle und Detektorzentrum und zwischen Quelle und dem im Ursprung positionierten Objekt.

$$f = \frac{\|d^i - q^i\|}{\|q^i\|} \quad (4.56)$$

Diese Streckenlängen sind charakteristisch für die Anlagengeometrie und somit nicht von den einzelnen Rotationszuständen der Anlage, d.h. nicht von i abhängig.

Die Translation lässt sich nun mit Hilfe der Gleichungen (4.55) bestimmen durch Lösen des Opti-

mierungsproblems

$$t = \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}^3} \min_{\lambda \in \mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \left\| \left(\frac{1}{f} \cdot t^i + \lambda_i \cdot s^i \right) - t \right\|_2^2}_{=: \Theta(t, \lambda)} \quad (4.57)$$

Dazu wird zunächst die zugehörige Optimalitätsbedingung $\nabla \Theta(t, \lambda) = 0$ aufgestellt. Für $k = 1, 2, 3$ lauten die partiellen Ableitungen von Θ :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t_k}(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (t_j^i + \lambda_i s_j^i - t_j)^2 \quad (4.58)$$

$$= \sum_{i=1}^3 2 \cdot (t_k^i + \lambda_i s_k^i - t_k) \cdot (-1) \quad (4.59)$$

$$= 6 \cdot t_k - 2 \cdot \sum_{i=1}^3 (t_k^i + \lambda_i s_k^i) \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_k}(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (t_j^i + \lambda_i s_j^i - t_j)^2 \quad (4.61)$$

$$= \sum_{j=1}^3 2 \cdot (t_j^k + \lambda_k s_j^k - t_j) \cdot s_j^k \quad (4.62)$$

$$= 2 \cdot \|s^k\|_2^2 \cdot \lambda_k + 2 \cdot \sum_{j=1}^3 s_j^k (t_j^k - t_j) \quad (4.63)$$

Damit lässt sich $\nabla \Theta(t, \lambda) = 0$ schreiben als

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}v_1^1 & \frac{1}{3}v_1^2 & \frac{1}{3}v_1^3 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}v_2^1 & \frac{1}{3}v_2^2 & \frac{1}{3}v_2^3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3}v_3^1 & \frac{1}{3}v_3^2 & \frac{1}{3}v_3^3 & 0 & 0 & 1 \\ \|s^1\|_2^2 & 0 & 0 & -s_1^1 & -s_2^1 & -s_3^1 \\ 0 & \|s^2\|_2^2 & 0 & -s_1^2 & -s_2^2 & -s_3^2 \\ 0 & 0 & \|s^3\|_2^2 & -s_1^3 & -s_2^3 & -s_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 t_1^i \\ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 t_2^i \\ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 t_3^i \\ - \sum_{j=1}^3 v_j^1 \cdot t_j^1 \\ - \sum_{j=1}^3 v_j^2 \cdot t_j^2 \\ - \sum_{j=1}^3 v_j^3 \cdot t_j^3 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Da $\Theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ konvex ist, entspricht die zweite Komponente der Lösung dieses linearen Gleichungssystems der Lösung des Optimierungsproblems (4.57).

Ebenso wie die Skalierungsberechnung, ist auch die Translationsberechnung parameterfrei und somit nicht anfällig für Bedienungsfehler.

4.5 Abstiegsverfahren in der Rotationsberechnung

In diesem Abschnitt soll eine Möglichkeit zur Anpassung des oben vorgestellten Algorithmus besprochen werden: Die Einbindung eines Optimierungsverfahrens in den Vorgang der Rotationsberechnung.

Bei der Rotationsberechnung gilt es ein nicht konvexes, nicht lineares Optimierungsproblem zu lösen:

$$\min_{d \in D_R} \|\Delta(d)\|_2 \quad (4.65)$$

Im oben vorgestellten Algorithmus nähert man sich der Lösung dieses Problems durch systematisches Ausprobieren an, was aufgrund des beschränkten Parameterraumes D_R möglich ist. Oft kann eine solche Aufgabe durch Anwendung eines geeigneten Optimierungsverfahrens, wie zum Beispiel ein gradientenbasiertes Abstiegsverfahren, gelöst werden. Dies erweist sich jedoch als schwierig, da das Problem (4.65) nicht konvex ist. Dennoch kann ein solches Verfahren, wie sie zum Beispiel im Buch von Jarre und Stoer [11] umfangreich erläutert werden, bei geeigneten Startpunkten zumindest zur Berechnung benachbarter, lokaler Minima verwendet werden.

4.5.1 Verfahren

Im Folgenden wird ein in der Rotationsberechnung anwendbares Optimierungsverfahren beschrieben. Es handelt sich hierbei um ein einfaches gradientenbasiertes Abstiegsverfahren mit nicht exakter 'line search'. Die Abstiegsrichtungen werden dabei numerisch, durch finite Differenzen berechnet, siehe dazu auch [20], Abschnitt 3.1.6. Ausgehend von einem Startpunkt $s_0 = (\theta_0, \varphi_0, \alpha_0) \in D_R$ wird in jedem Schritt zunächst der Gradient der Evaluationsfunktion Δ approximiert:

$$\nabla \Delta(s_0) \approx \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} \Delta(\theta_0 + h, \varphi_0, \alpha_0) - \Delta(\theta_0 - h, \varphi_0, \alpha_0) \\ \Delta(\theta_0, \varphi_0 + h, \alpha_0) - \Delta(\theta_0, \varphi_0 - h, \alpha_0) \\ \Delta(\theta_0, \varphi_0, \alpha_0 + h) - \Delta(\theta_0, \varphi_0, \alpha_0 - h) \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

$$=: g(s_0) \quad (4.67)$$

Der hier angewendete zentrale Differenzenquotient entspricht einer Durchschnittsbildung über Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen, bei denen jeweils die Differenz des Funktionswertes an einer Stelle $x \pm h$ mit dem Funktionswert an der Ausgangsposition x durch die einfache Schrittweite h dividiert wird. (D.h. $\nabla f(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bzw. $\nabla f(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$.)

Ist $\|g(s_0)\|_2 \neq 0$, so wird in der berechneten Richtung $g(s_0)$ anschließend nach einem Punkt

$$s := s_0 + \lambda \cdot g(s_0), \quad 0 < \lambda < \lambda_{max} \quad (4.68)$$

gesucht mit

$$\Delta(s) < \Delta(s_0) \quad (4.69)$$

Ein solcher Punkt s existiert für beliebige $\lambda_{max} > 0$, falls g tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist. Dies entspricht einer nicht exakten 'line search'. Hier auch denkbar, jedoch deutlich rechenaufwändiger wäre die Durchführung einer exakten 'line search', das bedeutet der nächste Punkt $s \in \mathbb{R}^3$ wird gewählt als $s := s_0 + \lambda \cdot g(s_0)$ mit

$$\lambda := \operatorname{argmin}_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\Delta((\theta_0, \varphi_0, \alpha_0) + \lambda \cdot g(s_0))\}$$

Ausgehend von diesem neuen Punkt s mit niedrigerem Zielwert $\Delta(s)$ wird nun ein weiterer Schritt des eben beschriebenen Verfahrens durchgeführt, man setzt also $s_0 = s$. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt bis eine Abbruchbedingung erfüllt ist. Als solche Bedingung ist zum Beispiel eine untere Schwelle für die Norm der gefundenen Abstiegsrichtung oder für die Schrittweite λ einsetzbar. In der Praxis sollte als zusätzliches Abbruchkriterium die Anzahl der Funktionsauswertungen oder der Iterationen beschränkt werden.

