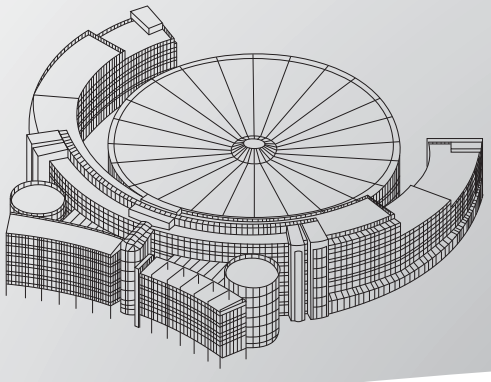
BERICHTE AUS DEM
PRODUKTIONSTECHNISCHEN
ZENTRUM BERLIN



Jens Hermann Wintering

Niedrigdimensionale Modelle zur Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen unter Berücksichtigung der Pose

Fraunhofer IPK
INSTITUT
PRODUKTIONSANLAGEN UND
KONSTRUKTIONSTECHNIK

INSTITUT
WERKZEUGMASCHINEN UND FABRIKBETRIEB
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

BERICHTE AUS DEM
PRODUKTIONSTECHNISCHEN ZENTRUM BERLIN

Jens Hermann Wintering

Niedrigdimensionale Modelle zur Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen unter Berücksichtigung der Pose

Herausgeber:

Prof. Dr. h. c. Dr.-Ing. E. Uhlmann
Prof. Dr.-Ing. R. Jochem
Prof. Dr.-Ing. H. Kohl
Prof. Dr.-Ing. J. Krüger
Prof. Dr.-Ing. M. Rethmeier
Prof. Dr.-Ing. G. Seliger
Prof. Dr.-Ing. R. Stark

Fraunhofer IPK
INSTITUT
PRODUKTIONSANLAGEN UND
KONSTRUKTIONSTECHNIK

INSTITUT
WERKZEUGMASCHINEN UND FABRIKBETRIEB
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Kontaktadresse:
Fraunhofer-Institut für Produktionsanlagen und Konstruktionstechnik IPK
Pascalstraße 8-9
10587 Berlin
Telefon 030 39006-0
Fax 030 39110-37
E-Mail info@ipk.fraunhofer.de
URL www.ipk.fraunhofer.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über www.dnb.de abrufbar.
ISBN (Print): 978-3-8396-0999-6

D 83

Zugl.: Berlin, TU, Diss., 2015

Druck: Mediendienstleistungen des
Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau IRB, Stuttgart

Für den Druck des Buches wurde chlor- und säurefreies Papier verwendet.

© by FRAUNHOFER VERLAG, 2016
Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau IRB
Postfach 800469, 70504 Stuttgart
Nobelstraße 12, 70569 Stuttgart
Telefon 0711 970-2500
Fax 0711 970-2508
E-Mail verlag@fraunhofer.de
URL http://verlag.fraunhofer.de

Alle Rechte vorbehalten
Dieses Werk ist einschließlich aller seiner Teile urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die über die engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes hinausgeht, ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie die Speicherung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen und Handelsnamen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass solche Bezeichnungen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und deshalb von jedermann benutzt werden dürften.
Soweit in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden ist, kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen.

Niedrigdimensionale Modelle zur Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen unter Berücksichtigung der Pose

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Jens Wintering
aus Lingen (Ems)

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
Institut für Werkzeugmaschinen und Fabrikbetrieb
der Technischen Universität Berlin

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Jörg Krüger
Gutachter: Prof. Dr. h. c. Dr.-Ing. Eckart Uhlmann
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 18.12.2015

Berlin 2016
D 83

Vorwort des Herausgebers

Die Produktionstechnik besitzt eine zentrale Bedeutung für die Weiterentwicklung der von der Industrie geprägten Gesellschaft. Das optimierte Zusammenspiel von Mensch, Technik und Organisation steigert die Leistungsfähigkeit eines Industriebetriebs, indem er alle eingesetzten Potentiale der verwendeten Produktionsmittel und Fertigungsverfahren sowie der Produktionsorganisation in vollem Maße ausschöpft. Dabei ist die Simulation bei der Entwicklung von Werkzeugmaschinen nicht mehr wegzudenken. Mit den richtigen Simulationstechnologien lassen sich mechanische und regelungstechnische Zusammenhänge im Vorfeld der Herstellung an virtuellen Prototypen abbilden. Somit können nicht nur die späteren Eigenschaften der Werkzeugmaschine abgesichert werden, sondern es kann auch die Bearbeitung auf der Werkzeugmaschine optimiert werden. Insbesondere die Befriedigung zunehmend individualisierter Kundenbedürfnisse führt zu steigender Variantenvielfalt. Dies endet im Extremfall bei Unikaten mit einer Losgröße von einem Stück. Für den Technologievorsprung und zur Berücksichtigung der Kundenwünsche ist die Simulationstechnik unerlässlich und Gegenstand aktueller Forschung, mit dem Ziel, diese Technik wirtschaftlicher zu gestalten.

Die Arbeitsgenauigkeit und das Leistungsvermögen einer spanenden Werkzeugmaschine hängen entscheidend von ihrem statischen und dynamischen Verhalten ab. Bei spanenden Werkzeugmaschinen treten zwischen Werkzeug und Werkstück während der Bearbeitung Relativbewegungen an der Bearbeitungsschnittstelle auf, die sich mit den Vorschub- und Schnittbewegungen überlagern. Ob die resultierenden Schwingungen bei der Bearbeitung stören, hängt entscheidend vom dynamischen Eigenschaftsverhalten der Werkzeugmaschine ab. Zur Optimierung des dynamischen Verhaltens einzelner Maschinenkomponenten oder ganzer Maschinenstrukturen können sowohl numerische als auch experimentelle Verfahren eingesetzt werden. Die Optimierung erfordert eine ganzheitliche Betrachtung der gesamten mechatronischen Kette, welche Strukturdynamik, Antriebe, Sensoren und Regler beinhaltet. Diese ganzheitliche Betrachtung ist bei komplexen Maschinen ohne entsprechende Simulationsmethodik undenkbar.