4.5.2 Einsatz des Abstiegsverfahrens

Zunächst ist anzumerken, dass die Berechnung der Abstiegsrichtungen in Gleichung (4.66) sehr rechenintensiv ist, da hierzu die Evaluationsfunktion Δ an 6 verschiedenen Punkten ausgewertet werden muss. Es müssen also für 6 verschiedene Rotationen jeweils 3 Projektionen erstellt und mit den Referenzprojektionen verglichen werden.

Weiterhin sind die Resultate dieser Berechnung sehr stark von der gewählten Schrittweite $h > 0$ abhängig. Wird h zu klein gewählt, so kommt es zur Divergenz der Werte aufgrund der Division durch $h \approx 0$, wird h andererseits zu groß gewählt, so sind die Ergebnisse (insbesondere bei stark variierenden Funktionen wie z.B. Δ) aufgrund der zunehmenden Abweichung der Definition von Ableitungen unzuverlässig. Darüber hinaus zeigt die Praxis, dass der Winkel zwischen den durch Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen approximierten Gradienten sehr groß wird und oft sogar 90° übersteigt. Dies ist damit zu begründen, dass die Zielfunktion aufgrund der Vielzahl von Fehlerquellen in der Praxis nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar ist. In solchen Fällen ist die aus den Berechnungen resultierende Richtung oft keine Abstiegsrichtung, wodurch eine Neuberechnung der Abstiegsrichtung mit unterschiedlicher Schrittweite erforderlich wird.

Aufgrund der eben angesprochen Rechenintensität und der unbeschränkten, unbekannten Anzahl globaler Minima, kann die Rotationsbestimmung nicht allein durch ein Abstiegsverfahren erfolgen. Wie die Praxis zeigt, kann das vorgestellte Verfahren jedoch trotz aller auftretenden Schwierigkeiten genutzt werden, um benachbarte Minima zu bestimmen. Hier ist es also insbesondere einsetzbar, um eine weitere Annäherung an das durch 'systematisches Ausprobieren' approximierte globale Minimum zu erreichen. Auch die manuelle Wahl eines Startwertes und der Größe des Suchraumes ist denkbar, sollten dazu geeignete Werte bereits bekannt sein.

Das Gradientenverfahren wird also angewendet ausgehend von einem Startwert s_0 , dessen Distanz zum gesuchten Minimum maximal $d \in \mathbb{R}$ beträgt. Diese Distanz entspricht der maximalen Schrittweite λ_{max} . Beginnend mit $h \in (0, \lambda_{max})$ und $\lambda = \lambda_{max}$ wird nun zunächst durch systematisches Verkleinern der Schrittweite λ eine besser evaluierte Rotation gesucht. Dabei sind die Verkleinerungsschritte größer, je stärker der jeweilige Evaluationswert vom Referenzwert $\Delta(s_0)$ abweicht. Sollte in der zuvor bestimmten Suchrichtung keine solche Rotation gefunden werden (handelt es sich also nicht um eine Abstiegsrichtung), so wird für kleineres $h \in (0, \lambda_{max})$ eine alternative Suchrichtung bestimmt.

Da das beschriebene Abstiegsverfahren im Rahmen der Rotationsberechnung nur verwendet werden kann, um Konvergenz in ein benachbartes lokales Minimum zu bewirken, kann hier ebenfalls auf eine Trinarisierung der Daten verzichtet werden. Die Δ -Werte können gleichwertig anhand von binarisierten Projektionen berechnet und optimiert werden.

Im Falle des Platinenbeispiels gelingt es dem Verfahren binnen weniger Schritte in einigen Minuten das oben approximierte globale Minimum so zu verfeinern, dass sich der Δ -Wert der Trinarisierungen von 64.37 auf 36.13 verbessert. Dabei wurde $\lambda_{max} = 0.1$ gesetzt. (Nutzt man binarisierte Projektionen so beträgt der Δ -Wert 11.56.) Die Transformation lautet:

$$\begin{aligned} \text{Rotationsachse: } & (0.999985, -0.004382, 0.003186,)^T \\ \text{Rotationswinkel: } & 3.54734 \\ \text{Skalierungsfaktor: } & 0.95 \\ \text{Translation: } & (-0.12811, 0.051897, -0.060278)^T \end{aligned}$$

Trotz der gelungenen Verbesserung und vermeintlicher Erfolge durch das Gradientenverfahren, ist der Einsatz dieses Optimierungsverfahrens weiterhin kritisch zu betrachten. So wurde oben bereits erwähnt, dass die berechneten Suchrichtungen häufig keine Abstiegsrichtungen sind und oftmals eine mehrfache Neuberechnung erforderlich ist. Daher bleibt zu überprüfen, ob nicht sogar bessere oder zumindest innerhalb kürzerer Rechenzeit gleichwertige Ergebnisse erzielt werden können durch randomisierte Auswahl der Suchrichtungen. Dabei können entweder systematisch und vollkommen zufällig

3-D Suchrichtungen gewählt und jeweils eine line search in entsprechender Richtung durchgeführt werden, bis eine Verbesserung des Evaluationswertes erreicht wird, also die nächste Iterierte gefunden ist. Dies hat den Vorteil, dass keinerlei rechenaufwändige Auswertungen der Evaluationsfunktion zur Approximation eines Gradienten von Nöten sind und großer Rechenaufwand eingespart werden kann. Wie tauglich ein solches randomisiertes Abstiegsverfahren für die hier vorliegende Anwendung ist kann im Rahmen dieser Arbeit aus Zeitgründen jedoch nicht weiter untersucht werden und bleibt daher offen.

Kapitel 5

Spezialfälle und Beispiele

5.1 Vergleich zur Voruntersuchung: Skischuhschnalle

Es wird nun erneut das in Kapitel 3 herangezogene Beispiel der Skischuhschnalle betrachtet und die Ergebnisse des im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Algorithmus mit den Ergebnissen der Voruntersuchung, d.h. der Registrierung anhand der Kugelpositionen, verglichen. Dazu werden die benötigten Parameter wie folgt gewählt:

Parameter	Wert
t_1	$\frac{\pi}{5} = 0.62832$
c_t	0.75
c_g	$\sqrt{3} + 10^{-5} = 1.7321$
t	$(\frac{3}{4})^4 \cdot \frac{\pi}{5} = 0.1988$
b	2.2

Tabelle 5.1: Parameterwahl im Beispiel: Skischuhschnalle

Die angegebene Parameterwahl führt zu einer initialen Abtastung bestehend aus 154 Elementen, jede weitere Abtastung hat aufgrund der Wahl von c_g genau 9 Elemente. Bedingt durch die Wahl von c_t und Zielgenauigkeit t werden insgesamt 5 Schritte durchgeführt, es müssen also insgesamt $154 + 4 \cdot (9 - 1) = 186$ Rotationen evaluiert werden. Hierbei wurden die Projektionen zur Transformationsberechnung trinarisiert.