Mit der Anwendung der Modellordnungsreduktionsverfahren werden reduzierte Modelle erstellt, mit denen Simulationen in wesentlich kürzeren Rechenzeiten durchgeführt werden können. Damit werden Berechnungen ermöglicht, die eine hohe Genauigkeit besitzen, sowie Simulationen, die sonst in angemessener Zeit nicht möglich wären. Dadurch können verschiedene Situationen und Parameterkombinationen in der Entwicklungsphase in wirtschaftlicher Zeit simuliert werden. Diese Simulationen führen dementsprechend zu einem höheren Verständnis des Werkzeugmaschinenverhaltens und verbessern die gesamte Auslegung und Konstruktion der Maschine.

Berlin, im März 2016 Eckart Uhlmann

Vorwort des Autors

Die vorliegende Arbeit entstand neben meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Werkzeugmaschinen und Fabrikbetrieb (IWF) der Technischen Universität Berlin.

Mein Dank gilt zunächst dem Leiter des Fraunhofer-Instituts für Produktionsanlagen und Konstruktionstechnik (IPK) in Berlin und des Instituts für Werkzeugmaschinen und Fabrikbetrieb (IWF) der Technischen Universität Berlin, Herrn Professor Dr. h. c. Dr.-Ing. Eckart Uhlmann, der mir zur Bearbeitung der Aufgabe genügend Freiraum ließ.

Herrn Professor Dr.-Ing. Michael Zäh, dem Leiter des Instituts für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (iwb) der Technischen Universität München, danke ich für die Übernahme des Korreferats und den letzten Feinschliff des Manuskripts. Für die Übernahme des Vorsitzes meines Promotionsverfahrens danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. Jörg Krüger, dem Leiter des Fachgebiets für Industrielle Automationstechnik am Institut für Werkzeugmaschinen und Fabrikbetrieb (IWF) der TU Berlin.

Den Mitarbeitern des Instituts möchte ich herzlich danken, die mich durch ihre stete Einsatzbereitschaft unterstützt haben und durch die das Gelingen dieser Arbeit erst möglich wurde. Für die Unterstützung bei der Durchführung zahlreicher Simulationen danke ich meinen Studenten. Für die Unterstützung bei der Durchführung der messtechnischen Untersuchungen sowie für die zur Verfügungsstellung der Messtechnik und Geräte danke ich Jan Mewis, Niels Raue und Christian Gabriel.

Für die großartige Unterstützung, die vielen fachlichen und konstruktiven Diskussionen im gesamten Verlauf meiner Arbeit sowie die kritische Durchsicht meines Manuskripts danke ich ganz herzlich Herrn Professor Timo Reis, Sabrina Schröder, Aline Hötzeldt und Claudia Zeutschel.

Besonders großer Dank gilt meinen Eltern, die mich gefördert und unterstützt haben und mir stets zur Seite standen. Meiner Familie und den vielen Freunden, die mich im Laufe meiner Arbeit moralisch unterstützt haben, obwohl sie mich in der letzten Phase der Doktorarbeit nur selten zu Gesicht bekamen, danke ich ganz herzlich.

Für ihr Verständnis und ihre große Unterstützung danke ich meiner Freundin Anne Jänike in besonderem Maße.

Berlin, im März 2016 Jens Wintering

Inhaltsverzeichnis

0 Formel- und Kurzzeichen iii
1 Einleitung 1
2 Stand der Technik und Grundlagen 3
2.1 Entwicklungsphasen der Werkzeugmaschine bis zur Abnahme 3
2.2 Numerische Methoden zur Verhaltensanalyse von Werkzeugmaschinen 5
2.2.1 Finite-Elemente-Methode 6
2.2.2 Mehrkörpersimulation 7
2.2.3 Digitale Blocksimulation 7
2.2.4 Überblick über gekoppelte Simulationsverfahren 7
2.3 Numerische Modellierung von Werkzeugmaschinen und deren Komponenten 8
2.3.1 Dämpfung und deren Eigenschaften 14
2.3.2 Werkzeugmaschine als mechatronisches System 16
2.3.3 Modellierung von Relativbewegungen 18
2.4 Mathematische Grundlagen 20
2.4.1 Grundgleichungen zur Systembeschreibung 20
2.4.2 Systemtheorie 24
2.4.3 Stabilitätsbetrachtung 25
2.5 Konzepte und Grundlagen der Modellordnungsreduktion 27
2.5.1 Einführung 27
2.5.2 Projektionsverfahren 27
2.5.3 Klassische Reduktionsverfahren 28
2.6 Fazit 31
3 Zielsetzung und Arbeitsschwerpunkte 33
4 Dynamisches Verhalten der Werkzeugmaschine 35
4.1 Einführung 35
4.2 Definition und Beschreibung der Mikrofräsmaschine 35
4.3 Versuchsbeschreibung und Durchführung der experimentellen Untersuchungen 36
4.3.1 Messgeräte und Messmethoden 36
4.3.2 Statische Nachgiebigkeit 40
4.3.3 Positionsabhängige dynamische Eigenschaften 42
4.3.4 Kreisformtest und Zeitverhalten 49
4.3.5 Zusammenfassung der experimentell ermittelten Ergebnisse 52
4.4 Beschreibung und Durchführung der Finite-Elemente-Analyse 57
4.4.1 Software und konventionelle Modellierung 57
4.4.2 Modellierung der Koppel- und Schnittstellen 60
4.4.3 Definition der Teilsysteme 63
4.4.4 Positionsabhängige dynamische Eigenschaften 65
4.4.5 Zeitverhalten 71
4.4.6 Zusammenfassung der numerisch ermittelten Ergebnisse 73
5 Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren für Werkzeugmaschinen 79
5.1 Einführung und Übersicht 79
5.2 Padé-Approximation mittels Krylov-Unterraummethode 82
5.3 Einflussgrößen zur Erstellung des reduzierten Systems 85
5.3.1 Algorithmen und ihren numerischen Varianten 86
5.3.2 Entwicklungsgliederanzahl 92