Anschließend wird eine Verfeinerung der Rotation mit Hilfe des Abstiegsverfahrens aus Abschnitt 4.5 bestimmt. In diesem Schritt wird mit binarisierten Projektionen gearbeitet. Die letztlich gefundene Transformation hat einen Abweichungswert von 9.52148 und ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{Rotationsachse: } & (0.9299, 0.1770, -0.3222)^T \\ \text{Rotationswinkel: } & 1.5975 \\ \text{Skalierungsfaktor: } & 1.015 \\ \text{Translation: } & (-1.85394, -0.40868, 1.25057)^T \end{aligned}$$

Diese Transformation soll nun mit der, die in Abschnitt 3.4 bei identischer Problemstellung mit Hilfe von Kugelpositionen berechnet wurde, verglichen werden. Die normierte Differenz der Rotationen

beträgt

$$\sqrt{\left\| \begin{pmatrix} 0.9299 \\ 0.1770 \\ -0.3222 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.9371 \\ 0.1697 \\ -0.3051 \end{pmatrix} \right\|_2^2 + (1.5975 - 1.5853)^2} = 0.023375$$

Der exakte Skalierungsfaktor beträgt 1.0, der berechnete Wert enthält also einen Fehler von 1,5%. Dieser Fehler ist in erster Linie mit kleinen Abweichungen der Binarisierungen zu begründen.

Die Abweichung der Translation in cm lässt sich berechnen als

$$\left\| \begin{pmatrix} -1.8539 \\ -0.4087 \\ 1.2506 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.8667 \\ -0.4672 \\ 1.2676 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = 0.06225$$

Die Abweichungen der gefundenen Transformationen ist also in allen drei Komponenten eher gering und kann vollständig auf die in Abschnitt 6.3 erläuterten Fehlerquellen zurückgeführt werden.

5.2 Binäre a priori Daten

In der Praxis liegen die gegebenen a priori Informationen oftmals in binärer Form vor, d.h. das Volumen enthält nur Information über Größe und Form des Objektes, nicht jedoch über die Dichteverteilung des Materials. Der im vorangegangenen Kapitel vorgestellte Algorithmus ist auch für diesen Fall geeignet, dennoch müssen einige Besonderheiten beachtet werden. Zum Einen ist im Allgemeinen eine Einschränkung des Rotationsraumes D_R bzw. die Vorgabe eines geeigneten Startwertes $d_0 \in D_R$ erforderlich, der die Konvergenz in das globale Minimum (und nicht in eines der lokalen Minima) bewirkt. Wird kein Startwert vorgegeben, so kann das Ergebnis der Rotationsberechnung sehr stark von der speziellen Wahl der Anfangsgenauigkeit t_1 und damit von den Elementen des initialen Abtastgitters abhängen. Dies ist mit der erhöhten Anzahl lokaler und ggf. auch globaler Minima aufgrund der eingeschränkten Informationen über das a priori Volumen zu begründen. Wird ein geeigneter Startwert gewählt, so kann die Rotationsbestimmung auch ausschließlich durch das in Abschnitt 4.5 vorgestellte Optimierungsverfahren erfolgen. Es ist jedoch von der Exaktheit des Startwertes abhängig, ob dies im Hinblick auf die Rechengeschwindigkeit sinnvoll ist oder nicht. Ermöglicht der Startwert zwar eine Konvergenz, liegt dem globalen Minimum jedoch nicht 'hinreichend nahe', so kann es sinnvoll sein, zunächst einige Iterationen des Algorithmus aus Abschnitt 4.2 durchzuführen, um eine schnelle Annäherung zu erreichen. Selbiges Vorgehen ist zu wählen, wenn die Berechnung eines Skalierungsfaktors notwendig ist.

Ebenso ist eine Trinarisierung der Projektionen, wie in Abschnitt 4.2.4 vorgestellt, im Falle binärer a priori Daten nicht sinnvoll möglich (da die Dichteverteilung des Objektes nicht gegeben ist und die Intensitäten der erstellten Projektionen allein auf Durchstrahlungslängen beruhen).

Um einen direkten Vergleich zu den Ergebnissen zwischen der Verwendung binärer und nicht binärer a priori Daten ziehen zu können wird im Folgenden erneut das Platinenbeispiel aus Kapitel 4 betrachtet. Dabei wird eine binarisierte Version der CT-Rekonstruktion als a priori Volumen herangezogen.

Als Startwert wurde eine dem globalen Minimum nahe liegende Rotation verwendet:

$$d_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right) \quad (5.1)$$

Dies entspricht einer Rotation um 180° um die Achse $(1, 0, 0)^T$.

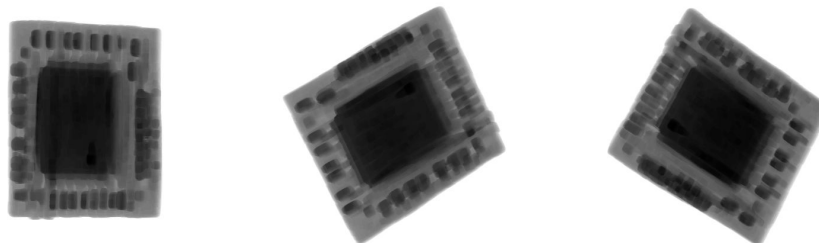


Abbildung 5.1: Zur berechneten Transformation erstellte Projektionen der Platine aus dem binären a priori Volumen.

Der Algorithmus liefert dann, unter Einsatz der Abstiegsmethode zur Rotationsberechnung, die

Transformation

Rotationsachse: $(0.999922, -0.005719, 0.011104)^T$

Rotationswinkel: 3.551

Skalierungsfaktor: 1.03

Translation: $(-0.25343, 0.08179, -0.04723)^T$

Die zugehörigen Projektionen sind in Abbildung 5.1 abgebildet und führen nach Binarisierung zu einem Δ -Wert von 8.38.

Man sieht, dass sich die berechnete Transformation bei Einsatz eines binären a priori Volumens nur sehr wenig von der zuvor berechneten Transformation (Kapitel 4) unterscheidet. Die Daten können also auch im Falle binärer a priori Daten mit Hilfe des vorgestellten Algorithmus erfolgreich registriert werden. Dies ist, wie bereits beschrieben, jedoch nur möglich bei Wahl eines geeigneten Startwertes.

Kapitel 6

Weitere Untersuchungen

6.1 Genauigkeit der Translationsberechnung

Der in Abschnitt 4.4 vorgestellte Algorithmus zur Translationsberechnung ist nur annähernd exakt. Nimmt man optimale Daten an, so können kleine Schwankungen dadurch entstehen, dass der Vergrößerungsfaktor des Objektes je nach Objektposition im Raum und auf dem Detektor leicht variiert. Dies ist damit zu begründen, dass der tatsächliche Abstand zwischen Quelle und Objekt mit Position des Objektes innerhalb des Volumens variiert und auch die Abstände zwischen Quelle und verschiedenen Detektorpixeln leicht voneinander abweichen. So werden im Allgemeinen Komponenten des Objektes welche sich näher an der Quelle befinden stärker vergrößert, als solche, die sich weiter weg befinden. Diese Faktoren werden im vorgestellten Algorithmus nicht beachtet, da die vorliegenden Informationen dazu nicht ausreichen. So basiert die vorgestellte Translationsberechnung auf den Bildschwerpunkten der Projektionen, einer 2-D Information. Um einen exakten Vergrößerungsfaktor zu berechnen, sind jedoch die 3-D Koordinaten zweier korrespondierender Punkte im Raum erforderlich. Diese Information kann den zur Berechnung herangezogenen 2-D Projektionen nicht entnommen werden.

Wie man aus Gleichung (4.55) schließen kann, kann es dadurch zu leichten Abweichungen in der Berechnung der Translation kommen. Dass der Einfluss dieses Fehlers bei nicht allzu großer Translation und typischem Anlagenaufbau dennoch sehr gering ausfällt, zeigt die folgende Untersuchung.

Praxisuntersuchung

Zu dieser Untersuchung wurden Laminographie-Messungen mit Hilfe des Programms *Scorpius XLab*[®] simuliert, welches in der Lage ist CT- und CL-Messungen unter Berücksichtigung physikalischer Aspekte, wie zum Beispiel polychromatischer Strahlung und Streustrahlung, durchzuführen und somit dem im Registrierungsalgorithmus eingesetzten Projection Maker überlegen ist. Der Prüfkörper wird hierbei nicht in Form eines Volumens eingesetzt, sondern kann vom Benutzer modular aufgebaut werden. Eine detailliertere Beschreibung des Programms findet sich in [7].

Das zu prüfende Objekt stellt hier eine einzige Kugel mit 1 mm Durchmesser dar. Es wurden bei fester Geometrie verschiedene Messungen, bestehend aus jeweils nur 3 Projektionen durchgeführt, wobei die Kugel dabei jeweils um einen gewissen Vektor im Raum verschoben wurde. Die Projektionen wurden anschließend binarisiert und in verschiedenen Konstellationen in den Algorithmus zur Berechnung der Translation eingesetzt. Tabelle 6.1 zeigt die zugehörigen Resultate.

Dabei enthalten die ersten beiden Spalten die Position der Kugel im Raum (in cm) im ersten bzw. zweiten eingesetzten Set von 3 Projektionen. Die tatsächliche Translation erhält man also durch Subtraktion der beiden 3-D Positionsvektoren aus diesen beiden Spalten. Die Ergebnisse der Berechnung

	Position 1 [cm]	Position 2 [cm]	Berechnete Translation [cm]	Abweichung ($\ \cdot\ _2$)
1	$(0, 0, 0)^T$	$(0.1, 0, 0)^T$	$(0.099259, 0, 0)^T$	0.0007
2	$(0, 0, 0)^T$	$(0, 0.1, 0)^T$	$(0.0014287, 0.100197, 0.000006)^T$	0.0014
3	$(0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 0.1)^T$	$(-0.000138, 0.000040, 0.09933)^T$	0.0007
4	$(0, 0, 0)^T$	$(0, 0.5, 0)^T$	$(-0.001943, 0.500442, 0.000032)^T$	0.002
5	$(0, 0, 0)^T$	$(1, 0, 0)^T$	$(0.99838, 0.000001, 0)^T$	0.0016
6	$(0, 0, 0)^T$	$(0, 1, 0)^T$	$(0.001739, 1.00138, 0.000066)^T$	0.0022
7	$(0, 0, 0)^T$	$(0, 0, 1)^T$	$(0.000026, -0.000909, 0.999317)^T$	0.0011
8	$(0, 0, 0)^T$	$(1, 1, 0)^T$	$(1.00065, 0.999838, 0.000064)^T$	0.0007
9	$(0, 0, 0)^T$	$(1, 1, 1)^T$	$(1.00046, 1.00081, 0.999856)^T$	0.0009
10	$(0, 1, 0)^T$	$(0, 2, 0)^T$	$(0.009977, 1.00606, 0.000070)^T$	0.0117
11	$(0, 1, 0)^T$	$(1, 0, 0)^T$	$(0.982225, -0.996942, -0.000063)^T$	0.0180
12	$(0, -1, 0)^T$	$(0, 1, 0)^T$	$(-0.024629, 1.99056, 0.000130)^T$	0.0264
13	$(0, -3, 0)^T$	$(0, 3, 0)^T$	$(-0.252794, 5.88784, 0.000408)^T$	0.2766

Tabelle 6.1: Ergebnisse und Fehler der Translationsberechnung (anhand von mit *Scorpius XLab*[®] simulierten Projektionen einer Kugel).

sind in der 3. Spalte aufgeführt, die letzte Spalte enthält die Abweichungen dieser Ergebnisse von der tatsächlichen Translation in der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.

Der Abstand zwischen Quelle und Detektor betrug bei den Messungen jeweils 150cm, der Abstand zwischen Quelle und Ursprung jeweils 25cm, sodass der Vergrößerungsfaktor 6 beträgt. Der Detektor besteht aus 2048×2048 Pixeln der Kantenlänge $0.02\text{cm} = 200\mu\text{m}$, sodass die Gesamtgröße des Detektors $40.96\text{cm} \times 40.96\text{cm}$ beträgt. Der Laminographiewinkel beträgt 45° .

Die Ergebnisse bestätigen insbesondere den folgenden Zusammenhang: Je näher sich die zur Registrierung herangezogenen Bildschwerpunkte (Kugeln), am Volumenmittelpunkt (Ursprung) befinden, desto kleiner ist die Abweichung der berechneten Translation. Dies ist auf die oben beschriebene Ungenauigkeit des Algorithmus zurückzuführen. Befinden sich die Kugeln im Ursprung, so stimmt der tatsächliche Vergrößerungsfaktor mit dem Faktor, der aus den Geometriedaten berechnet werden kann, überein und der Algorithmus ist exakt. (Dennoch auftretende Abweichungen können auf Mess- und Diskretisierungsfehler, sowie auf Fehler bei der Bestimmung der Bildschwerpunkte zurückgeführt werden). Größere Translationen hingegen bedeuten meist auch eine größere Abweichung der Skalierungen, wodurch die Ergebnisse verfälscht werden.

Die ersten drei Zeile der Tabelle beschreiben eine Translation von 1cm aus dem Ursprung jeweils in Richtung einer Koordinatenachse. Die bei der Translationsberechnung auftretenden Fehler betragen hier zwischen 0.001cm und 0.0025cm und liegen hier somit im Bereich von lediglich etwa 0.1 Voxel. Eine ebenso große Translation in y-Richtung ausgehend von dem bereits 1cm vom Ursprung entfernten Startpunkt $(0, 1, 0)$ zieht aus ebengenannten Gründen bereits einen um ein Zehnfaches größeren Fehler nach sich.

Somit kann festgehalten werden, dass das Objekt bei der Laminographiemessung stets möglichst exakt im Volumenmittelpunkt platziert werden sollte. Ebenso kann es in der Praxis sinnvoll sein, das Objekt im a priori Volumen zunächst in einem Vorbearbeitungsschritt zu zentrieren, sodass die Translation möglichst klein ist und die als Referenzpunkte dienenden Objektschwerpunkte dem Ursprung möglichst nahe liegen.

6.2 Genauigkeit der Skalierungsberechnung

Nun soll die Genauigkeit der Ergebnisse des in Abschnitt 4.3 besprochenen Vorgehens zur Skalierungsbestimmung untersucht werden. Auch dieser Algorithmus ist auf Grund von Messfehlern und vor allem aber auf Grund von Diskretisierungsfehlern und Fehlern bei der Binarisierung der Projektionen nicht exakt. Siehe dazu auch Abschnitt 6.3.

Um die Genauigkeit zu untersuchen werden auch hier wieder CLARA-Messungen einer Kugel mit Hilfe von *Scorpius XLab*[®] simuliert. Die Abstände zwischen Quelle und Objekt bzw. Quelle und Detektor betragen 25cm bzw. 150cm, dadurch ergibt sich ein Vergrößerungsfaktor von 6.0. Der Detektor bestand aus 1024×1024 Pixeln der Kantenlänge 0.2mm.

Das Programm *Scorpius XLab*[®] ist auch in der Lage Voxelvolumen der eingesetzten Testkörper zu erstellen. So wurde ein Volumen einer Kugel mit Durchmesser 5mm erstellt, welches als a priori Volumen dienen soll. Dieses Volumen besteht aus 512^3 Voxeln der Kantenlänge 0.05mm.