5.3.3 Entwicklungspunkt 96
5.3.4 Deflationsgrenze 104
5.3.5 Zustand der Matrizen des Referenzsystems 105
5.4 Singulärwertzerlegungsbasierte Verfahren 110
5.4.1 Definition und Beschreibung singulärwertzerlegungsbasierter Verfahren 110
5.4.2 Hybride Reduktionsverfahren hochdimensionaler Ein- und Ausgangsräume 111
5.5 Fehlerabschätzung und Abbruchkriterium 117
5.5.1 Fehlerabschätzung für den automatisierten Abbruch 117
5.5.2 Heuristische Abschätzung 118
5.5.3 Singulärwertzerlegung 121
5.6 Eigenschaften des reduzierten Systems 121
5.7 Bewertung 124
5.8 Fazit 129
6 Mechatronische Simulation der Werkzeugmaschine 131
6.1 Einführung 131
6.2 Modellaufbereitung 132
6.2.1 Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension im Finite-Elemente-Modell 132
6.2.2 Steigerung der Modellqualität und Nachbearbeitung reduzierter Systeme 135
6.2.3 Übertragung der Reduktionsergebnisse 139
6.3 Kopplung von Teilsystemen 140
6.3.1 Einleitung und Definition 140
6.3.2 Schleifenbildung 141
6.3.3 Ein- und Ausgänge 142
6.3.4 Berücksichtigung der Relativbewegung 147
6.4 Modellierung und Durchführung der mechatronischen Simulation 150
6.4.1 Regelung und Sollgrößeninterpolation 150
6.4.2 Sprungantwort 150
6.4.3 Numerischer Kreisformtest 152
6.5 Zusammenfassung und Fazit 153
7 Praxisorientierte Anwendung moderner Modellordnungsreduktionsverfahren 155
7.1 Einleitung 155
7.2 Modellierung und Anforderung an das Finite-Elemente-Modell 156
7.3 Parameter und Einstellung der Reduktionsalgorithmen 157
7.4 Verringerung der Rechenzeiten und Steigerung der numerischen Effizienz 158
8 Zusammenfassung und Ausblick 159
9 Literaturverzeichnis 161

0 Formel- und Kurzzeichen

Zeichen	Einheit	Bezeichnung
$\boldsymbol{0}$		Nullvektor beziehungsweise Nullmatrix
A	*	allgemeine Amplitude
A_i	*	allgemeine Amplitude am Punkt i
A_A	$mm^{-1} \cdot s^2$	Amplitude des Beschleunigungsfrequenzgangs
A_{dB}	dB	logarithmisch dargestellte allgemeine Amplitude
A_P	dB	Amplitude des Amplitudenfrequenzgangs
$\boldsymbol{A}$	*	allgemeine Dynamikmatrix
$\tilde{\boldsymbol{A}}$	*	allgemeine Matrix
$\check{\boldsymbol{A}}$	*	blockstrukturierte allgemeine Matrix
$\boldsymbol{A}_{ZR}$	*	Dynamikmatrix bzw. Zustandsmatrix
$\boldsymbol{A}_{ZR,red}$	*	reduzierte Dynamikmatrix bzw. Zustandsmatrix
$\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod}$	*	reduzierte modifizierte Dynamikmatrix bzw. Zustandsmatrix
a_i		Parameter des Approximationspolynoms
$\boldsymbol{B}$	*	allgemeine Erreger- beziehungsweise Eingangsmatrix
$\boldsymbol{B}_L$	*	reduzierte Eingangsmatrix mit der Dimension L
$\check{\boldsymbol{B}}$	*	blockstrukturierte allgemeine Eingangsmatrix
$\boldsymbol{B}_{red}$	*	reduzierte Erreger- beziehungsweise Eingangsmatrix
$\boldsymbol{B}_{ZR}$	*	Eingangsmatrix im Zustandsraum
$\boldsymbol{B}_{ZR,red}$	*	reduzierte Eingangsmatrix im Zustandsraum
B_W		Bandbreite einer Matrix
b_{FS}	m	Breite der Führungsschiene
b_i		Parameter des Approximationspolynoms
b_{TK}	m	Breite des Tragkörpers vom Führungsschuh
$\boldsymbol{b}$	*	allgemeiner Eingangsvektor
C_{dyn}	N	dynamische Tragzahl
$\boldsymbol{C}$	*	allgemeine Ausgangsmatrix
$\check{\boldsymbol{C}}$	*	blockstrukturierte allgemeine Ausgangsmatrix
$\boldsymbol{C}_K$	*	Kopplungsmatrix im Zustandsraum
$\boldsymbol{C}_L$	*	reduzierte Ausgangsmatrix mit der Dimension L
$\boldsymbol{C}_q$	m	Ausgangsmatrix der Position
$\boldsymbol{C}_{\dot{q}}$	$m \cdot s^{-1}$	Ausgangsmatrix der Geschwindigkeit
$\boldsymbol{C}_{\ddot{q}}$	$m \cdot s^{-2}$	Ausgangsmatrix der Beschleunigung
$\boldsymbol{C}_{q,red}$	m	reduzierte Ausgangsmatrix der Position
$\boldsymbol{C}_{\dot{q},red}$	$m \cdot s^{-1}$	reduzierte Ausgangsmatrix der Geschwindigkeit
$\boldsymbol{C}_{\ddot{q},red}$	$m \cdot s^{-2}$	reduzierte Ausgangsmatrix der Beschleunigung
$\boldsymbol{C}_{ZR}$	*	Ausgangsmatrix im Zustandsraum
$\boldsymbol{C}_{ZR,red}$	*	reduzierte Ausgangsmatrix im Zustandsraum
c_i		Parameter des Approximationspolynoms