Aufgrund der Rotationsinvarianz der Kugel kann davon ausgegangen werden, dass die Rotation des Objektes in a priori Daten und simulierten Messdaten bereits ohne vorherige Bestimmung einer Rotation übereinstimmt. Die Skalierungsberechnung kann also ohne weitere Transformationsberechnungen direkt erfolgen. Dabei werden jeweils drei Iterationen der Berechnung durchgeführt, um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erreichen. Die aus dem a priori Volumen erstellten Projektionen bestehen hier aus 256×256 Pixeln, die CLARA-Projektionen wurden ebenfalls auf diese Pixelanzahl skaliert.

	Größe der Kugel	Geschätzte Skalierung	Abweichung in %
1	2.50mm	2.0124	0.723%
2	4.00mm	1.25978	1.006%
3	4.50mm	1.11997	0.949%
4	4.80mm	1.04978	0.957%
5	4.90mm	1.02818	0.976%
6	4.95mm	1.01881	0.974%
7	5.00mm	1.00811	0.883%
8	5.10mm	0.989281	0.979%
9	5.20mm	0.969252	0.905%
10	5.50mm	0.916338	0.619%
11	6.00mm	0.838818	0.333%

Tabelle 6.2: Ergebnisse und Abweichung der Skalierungsberechnung (anhand von mit *Scorpius XLab*[®] simulierten Projektionen und a priori Volumen einer Kugel).

Tabelle 6.2 zeigt die Ergebnisse der Skalierungsberechnungen bei Binarisierungsparameter $b = 2.2$. Die durchschnittliche Abweichung beträgt 0,846%. Ursachen und Auswirkung dieses Fehlers sollen im Folgenden genauer untersucht werden. Der Durchmesser der Testkugel beträgt 5.0mm, der Vergrößerungsfaktor beträgt 6.0. Die Kugel wird also auf dem Detektor mit einem Durchmesser von 30.0mm dargestellt. Das entspricht bei der Detektorpixelgröße von $800\mu\text{m} \times 800\mu\text{m}$ genau 37.5 Pixel. Die Gesamtzahl der von der Kugel abgedeckten Pixel auf dem Detektor, welche gerade solchen Pixeln entsprechen, die bei Binarisierung der Materialklasse zuzuordnen sind, lässt sich damit berechnen durch

$$\left(\frac{37.5}{2}\right)^2 \cdot \pi = 1104.47 \quad (6.1)$$

Dabei sind alle 'Randpixel' der Materialklasse als potentielle Fehlerquellen zu betrachten. So wurden diese Pixel bei der Durchstrahlung im Allgemeinen nicht vollständig, sondern nur teilweise vom Testkörper verdeckt und sind somit im Grunde genommen nicht eindeutig einer der beiden Klas-

sen zuzuordnen. Unabhängig davon welcher Klasse diese Pixel nun letztlich zugeordnet werden, sind Fehler also unvermeidlich. Dabei handelt es sich um Diskretisierungsfehler. Der Betrag des Fehlers bei der Berechnung der Objektfläche aus den binarisierten Projektionen kann dabei pro Randpixel annähernd so groß wie die Fläche eines Pixels werden (hier 0.64mm^2). Eine obere Schranke für die durch Diskretisierungsfehler entstehende Abweichung bei der Binarisierung ist also gegeben durch das Produkt der Anzahl der Randpixel mit der Pixelfläche.

Die Anzahl der Randpixel im betrachteten Beispiel entspricht

$$37.5 \cdot \pi = 117.810 \quad (6.2)$$

Die entspricht 10.67% der Materialpixel einer Projektion. Wird also nur jedes 10. fehleranfällige Randpixel aufgrund leichter Grauwert-Abweichungen in den zu vergleichenden Projektionen (durch Diskretisierungsfehler, nicht idealer Schwellwert bei der Binarisierung usw.) unterschiedlich eingeordnet, so weichen die berechneten Materialflächen, und damit das Resultat der Skalierungsberechnung um mehr als 1% voneinander ab. Die Abweichung ist dann im Durchschnitt also bereits stärker als in obiger Praxisuntersuchung.

Eine solche Abweichung wirkt sich wiederum sehr stark auf den Fehler im a priori Volumen aus. So ist die Anzahl der 'Materialvoxel' des a priori Volumens deutlich größer als in den zweidimensionalen Projektionen, da es sich hier um dreidimensionale Daten handelt. Somit ist auch die absolute Zahl der fehlerhaften Voxel deutlich größer als die Zahl fehlerhafter Pixel in der Projektion, was bei der SART-Rekonstruktion der Daten in die Umrisse des a priori Volumens zu deutlich sichtbaren Artefakten und Unschärfe führt. Dies wird erneut am zuletzt betrachteten Beispiel der Kugel vom Durchmesser 5mm veranschaulicht. Bei einer Voxelgröße von $50\mu\text{m}$ besteht die Testkugel so aus etwa

$$\frac{1}{(0.05\text{mm})^3} \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5\text{mm}}{2} \right)^3 \right) = 523598.78 \quad (6.3)$$

Voxeln. Bei einer Abweichung von 1% kann also eine Gesamtzahl von etwa 5236 fehlerhaften Voxeln erwartet werden.

Abschließend kann also festgehalten werden, dass für die Berechnung der Skalierung eine höhere Genauigkeit wünschenswert wäre, um ein präzise registriertes a priori Volumen zu erhalten. Da in der Praxis meist jedoch keine Berechnung der Skalierung erforderlich ist, da die a priori Daten in diesem Punkt bereits mit dem Prüfkörper übereinstimmen, wird eine Verbesserung der Skalierungsberechnung hier nicht weiter verfolgt. Eine geringfügige Präzisionssteigerung kann (bei hinreichend hoch auflösenden a priori Daten und Messdaten) durch die Verwendung größerer Projektionen in den Berechnungen erreicht werden.

6.3 Fehlerquellen

In diesem Abschnitt werden die häufigsten Fehlerquellen des Algorithmus angesprochen und erläutert. Neben den allgemein üblichen Mess- und Diskretisierungsfehlern soll insbesondere auch kurz auf anwendungs- und verfahrensspezifische Ungenauigkeiten eingegangen werden.

6.3.1 Messfehler

Bei Messvorgängen jeglicher Art treten stets unvermeidliche Fehler in den gesammelten Daten auf, sogenannte Messfehler. Es handelt sich hierbei um die Differenz zwischen dem Wert einer realen Messgröße und dem Ergebnis einer Messung eben dieser Größe. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass jede Messung nur mit endlicher Genauigkeit erfolgen kann. Darüber hinaus hängen Messungsergebnisse meist nicht nur von der tatsächlich zu messenden Größe, sondern auch von weiteren, oft nicht messbaren Faktoren oder Umwelteinflüssen ab.

Bei der Röntgenmessung treten bedingt durch sogenannte Strahlenaufhärtung und unkontrollierbare Streuung der Strahlung zusätzliche Fehlerquellen auf. Diese beiden Effekte werden von Franz [7] umfangreich erklärt und mathematisch beschrieben.

Die beschriebenen Messfehler sind bei realen Messungen unumgänglich, während solche Ungenauigkeiten in den simulierten Messungen nicht auftreten. Dadurch kann es im vorgestellten Algorithmus, insbesondere bei der Evaluation erstellter Rotationen, wenn simulierte Projektionen mit fehlerbehafteten Ergebnissen realer Messungen verglichen werden, zu Fehlern kommen.