$\boldsymbol{D}$	*	gesamte Durchgangsmatrix
$\check{\boldsymbol{D}}$	*	Durchgangsmatrix des Systems zweiter Ordnung
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{DA}}$	*	Durchgangsmatrix mit Durchgangsanteil
$\boldsymbol{D}_{\ddot{q}}$	*	Durchgangsmatrix mit Beschleunigungsanteil
$\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR}}$	*	Durchgangsmatrix im Zustandsraum
d	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungskoeffizient
d_i		Parameter des Approximationspolynoms
d_{S0}	m	Nenndurchmesser der Gewindespindel
E	$\mathrm{N \cdot mm^{-1}}$	Elastizitätsmodul
$\boldsymbol{E}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungsmatrix
$\check{\boldsymbol{E}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	symmetrische Dämpfungsmatrix bzw. viskose Dämpfungsmatrix
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{HH}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungsmatrix der Hauptfreiheitsgrade
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{HN}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungsmatrix der gekoppelten Haupt- und Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungskopplungsmatrix
$\boldsymbol{E}_k$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Elementdämpfungsmatrix
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{NN}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungsmatrix der Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{NH}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Dämpfungsmatrix der gekoppelten Haupt- und Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	modale Dämpfungsmatrix
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}$		Hilfsgröße
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{red}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	reduzierte Dämpfungsmatrix
$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	Einheitsmatrix mit der Dimension des Zustandsraums
$\boldsymbol{E}_{\vartheta}$	$\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$	frequenzabhängige Dämpfungsmatrix
e		Eulerische Zahl
e_{A}	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	diskrete Dämpfer des Auflagers
e_{H}	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	horizontale Dämpfung
e_{K}	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	diskrete Dämpfer der Kopplung
e_{V}	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$	vertikale Dämpfung
F	N	Einzelkraft
$\boldsymbol{F}$	N	Kraftvektor
F_{A}	N	Anregungskraft
$\hat{F}_{\mathrm{A}}$	N	Anregungskraftamplitude
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}$	N	Beschleunigungskraftvektor
F_{AY}	N	Anregungskraft in Y-Richtung
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Stör}}$	N	Störkraft
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$	N	Reaktionskraft am Tragkörper
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{K}}$	N	Reaktionskraft der Koppelknoten
F_{X}	N	Kraft in X-Richtung
F_{Y}	N	Kraft in Y-Richtung
F_{Z}	N	Kraft in Z-Richtung
f	Hz	Frequenz
f_{B}	Hz	Frequenzbereichsgrenze

f_{Bo}	Hz	Obere Frequenzbereichsgrenze
f_{Bu}	Hz	Untere Frequenzbereichsgrenze
f_{FE}	Hz	numerisch ermittelte Eigenfrequenz aus der harmonischen Analyse
f_{GI}	Hz	mittels Impulshammer gemessene Eigenfrequenz
f_{GS}	Hz	mittels Shakeranregung gemessene Eigenfrequenz
f_{Hf}	Hz	Eckfrequenz des Hochpassfilters
f_I	Hz	Frequenzinkrement, Stützstellen im Frequenzbereich
f_S	Hz	Abtastfrequenz
f_{St}	Hz	Streuung der gemessenen Eigenfrequenz
f_Δ	Hz	Frequenzunterschied
G	*	Impulsantwort im Frequenzraum
$\boldsymbol{G}$	$Ns \cdot m^{-1}$	Kreiselmatrix, gyroskopische Matrix
$\boldsymbol{G}_0$		Hilfsgröße
$\boldsymbol{G}_B$	*	Fehleranteil des Eingangs aus der Impulsantwort
$\boldsymbol{G}_e$	*	Reduktionsfehlers aus der Impulsantwort des Gesamtsystems
$\boldsymbol{G}_C$	*	Fehleranteil des Ausgangs aus der Impulsantwort
G_{red}	*	Impulsantwort des reduzierten Systems im Frequenzraum
g	*	Impulsantwort im Zeitbereich
$\mathcal{H}$		Hilbertraum
$\boldsymbol{H}$	*	Übertragungsfunktion aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung
$\boldsymbol{H}_A$	$m \cdot s^{-2} \cdot N^{-1}$	Beschleunigungsübertragungsfunktion
$\boldsymbol{H}_{A,ref}$	$m \cdot s^{-2} \cdot N^{-1}$	Beschleunigungsübertragungsfunktion des Referenzsystems
$\boldsymbol{H}_{A,red}$	$m \cdot s^{-2} \cdot N^{-1}$	Beschleunigungsübertragungsfunktion des reduzierten Systems
$\boldsymbol{H}_L$	*	Übertragungsfunktion des reduzierten Systems mit der Dimension L
$\boldsymbol{H}_P$	$m \cdot N^{-1}$	Positionsübertragungsfunktion; Nachgiebigkeitsfrequenzgang
$\boldsymbol{H}_{P,ref}$	$m \cdot N^{-1}$	Positionsübertragungsfunktion des Referenzsystems
$\boldsymbol{H}_V$	$m \cdot s^{-1} \cdot N^{-1}$	Geschwindigkeitsübertragungsfunktion
$\boldsymbol{H}_{ZR}$		Übertragungsfunktion aus einer Zustandsraumgleichung
h	s	Rechenschrittweite
h_0		Hilfsgröße für die Übertragungsfunktion
h_1		Hilfsgröße für die Übertragungsfunktion
h_{FS}	m	Höhe der Führungsschiene
$h_{FS,W}$	m	Ersatzhöhe der Führungsschiene
h_i		Hilfsgröße für die Übertragungsfunktion
h_{TK}	m	Höhe des Tragkörpers
$h_{TK,W}$	m	Ersatzhöhe des Tragkörpers
$\boldsymbol{I}$		Einheitsmatrix
i		Laufvariable
i_{max}		maximale Iterationsanzahl
j		imaginäre Einheit
j		Laufvariable