6.3.2 Diskretisierungsfehler

Weitere Fehler entstehen bei der Diskretisierung der Daten. Da dieser Vorgang in der Praxis jedoch unumgänglich ist, besteht keine Möglichkeit diese Fehlerquelle zu eliminieren.

Diese Fehler wirken sich stärker aus, je stärker die Daten diskretisiert werden. So kommt es offensichtlich schon bei der Messung mit einem in Pixel unterteilten Detektor zu Diskretisierungsfehlern. Solche fallen jedoch größer aus, aus je weniger Pixeln der Detektor besteht bzw. je stärker die Projektionen anschließend, wie in Abschnitt 4.2.7 erläutert, verkleinert werden.

Weiterhin ist aufgrund der diskreten Form der Daten eine Bearbeitung der Projektionen, wie zum Beispiel die Bi- oder Trinarisierung, nur bis auf einen durch Pixel- und Voxelgröße bedingten Fehler möglich. Selbiges gilt ebenso für die zu bestimmende Transformation, so können Operationen, die lediglich Verschiebungen von Objektelementen in den Projektionen deren Ausmaß kleiner als die Pixelgröße ist, nicht erfasst werden.

6.3.3 Fehler bei der Binarisierung

Bei der Binarisierung der Daten, die in Abschnitt 4.2.4 beschrieben wird, kann es zu weiteren Fehlern kommen. Dabei sind nicht durch oben genannte Quellen bedingte Fehler gemeint, sondern zusätzlich dazu entstehende Ungenauigkeiten. Diese entstehen, da es oft nicht möglich ist einen Schwellwert zu finden, der eine ideale Unterteilung der Projektion in Material- und Luftbereiche bewirkt. Zudem gelingt es dem beschriebenen Algorithmus nicht immer, den 'bestmöglichen' Schwellwert zu finden. Wird der Schwellwert zu groß oder zu klein gewählt, so kann es zur fehlerhaften Zuordnung einiger Pixel zur Material- bzw. Luftklasse kommen. Dies führt insbesondere zu Fehlern bei der Skalierungsberechnung, da diese allein anhand der Anzahl der Materialpixel erfolgt. Jedoch können auch die Evaluationswerte der Rotationen dadurch beeinflusst werden und somit lokale und globale Minima verfälscht werden.

6.3.4 Fehlerhafter Vergrößerungsfaktor

Wie in Abschnitt 6.1 bereits erläutert wurde, ist der exakte Faktor mit dem ein zur Translationsbestimmung genutzter Referenzpunkt auf dem Detektor vergrößert wird nicht nachvollziehbar. Daher kommt es zu Ungenauigkeiten in der Translationsberechnung, wie oben bereits untersucht wurde.

6.3.5 Bedienungsfehler und Schlechte Parameterwahl

Die letzte Gruppe von Fehlern, die hier angesprochen werden soll, ist die einzige, die ohne weitere Modifikation des Verfahrens vermieden werden kann. Es handelt sich dabei um solche Fehler, die durch schlechte Parameterwahl und mangelhafte Bedienung, ausgelöst werden.

Die größte Zahl von Parametern tritt bei der Rotationsberechnung auf. Wie diese Parameter das Vorgehen beeinflussen und welche Fehler durch geschickte Parameterwahl vermieden werden können, wurde bereits in Abschnitt 4.2.6 beschrieben. Gerade im Falle binärer a priori Daten ist auch die Wahl eines Startwertes für die Rotationsberechnung von großer Bedeutung. So wurde bereits in Abschnitt 5.2 erläutert, dass die Konvergenz gegen das globale Minimum nur bei Wahl einer geeigneten Startrotation möglich ist.

Darüber hinaus ist es dem Nutzer überlassen, ob eine Skalierungsberechnung erfolgen soll oder, im Falle stark abweichender Objektgrößen, eine initiale Skalierung der Daten zu wählen. Ebenso muss die Projektionsgröße gesetzt werden (siehe Abschnitt 4.2.7) und entschieden werden, welcher Algorithmus zur Rotationsfindung herangezogen wird und ob mit trinarisierten Projektionen gearbeitet wird. Dabei können durch den Anwender selbst weitere Fehler verursacht werden.

6.4 Fehlerhafte Daten / Robustheit

Um Aussagen über die Robustheit des Algorithmus treffen zu können, muss die Möglichkeit fehlerhafter Daten in Betracht gezogen werden. Dabei soll hier von fehlerfreien, hinreichend hoch auflösenden a priori Volumina ausgegangen werden und lediglich der Fall degradierter Messdaten in Betracht gezogen werden.

Der folgende Fall tritt in der Praxis bei korrekter Durchführung der Messung im Allgemeinen nicht auf, soll hier aber trotzdem kurz betrachtet werden. Hierbei handelt es sich um fehlerhafte Daten in Form von CL-Projektionen, die durch übermäßiges Rauschen oder sonstige Verfälschungen stark 'verunreinigt' sind. Da in diesem Fall keine sinnvolle Rekonstruktion der Daten möglich ist (da es sich bei der Rekonstruktion der Daten um ein 'schlecht gestelltes' Problem handelt), sind solche Daten dadurch ohnehin unbrauchbar. Selbst unter Verwendung von a priori Daten kann kein qualitativ hochwertiges Volumen berechnet werden, eine Registrierung mit einem solchen a priori Volumen ist also nicht zielführend. Der vorgestellte Algorithmus selbst hingegen ist in der Lage auch bei leicht verrauschten Projektionen gute Ergebnisse zu liefern, da durch eine initiale Filterung bzw. Glättung der Projektionen auch dann sinnvolle Binarisierungen berechnet werden können. Allein damit kann eine Berechnung der Transformation erfolgen.

Darüber hinaus spielt auch der Umfang der CLARA-Daten, also die Anzahl der Projektionen für das Registrierungsverfahren keine Rolle, so lange mindestens drei Detektorbilder mit zugehöriger Geometriedatei vorliegen. So werden in jedem Fall lediglich 3 Projektionen zur Registrierung herangezogen.

Anzumerken ist jedoch, dass die Robustheit des Verfahrens von datenbezogen sinnvollen Eingaben des Nutzers abhängig ist. So ist in einigen Fällen nicht nur ein sinnvoller Startwert zwingend erforderlich, sondern es sind auch einige Parameter, wie unter Anderem auch der Binarisierungsparameter, passend zu wählen. Im Speziellen ist dieser Wert zum Beispiel bei flacheren Objekten höher zu wählen, als bei kompakten Prüfkörpern, damit konsistente Binarisierungen erzielt werden.

Insgesamt kann dennoch festgehalten werden, dass das Verfahren bei sinnvoller Anwendung stets in der Lage ist gute Registrierungsergebnisse zu liefern, solange die Eingabedaten den Ansprüchen des Rekonstruktionsvorganges genügen.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Die Arbeit hat gezeigt, dass die Positionierung eines gegebenen a priori Volumens für die Computerlaminographie mit Hilfe des vorgestellten Algorithmus möglich ist. Dazu werden die gegebenen Daten, d.h. a priori Volumen, CL-Messung und Geometriedaten, miteinander registriert, indem schrittweise eine Transformation, bestehend aus Rotation, Translation und Skalierung, bestimmt wird. Diese Registrierung erfolgt vollkommen ohne Rekonstruktion der Laminographiedaten zu einem 3-D Volumen, sondern allein anhand dreier CL-Projektionen (2-D) und den zugehörigen Geometriedaten. Dazu werden systematisch Projektionen des a priori Volumens in unterschiedlicher Größe, Orientierung und Position erstellt, bis diese möglichst genau mit den drei Referenzprojektionen übereinstimmen. Um die Übereinstimmung beurteilen zu können und somit eine reellwertige Zielfunktion zu schaffen, wurde ein Ähnlichkeitsmaß für Projektionenpaare, das auf einer Segmentierung (Bi-/Trinarisierung) dieser Projektionen basiert, eingeführt. Da es sich bei dieser zu optimierenden Zielfunktion um eine nicht konvexe Funktion handelt, kann das Problem nicht vollständig durch eine herkömmliche Optimierungsstrategie gelöst werden. Jedoch konnte für die Rotationsberechnung gezeigt werden, dass ein gradientenbasiertes Abstiegsverfahren die Registrierungsergebnisse im Allgemeinen verbessern kann und bei Wahl einer geeigneten Start-Rotation sogar autonom verwendet werden kann.

Die Ergebnisse dieses Registrierungsalgorithmus wurden auf verschiedene Weisen verifiziert. Zum Einen visuell durch Anwendung der Transformation auf das Volumen selbst mit Hilfe eines geeigneten Tools (hier: VolumePlayerPlus). Weiterhin konnten die Ergebnisse durch einen Vergleich zu bereits bekannten Registrierungsergebnissen, die im Rahmen einer Voruntersuchung mit Hilfe von Markierungen auf den Volumina gefunden wurden, bestätigt werden. Des Weiteren lieferte eine Rekonstruktion der Laminographiedaten unter Verwendung des registrierten a priori Volumens qualitativ hochwertige Ergebnisse, die ebenfalls auf die Korrektheit der Transformation schließen lassen. Lediglich die Skalierungsberechnung bedarf weiterer Verbesserungen, was jedoch aufgrund der Tatsache, dass vorhandene a priori Volumina in ihrer Größe meist bereits mit dem Prüfkörper übereinstimmen, keine praxisrelevante Einschränkung darstellt.

Es wurde in Beispielen gezeigt, dass der Algorithmus sowohl für binäre a priori Volumina, als auch für solche mit Dichteverteilung geeignet ist. Im Fall binärer Daten ist die Eingabe einer initialen Transformation, die dem globalen Minimum hinreichend nahe liegt, notwendig, um die Konvergenz zur gesuchten Transformation zu ermöglichen. Weiterhin können hier keine sinnvollen Trinarisierungen der Projektionen berechnet werden, was jedoch bei geeignetem Startwert ohnehin nicht erforderlich ist.

Darüber hinaus wurde eine Methode zur sinnvollen und effizienten Umsetzung der Transformation

gefunden. Dabei werden Rotation und Translation auf die zur Messung gehörenden Geometriedaten angewendet und die Skalierung schlicht auf die Voxelgröße des a priori Volumens. Die SART-Rekonstruktion der Laminographiedaten (mit modifizierten Geometriedaten) kann anschließend in ein (binarisiertes) Volumen, das in Dimension und Größe mit dem a priori Volumen übereinstimmt, erfolgen.

Trotz aller erzielter Erfolge ist die Implementierung des vorgestellten Algorithmus keineswegs als fertiges, praxisbereites Programm zu sehen, sondern kann vielmehr als Grundlage für ein Solches dienen. Dies ist nicht zuletzt damit zu begründen, dass es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war den Algorithmus an für die zerstörungsfreie Prüfung relevanten apriori Informationen wie z.B. CAD- oder STL-Daten zu testen. Darüber hinaus sind einige Verbesserungsansätze bekannt, die im Folgenden Abschnitt genauer betrachtet werden sollen.

7.2 Ausblick

Obwohl bereits umfangreiche Erfolge bei der Registrierung der a priori Daten erzielt werden konnten, bleiben zahlreiche Möglichkeiten zur Verbesserung und Erweiterung des vorgestellten Algorithmus offen. Hier sollen abschließend einige wichtige Ansätze für zukünftige Arbeiten an der Problemstellung dieser Arbeit zur Sprache kommen.

Ein Verbesserungsansatz könnte darin bestehen, die Anzahl der benötigten Parameter zu reduzieren und damit Fehlerquellen zu eliminieren. Dies kann zum Beispiel durch Voruntersuchungsschritte, die datenabhängig sinnvolle Parameterwahlen liefern, geschehen. Denkbar wäre hier unter Anderem die Wahl eines geeigneten Binarisierungsparameters anhand von Mittelwert und Standardabweichung der Projektionen. So weisen die Projektionen planarer Objekte im Allgemeinen einen höheren Mittelwert (niedrigere Strahlenabschwächung) und eine niedrigere Varianz auf, als Projektionen kompakter Objekte. Weiterhin kann auch eine automatisierte, dynamische Wahl der Projektionsgrößen (mit zunehmender Genauigkeit wachsende Pixelanzahl) eine Steigerung von Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit bewirken.

Eine Beschleunigung des Verfahrens ist weiterhin möglich, indem eine initiale Evaluation der Rotationen anhand einer einzelnen Projektion erfolgt. Ist der Evaluationswert dieser einen Projektionen im Vergleich zur entsprechenden Referenzprojektion dann bereits auffallend groß, so kann die Rotation verworfen werden. Für jede so aussortierte Rotation müssen also nicht drei Projektionen, sondern lediglich eine simuliert werden. Ist kein Startwert gegeben, so ist zumindest im ersten Schritt der Anteil der schlecht evaluierten Rotationen sehr groß und es kann eine deutliche Beschleunigung des Verfahrens erzielt werden.

Soll das Verfahren tatsächlich in Anwendungen genutzt werden, die eine Berechnung eines Skalierungsfaktors erfordern, so sind auch hier weitere Anpassungen nötig, wie Abschnitt 6.2 gezeigt hat.

Eine Erweiterung, die unbedingt verfolgt werden sollte, ist der Ausbau des Verfahrens zur Anwendung auf ROI (region of interest) Probleme. Während eine Skalierungsberechnung auf die vorgestellte Art und Weise hier nicht möglich ist, bereitet hier auch die Translationsberechnung Probleme, da Teile des Objektes außerhalb des in den Projektion dargestellten Bereiches liegen können. Dadurch können keine korrespondierenden Bildschwerpunkte berechnet werden. Es muss also ein alternativer Weg zur Abschätzung der Translation gefunden werden, um den Algorithmus anwenden zu können. Dazu könnte zunächst, ähnlich wie in Kapitel 3, eine einzelne, auf dem Objekt platzierte Markerkugel dienen. Diese Kugel liefert Referenzpunkte in den Projektionen und ermöglicht somit eine Translationsberechnung nach dem bereits bekannten Algorithmus. Später kann diese Kugel dann ersetzt werden, indem ein 'feature matching' (zum Beispiel Lowe [14]) durchgeführt wird. Dabei werden auffällige Merkmale, wie zum Beispiel Elemente besonders hoher Dichte oder von auffälliger Form, in den Projektionen einander zugeordnet, was zumindest bei grober Übereinstimmung der Rotation möglich ist. Anhand dieser Zuordnung wird eine Translation auf dem Detektor berechnet. Anschließend kann dann wie in der bisherigen Translationsberechnung, die in Abschnitt 4.4 beschrieben wurde, vorgegangen werden.