K_V	s^{-1}	Geschwindigkeitsverstärkungsfaktor des Lageregelkreises
$K_{Z,A}$		Konditionszahl der Dynamikmatrix
$K_{Z,A,r}$		Konditionszahl der reduzierten Dynamikmatrix
$K_{Z,A,r,mod}$		Konditionszahl der modifizierten reduzierten Dynamikmatrix
$K_{Z,E}$		Konditionszahl der Dämpfungsmatrix
$K_{Z,E,r}$		Konditionszahl der reduzierten Dämpfungsmatrix
$K_{Z,K}$		Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix
$K_{Z,K,r}$		Konditionszahl der reduzierten Steifigkeitsmatrix
$K_{Z,M}$		Konditionszahl der Massenmatrix
$K_{Z,M,r}$		Konditionszahl der reduzierten Massenmatrix
$\boldsymbol{K}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix
$\check{\boldsymbol{K}}$	$N \cdot m^{-1}$	symmetrische Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{K}_{FE,i}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix des unveränderten FE-Modells vom i-ten Teilsystem
$\boldsymbol{K}_{FE,i,mod}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix des modifizierten FE-Modells vom i-ten Teilsystems
$\boldsymbol{K}_{HH}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix der Hauptfreiheitsgrade
$\boldsymbol{K}_{HN}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix der gekoppelten Haupt- und Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{K}_{K}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitskopplungsmatrix
$\boldsymbol{K}_{K,FE}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitskopplungsmatrix in der nodalen FE-Darstellung
$\boldsymbol{K}_{K,red}$	$N \cdot m^{-1}$	reduzierte Steifigkeitskopplungsmatrix
$\boldsymbol{K}_{K,r,mod}$	$N \cdot m^{-1}$	modifizierte reduzierte Steifigkeitskopplungsmatrix
$\boldsymbol{K}_{K,r,mod,I}$	$N \cdot m^{-1}$	modifizierte reduzierte Steifigkeitskopplungsmatrix der ersten Stufe
$\boldsymbol{K}_{NN}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix der Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{K}_{NH}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix der gekoppelten Haupt- und Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{K}_{RCM,i}$	$N \cdot m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix des umsortierten FE-Modells vom i-ten Teilsystem
$\boldsymbol{K}_{m}$	$N \cdot m^{-1}$	modale Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{K}_{red}$	$N \cdot m^{-1}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix
$\mathcal{K}$		Krylov-Unterraum
$\mathcal{K}_{Li}$		linker Krylov-Unterraum
$\mathcal{K}_{Re}$		rechter Krylov-Unterraum
k		Laufvariable
k_A	$N \cdot m^{-1}$	Federsteifigkeit des Auflagers
k_a	$N \cdot m^{-1}$	axiale Steifigkeit
k_{FLa}	$N \cdot m^{-1}$	axiale Steifigkeit des Festlagers
k_{FLk}	$Nm\ rad^{-1}$	Kippsteifigkeit des Festlagers
k_H	$N \cdot m^{-1}$	horizontale Steifigkeit
k_K	$N \cdot m^{-1}$	Federsteifigkeit der Kopplung
$k_{KGTa,ges}$	$N \cdot m^{-1}$	axiale Gesamtsteifigkeit des Kugelgewindetriebs
k_{La}	$N \cdot m^{-1}$	axiale Lagersteifigkeit
k_{Ma}	$N \cdot m^{-1}$	axiale Steifigkeit der Kugelgewindemutter
k_{Mt}	$Nm \cdot rad^{-1}$	Torsionssteifigkeit der Kugelgewindemutter
k_r	$N \cdot m^{-1}$	radiale Steifigkeit

k_{Sa}	$N \cdot m^{-1}$	axiale Steifigkeit der Kugelrollspindel
k_{St}	$Nm \cdot rad^{-1}$	Torsionssteifigkeit der Kugelrollspindel
k_t	$Nm \cdot rad^{-1}$	Torsionssteifigkeit
k_V	$N \cdot m^{-1}$	vertikale Steifigkeit
L		Dimension des reduzierten Systems
L_{ESVD}		Anzahl der zu berechnenden Blockmomente $\boldsymbol{m}_k$
L_{MIMO}		Dimension des reduzierten MIMO-Systems
$L_{ZR,MIMO,r,mod}$		Dimension des modifizierten reduzierten MIMO-Systems im Zustandsraum
L_1		Dimension des reduzierten Systems 1
L_2		Dimension des reduzierten Systems 2
$\boldsymbol{L}$	*	Koppelmatrix
$\boldsymbol{L}_{ij}$	*	Teilmatrix der Koppelmatrix
l_{eff}	m	effektive Länge
l_{FS}	m	lastbeaufschlagte Länge der Führungsschiene
l_{mess}	m	Messauflösung
l_{TK}	m	Länge des Tragkörpers
l_Δ	m	Differenzlänge
l		diskreter Ausgangspunkt
$\boldsymbol{l}$	*	Linkseigenvektor
M	N·m	Drehmoment
M		Moment
M_i		Hilfsvariable für die Berechnung des Entwicklungspunkts
$\boldsymbol{M}$	kg; $kg \cdot m^2$	Massenmatrix
$\boldsymbol{M}_{HH}$	kg; $kg \cdot m^2$	Massenmatrix der Hauptfreiheitsgrade
$\boldsymbol{M}_{HN}$	kg; $kg \cdot m^2$	Massenmatrix der Haupt- und Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{M}_{NN}$	kg; $kg \cdot m^2$	Massenmatrix der Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{M}_{NH}$	kg; $kg \cdot m^2$	Massenmatrix der Haupt- und Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{M}_m$	kg	modale Massenmatrix
$\boldsymbol{M}_{red}$	kg; $kg \cdot m^2$	reduzierte Massenmatrix
M_X	N·m	Drehmoment um die X-Achse
M_Y	N·m	Drehmoment um die Y-Achse
m		diskreter Ausgangspunkt
m	kg	Masse
m_0		Moment des ersten Approximationsgliedes
m_1		Moment des zweiten Approximationsgliedes
m_B	kg	Massen des Maschinenbetts
m_k		Moment des k-ten Approximationsgliedes
m_S	kg	Schlittenmasse
$\boldsymbol{m}_A$		Ausgangsmomentenmatrix
$\boldsymbol{m}_E$		Eingangsmomentenmatrix
$\boldsymbol{m}_k$		blockstrukturierter Momentenmatrix des k-ten Approximationsgliedes

N		Dimension des Systems
N_{AK}		Anzahl der Ausgangskoppelknoten
N_{EK}		Anzahl der Eingangskoppelknoten
N_{FHG}		Freiheitsgradanzahl
N_{KA}		Knotenanzahl
$N_{KA,MS}$		Knotenanzahl für das Messsystem
$N_{KFHG,FS}$		Koppelfreiheitsgradanzahl der Führungsschiene
$N_{KFHG,ges}$		Gesamtanzahl der Koppelfreiheitsgrade
$N_{KFHG,KGM}$		Koppelfreiheitsgradanzahl der Kugelgewindemutter
$N_{KFHG,KGS}$		Koppelfreiheitsgradanzahl der Kugelgewindespindel
$N_{KFHG,TK}$		Koppelfreiheitsgradanzahl der Führungsschuhe
N_{max}		maximaler Zahlenwert der Matrix
$N_{ME,E}$		Einträge der Dämpfungsmatrix
$N_{ME,K}$		Einträge der Steifigkeitsmatrix
$N_{ME,M}$		Einträge der Massenmatrix
N_{min}		minimaler Zahlenwert der Matrix
$N_{2,A}$		Spektralnorm der Dynamikmatrix
$N_{2,A,mod}$		Spektralnorm der modifizierten Dynamikmatrix
$N_{2,A,r,mod}$		Spektralnorm der modifizierten reduzierten Dynamikmatrix
$N_{2,E}$		Spektralnorm der Dämpfungsmatrix
$N_{2,E,r}$		Spektralnorm der reduzierten Dämpfungsmatrix
$N_{2,K}$		Spektralnorm der Steifigkeitsmatrix
$N_{2,K,r}$		Spektralnorm der reduzierten Steifigkeitsmatrix
$N_{2,M}$		Spektralnorm der Massenmatrix
$N_{2,M,r}$		Spektralnorm der reduzierten Massenmatrix
$N_{2,v}$		Spektralnorm des Momentenvektors
$\boldsymbol{N}$	$N \cdot m^{-1}$	schiefsymmetrische Steifigkeitsmatrix
n		Hilfsgröße
$\boldsymbol{n}$		Normalenvektor
n_{EA}		Elementenanzahl
n_{EQ}		Elementenqualität
$\bar{n}_{EQ}$		Mittelwert der Elementenqualität
$\boldsymbol{O}$		Vektorraum
P		Dimension des Eingangs
P	°	Phase
P_A	°	Phasenverlauf des Beschleunigungsfrequenzgangs
P_{h0}	m	Nennsteigung der Gewindespindel
P_P	°	Phasenverlauf des Amplitudenfrequenzgangs
P_{SX}	m	X-Schlittenposition
P_{SY}	m	Y-Schlittenposition
P_{SZ}	m	Z-Schlittenposition

$P_{S\Delta}$	m	Betrag einer relativen Änderung der Schlittenposition
$\boldsymbol{P}$	*	Steuerbarkeitsmatrix
$\boldsymbol{P}_i$	*	matrixwerte Hilfsgröße
$\tilde{\boldsymbol{P}}$		allgemeine Projektionsmatrix
$\boldsymbol{P}_{bal}$		Projektionsmatrix des balancierten Abschneidens
$\boldsymbol{P}_{CMS}$		Projektionsmatrix der gemischten Reduktion
$\boldsymbol{P}_K$	m	Position der Koppelknoten
$\boldsymbol{P}_{modal}$		Projektionsmatrix der modalen Reduktion
$\boldsymbol{P}_{PG}$		Petrov-Galerkin-Projektion
$\boldsymbol{P}_{SR}$		Projektionsmatrix der statischen Reduktion
$\boldsymbol{P}_T$		Koppelknotenposition am Tragkörper
p		Dimension des Eingangs im Zustandsraum
$\boldsymbol{p}$	N; Nm	Erregervektor
$\boldsymbol{p}_H$	N; Nm	Erregervektor der Hauptfreiheitsgrade
$\boldsymbol{p}_N$	N; Nm	Erregervektor der Nebenfreiheitsgrade
$\boldsymbol{p}_m$	N; Nm	modale Anregung
Q		Dimension des Ausgangs
$\boldsymbol{Q}$		Beobachtbarkeitsmatrix
$\boldsymbol{Q}_{bal}$		balancierte Beobachtbarkeitsmatrix
$\boldsymbol{Q}_m$	*	reellwertige Modalmatrix
$\boldsymbol{Q}_{red}$	*	reduzierte Modalmatrix
q		Dimension des Ausgangs im Zustandsraum
$\boldsymbol{q}$	m	Verschiebungsvektor
$\hat{\boldsymbol{q}}$	m	Amplitudenvektor der Verschiebung
$\dot{\boldsymbol{q}}$	$m \cdot s^{-1}$	Geschwindigkeitsvektor
$\ddot{\boldsymbol{q}}$	$m \cdot s^{-1}$	Beschleunigungsvektor
$\boldsymbol{q}_{red}$	m	reduzierter Verschiebungsvektor
$\dot{\boldsymbol{q}}_{red}$	$m \cdot s^{-1}$	reduzierter Geschwindigkeitsvektor
$\ddot{\boldsymbol{q}}_{red}$	$m \cdot s^{-2}$	reduzierter Beschleunigungsvektor
R		Stabilitätsgebiet
$\boldsymbol{R}$	*	untere Dreiecksmatrix
$\boldsymbol{r}$	*	Rechtseigenvektor
$\tilde{\boldsymbol{r}}_0$		allgemeiner Startvektor
$\tilde{\boldsymbol{r}}_1$		erster rekursiv berechnete Krylov-Base
$\tilde{\boldsymbol{r}}_i$		i-ter rekursiv berechnete Krylov-Base
S_{index}		Spaltenindex einer Matrix
$\boldsymbol{S}$	*	obere Dreiecksmatrix
$\boldsymbol{S}_A$		Diagonalmatrix der Singulärwerte des Ausgangs
$\boldsymbol{S}_E$		Diagonalmatrix der Singulärwerte des Eingangs
s	s^{-1}	Laplace-Variable beziehungsweise Entwicklungspunkt
s_k	s^{-1}	k-ter Entwicklungspunkt