Zusätzlich sind gegebenenfalls die Klassen, in die das Objekt bi-/trinarisiert wird neu zu wählen. Deckt ein Objekt zum Beispiel den ganzen Detektor ab, so macht es keinen Sinn, weiterhin eine Klasse von Luftpixeln zu unterscheiden. Je nach Objektgröße muss jedoch die Möglichkeit betrachtet werden, dass nicht bei allen Durchstrahlungsrichtungen der gesamte Detektor vom Objekt verdeckt wird. Da es dadurch zu vergleichsweise sehr geringen Abschwächungen und somit sehr starken Ausreißern der Projektionsgrauwerte nach oben kommen kann, stellt die Schwellwertberechnung nach Otsu kein geeignetes Verfahren zur Binarisierung der Projektionen in unterschiedliche Materialklasse mehr dar. Vielmehr ist hier zu vermuten, dass die Binarisierung nicht länger anhand eines einzelnen Schwellwertes erfolgen kann, sondern komplexere Vorgehensweisen wie eine Hysteresis Binarisierung oder eine

Binarisierung anhand der Kanten gewählt werden muss.

Weiterhin ist auch anzunehmen, dass ein einziges binäres a priori Volumen in diesem Fall zur Registrierung der Daten nicht ausreicht, da die Objektumrisse nicht in den Berechnungen herangezogen werden können. So ist hier ein a priori Volumen, das zumindest eine grobe Dichteverteilung beinhaltet, erforderlich. Ein solches Volumen kann zum Beispiel auch aus mehreren binären Volumina, die verschiedenen Materialien des Prüfkörpers entsprechen, und somit unterschiedlich starke Strahlenabschwächungen bewirken, zusammengesetzt werden.

Nichtsdestotrotz kann erwartet werden, dass der vorgestellte Algorithmus nach Einarbeitung der eben genannten Modifikationen in der Lage ist auch im Falle von ROI-Daten eine Transformation, die eine Registrierung von a priori Daten bewirkt, zu berechnen.

Literaturverzeichnis

- [1] AH Andersen and Avinash C Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (sart): a superior implementation of the art algorithm. *Ultrasonic imaging*, 6(1):81–94, 1984.
- [2] Ilja N Bronstein, Juraj Hromkovic, Bernd Luderer, Hans-Rudolf Schwarz, Jochen Blath, Alexander Schied, Stephan Dempe, Gert Wanka, Siegfried Gottwald, Eberhard Zeidler, et al. *Taschenbuch der mathematik*, volume 1. Springer, 2012.
- [3] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM computing surveys (CSUR)*, 24(4):325–376, 1992.
- [4] K. R. Castleman. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [5] A. M. Cormack. Representation of a function by its line integrals with some radiological applications. *Journal of applied Physics*, 34:2722–2727, 1963.
- [6] L. Feldkamp, L. Davis, and J. Kress. Practical cone-beam algorithm. *Journal of the Optical Society of America*, 1:612–619, 1984.
- [7] M. Franz. *EAR - Einsatzsynchrone Artefakt Reduktion*. PhD thesis, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2009.
- [8] Sven Gondrom. *Rekonstruktion von Objektebenen aus Röntgendurchstrahlungsaufnahmen bei unvollständigen Datensätzen unter Verwendung von a priori Informationen*. PhD thesis, Saarbrücken, Universität des Saarlandes, 2001.
- [9] Richard Gordon, Robert Bender, and Gabor T Herman. Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of theoretical Biology*, 29(3):471–481, 1970.
- [10] R. Halmshaw. *Industrial Radiology: Theory and Practice*. Springer Science and Business Media, 1995.
- [11] Florian Jarre and Josef Stoer. *Optimierung*. Springer, 2003.
- [12] S. Kaczmarz. Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen. *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, pages 355–357, 1937.
- [13] A. K. Louis. Approximate inverse for linear and some nonlinear problems. *Inverse Problems*, 12:175, 1996.
- [14] D. G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60:91–110, 2004.
- [15] Frank Natterer. *Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, 1986.

- [16] Frank Natterer and Frank Wübbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Mathematical Modeling and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [17] Nobuyuki Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *Automatica*, 11(285–296):23–27, 1975.
- [18] C. Schorr. *Optimierung iterativer Rekonstruktionsverfahren bei unvollständigen Daten zur Anwendung in der Computerlaminographie*. PhD thesis, Saarbrücken, Universität des Saarlandes, 2013.
- [19] C. Schorr and M. Maisl. Exploitation of geometric a priori knowledge for limited data reconstruction in non-destructive testing. In *Proceedings of Fully3D Conference 2013*, pp 114–117, 2013.
- [20] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [21] Barbara Zitova and Jan Flusser. Image registration methods: a survey. *Image and vision computing*, 21(11):977–1000, 2003.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Computertomographie Anlage: Kegelstrahlgeometrie ([18])	9
1.2	Computerlaminographieanlage "CLARA"(Computerlaminographie und Radiographie Anlage) ([18])	10
2.1	Parallelstrahlgeometrie	16
2.2	Fächerstrahlgeometrie	17
2.3	Fächerstrahlgeometrie mit transformierten Koordinaten	18
2.4	Kaczmarz Verfahren im $\mathbb{R}^2$	23
2.5	Rotationslaminographieanlage CLARA, Querschnitt	27
2.6	Rekonstruktionen simulierter Messungen einer Platine	29
3.1	SART-Rekonstruktion der Skischuhschnalle aus der CT-Aufnahme	41
3.2	SART-Rekonstruktion der Skischuhschnalle aus der CLARA-Aufnahme (und Illustration der Fokusebene)	41
3.3	SART-Rekonstruktion der Skischuhschnalle aus der CL-Aufnahme unter Verwendung der registrierten a priori Daten	44
4.1	Als a priori Volumen verwandte CT-Rekonstruktion der Platine	48
4.2	Auszug der Geometriedatei zur CLARA-Messung der Platine	48
4.3	CLARA-Projektionen der Platine für Rotationswinkel $\alpha_0 + 0^\circ$, $\alpha_0 + 119.7^\circ$, $\alpha_0 + 240.3^\circ$	48
4.4	Erstellte Projektionen der Platine ohne vorherige Anwendung einer Transformation	62
4.5	Erstellte Projektionen der Platine nach vorheriger Anwendung verschiedener Rotationen	62
4.6	Trinarisierte und zentrierte Projektionen der Platine	63
4.7	Erstellte Projektionen zu einer mit Hilfe des beschriebenen Algorithmus gefundenen Rotation	63
4.8	Projektionen der unterschiedlich skalierten Platinen zur Illustration der Skalierungs-berechnung	64
4.9	Übereinander gelegte Projektionenpaare der Platine zur Illustration der Translations-berechnung	66
4.10	Skizze zur Illustration der Translationsberechnung, 2-D	67
5.1	Zur berechneten Transformation erstellte Projektionen der Platine aus dem binären a priori Volumen.	75

Tabellenverzeichnis

3.1	Positionen der Kugeln in den Rekonstruktionen der Skischuhschnalle (in Voxel)	42
4.1	Parameter der Rotationsberechnung	60
5.1	Parameterwahl im Beispiel: Skischuhschnalle	73
6.1	Ergebnisse und Fehler der Translationsberechnung (anhand von mit <i>Scorpius XLab</i> [®] simulierten Projektionen einer Kugel).	78
6.2	Ergebnisse und Abweichung der Skalierungsberechnung (anhand von mit <i>Scorpius XLab</i> [®] simulierten Projektionen und a priori Volumen einer Kugel).	79