s_0	s^{-1}	Entwicklungspunkt an der Stelle Null
$\boldsymbol{T}$		Transformationsmatrix
$\boldsymbol{T}_b$	*	Transformationsmatrix zur Entfernung nicht gewünschter Zustände
$\boldsymbol{T}_{bal}$	*	Zustandsprojektionsmatrix zum Balancieren
$\boldsymbol{T}_d$		Ähnlichkeitstransformationsmatrix
$\boldsymbol{T}_{mod}$	*	Transformationsmatrix in den modalen Raum zur Entfernung der instabilen Zustände
t	s	Zeit
t_{mess}	s	Messzeit
t_R	s	Rechenzeit
t_V	s	Berechnungszeit des Reduktionsvorgangs
t_0	s	Startzeitpunkt
$\boldsymbol{t}$		Tangentenvektor
$\boldsymbol{U}$	*	unitäre Matrix
$\tilde{\boldsymbol{U}}$		unitäre linke Singulärvektorenmatrix
$\boldsymbol{U}_A$		linke Singulärvektorenmatrix des Ausgangs
$\boldsymbol{U}_E$		linke Singulärvektorenmatrix des Eingangs
$\boldsymbol{u}$	*	Systemeingangsvektor
$\boldsymbol{u}_B$	*	Eingangsvektor des Maschinenbetts
$\boldsymbol{u}_{dyn}$	*	dynamischer Verschiebungsvektor
$\boldsymbol{u}_H$	*	Hauptfreiheitsgrade des Eingangsvektors
$\boldsymbol{u}_N$	*	Nebenfreiheitsgrade des Eingangsvektors
$\boldsymbol{u}_{red}$	*	reduzierter Verschiebungsvektor
$\boldsymbol{u}_{res}$	*	Residuenvektor
$\boldsymbol{u}_S$	*	Eingangsvektor des Schlittens
$\boldsymbol{u}_{ZR}$	*	Eingangsvektor im Zustandsraum
$V_{B,max}$	m	maximaler Verfahrbereich
$\boldsymbol{V}$		Basenvektorenmatrix bzw. rechter Krylov-Unterraum
$\boldsymbol{V}_A$		orthogonale Ausgangsbasenvektorenmatrix
$\boldsymbol{V}_{A,\delta}$		orthogonale reduzierte Ausgangsbasenvektorenmatrix
$\boldsymbol{V}_A$		orthogonale Eingangsbasenvektorenmatrix
$\boldsymbol{V}_{A,\zeta}$		orthogonale reduzierte Eingangsbasenvektorenmatrix
$\boldsymbol{v}_i$		i-te orthogonaler Basenvektor
$\boldsymbol{W}$		Basenvektorenmatrix bzw. transponierte des linken Krylov-Unterraums
X		globale Koordinate in X-Richtung
X'		lokale Koordinate in X-Richtung
$\boldsymbol{x}$	m	Verschiebungs-, Verlagerungs- oder Positionsvektor
$\boldsymbol{x}_0$	*	Startvektor
$\boldsymbol{x}_L$		L-ter Basisvektor
$\boldsymbol{x}_{rel}$	m	relativer Verlagerungsvektor
$\boldsymbol{x}_{ZR}$	*	Zustandsvektor
$\boldsymbol{x}_{ZR,I}$	m	positionsabhängiger Anteil des Zustandsvektors

$\boldsymbol{x}_{ZR,II}$	$m \cdot s^{-1}$	geschwindigkeitsabhängiger Anteil des Zustandsvektors
$\dot{\boldsymbol{x}}_{ZR}$	*	erste Ableitung des Zustandsvektors
$\boldsymbol{x}_{ZR,red}$	*	reduzierter Zustandsvektor
$\dot{\boldsymbol{x}}_{ZR,red}$	*	erste Ableitung des reduzierten Zustandsvektors
Y		globale Koordinate in Y-Richtung
Y'		lokale Koordinate in Y-Richtung
$\boldsymbol{y}$	*	Ausgangsvektor
$\boldsymbol{y}_B$	*	Ausgangsvektor des Maschinenbetts
$\boldsymbol{y}_S$	*	Ausgangsvektor des Schlittens
$\boldsymbol{y}_{ZR}$	*	Ausgangsvektor im Zustandsraum
Z		globale Koordinate in Z-Richtung
Z'		lokale Koordinate in Z-Richtung
Z_{index}		Zeilenindex einer Matrix
α	s^{-1}	massenproportionaler Dämpfungsfaktor
α_{el}	°	elastische Winkelverlagerung
α_{opt}	s^{-1}	optimaler Entwicklungspunkt
β	s	steifigkeitsproportionaler Dämpfungsfaktor
β_e	s^{-1}	variabler steifigkeitsproportionaler Dämpfungsfaktor
β_i	s^{-1}	konstanter steifigkeitsproportionaler Dämpfungsfaktor
$\boldsymbol{\Gamma}$		Kreuzungsmatrix
γ_0	°	Kontaktwinkel
γ_d	°	Druckwinkel
Δl	m	Auslenkungs- bzw. Längendifferenz
ΔL		Dimensionsdifferenz des reduzierten Systems
Δs_0	s^{-1}	Differenzwert des Entwicklungspunkts
Δt	s	zeitliche Differenz
δ		Dimension der reduzierten Eingangsdimension
δ_d		Anzahl der Dämpfungselemente
δ_{el}	m	elastische Verlagerung
δ_k	Hz	Abklingkoeffizient
ε		Fehler
ε_2		relative Abweichung der Energiedifferenz bzgl. der $\mathcal{H}_2$-Norm
ε_∞		relative Abweichung der Energiedifferenz bzgl. der $\mathcal{H}_\infty$-Norm
ε_{abs}	*	absolute Abweichung
$\overline{\varepsilon}_{abs}$	*	Mittelwert der absolute Abweichung
ε_{App}		Approximationsfehler
ε_G		normierter Fehler bzgl. zweier aufeinander iterativ erstellten Systeme
ε_{rel}		frequenzabhängiger relativer Fehler
ζ		Dimension der reduzierten Ausgangsdimension
ϑ		Dämpfungsgrad
ϑ_k		modaler Dämpfungsgrad

κ_k		Anzahl der Steifigkeitselemente
Λ		logarithmische Dekrement
$\boldsymbol{\Lambda}$	s^{-1}	Diagonalmatrix der Eigenwerte im Zustandsraum
λ	s^{-1}	Eigenwert
λ_{ins}	s^{-1}	Eigenwert die zur Instabilität führen
λ_k	s^{-1}	k-ter Eigenwert mit positivem Realteil
λ_k^*	s^{-1}	k-ter Eigenwert mit negativem Realteil
λ_{max}	s^{-1}	maximaler bzw. größter Eigenwert
$\lambda_{max,red}$	s^{-1}	maximaler Eigenwert der reduzierten Dynamikmatrix
$\lambda_{max,r,mod}$	s^{-1}	maximaler Eigenwert der modifizierten reduzierten Dynamikmatrix
λ_{min}	s^{-1}	minimaler bzw. kleinster Eigenwert
$\lambda_{min,red}$	s^{-1}	minimaler Eigenwert der reduzierten Dynamikmatrix
$\lambda_{min,r,mod}$	s^{-1}	minimaler Eigenwert der modifizierten reduzierten Dynamikmatrix
μ		Produkt aus Rechenschrittweite und Eigenwert
v		Hilfsgröße für die Ähnlichkeitstransformation
ξ		relativer Längenverhältnis
ρ	$kg \cdot mm^{-3}$	Dichte
$\boldsymbol{\Sigma}$	*	Diagonalmatrix mit den Singulärwerten
$\boldsymbol{\Sigma}^*$	*	Diagonalmatrix mit den Hankel-Singulärwerten
σ	s^{-1}	Realteil der Laplace-Variable
σ_E		Standardabweichung der Elementenqualität
σ_ε	*	Standardabweichung der absoluten Abweichung
σ_{HSV}		Hankel-Singulärwerte
σ_{SVD}		Singulärwerte
$\sigma_{SVD,m,A}$		Singulärwerte der Ausgangsmomentenmatix
$\sigma_{SVD,m,E}$		Singulärwerte der Eingangsmomentenmatix
σ_Λ		Standardabweichung des logarithmischen Dekrements
σ_ϑ		Standardabweichung des Dämpfungsgrads
φ	°	Phasenwinkel
$\boldsymbol{\varphi}_i$		Eigenvektor
$\boldsymbol{\Psi}$		Modalmatrix
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz
ω_{dk}	s^{-1}	k-te Kreisfrequenz des gedämpften Systems
$\mathcal{O}$		numerischer Aufwand

*****: Die Einheit der Größe ist abhängig vom Anwendungsfall.

Abkürzungen

BTA	balanciertes Abschneiden (engl.: Balanced Truncation Approximate)
CACE	Computer-Aided-Control-Engineering
CAD	Computer-Aided-Design
CCW	Messrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn (engl.: counter clockwise)
CW	Messrichtung im Uhrzeigersinn (engl.: clockwise)
CNC	computergestützte numerische Steuerung (engl.: Computerized Numerical Control)
DAE	algebraische Differentialgleichung (engl.: Differential Algebraic Equation)
DBS	Digitale Blocksimulation
DGL	Differentialgleichung
DGQ	Deutsche Gesellschaft für Qualität
DIN	Deutsches Institut für Normung
CMS	Component-Mode-Synthesis
engl.	englisch
ESVD	Extended Singular Value Decomposition
FE	finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FHG	Freiheitsgrad
flops	Gleitkommaoperationen je Sekunde (engl.: Floating Point Operations Per Second)
FHG	Freiheitsgrade
HiL	Hardware-in-the-Loop
HiLS	Hardware-in-the-Loop-Simulation
HNA	Hankel-Norm-Approximation
HSV	Hankel-Singulärwert (engl.: Hankel Singular Value)
IWF	Institut für Werkzeugmaschinen und Fabrikbetrieb
KGT	Kugelgewindetrieb
MIMO	Multi-Input-Multi-Output
MK	Mehrkörper
MKS	Mehrkörpersimulation
MOR	Modellordnungsreduktion
MPC	Mehrpunktverbindungen (engl.: Multipoints Constraint)

ODE	gewöhnliche Differenzialgleichung (engl.: Ordinary Differential Equation)
PRIMA	Passive-Reduced-Order-Interconnect-Macromodeling-Algorithm
RBE	Starrkörperelement (engl.: Rigid Body Element)
RGT	Rollengewindetrieb
RK-ICOP	Rational Krylov with Iteratively Calculated Optimal Expansion
RK-OP	Rational Krylov with Optimal Expansion
SFB	Sonderforschungsbereich
SiLS	Software-in-the-Loop-Simulation
SISO	Single-Input-Single-Output
SOAR	Arnoldi-Verfahren zweiter Ordnung (engl.: Second Order Arnoldi)
SPC	Einzelpunktverbindung (engl.: Single Point Constraint)
SPS	speicherprogrammierbare Steuerung
SVD	Singulärwertzerlegung (engl.: Singular Value Decomposition)
TCP	Bearbeitungsschnittstelle (engl.: Tool Center Point)
TF	Übertragungsfunktion (engl.: Transfer Function)
TR	Transregio
VDI	Verband deutscher Ingenieure
ZPG	Nullstellenpoldarstellung (engl.: Zero Pole Gain)
ZR	Zustandsraum
ZRD	Zustandsraumdarstellung

1 Einleitung

Die Entwicklung moderner Werkzeugmaschinen findet unter großem Innovations-, Zeit- und Kostendruck statt. Deshalb ist der Einsatz moderner Simulationstechniken zur Unterstützung und Beschleunigung des Entwicklungsprozesses erforderlich und eine wesentliche Voraussetzung für die Konkurrenzfähigkeit des Werkzeugmaschinenherstellers. Die Simulationstechnik liefert einen großen Beitrag für die Steigerung des Technologievorsprungs, da die Eigenschaften unterschiedlicher, noch nicht gebauter Werkzeugmaschinenvarianten analysiert, überprüft und bewertet werden können. Spätere Maßnahmen an der realen Maschine zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens verursachen einen hohen Zeit- und Kostenaufwand in der Entwicklung. Die Simulation wird somit eingesetzt, um die Produktentwicklung bis zur Inbetriebnahme abzusichern und zu verkürzen [ZAE07, HOF08].

Die Abbildung einer realen Werkzeugmaschine mittels numerischer Berechnungsverfahren wird als „virtuelle Werkzeugmaschine“ bezeichnet [ALT05]. Auch durch die enge Verknüpfung der unterschiedlichen Ingenieursdisziplinen steigt der Komplexitätsgrad der Werkzeugmaschine stetig an. Um das Verhalten einer Gesamtmaschine analysieren zu können, werden gemeinsame Simulationen unter Berücksichtigung der Ingenieursdisziplinen notwendig [GEI06]. Diese Simulationsverfahren werden jedoch bei den kleinen und mittelständischen Unternehmen des Werkzeugmaschinenbaus nicht im vollen Umfang eingesetzt, da der Einsatz solcher Systeme mit hohen Kosten verbunden ist und besondere Qualifikation der Mitarbeiter erfordert [KIP09]. Hinzu kommt, dass die angewendeten Simulationsmethoden und -modelle entweder nur für Teilbereiche des Gesamtsystems gelten oder dass nur einzelne diskret stationäre Positionen im Arbeitsraum betrachtet werden. Eine ganzheitliche Betrachtung ist aufgrund des numerischen Aufwands bisher nicht möglich. In der Konzeptphase und bei der darauf folgenden Beurteilung der Gestaltungs- und Bemessungsvarianten sollte der Modellierung- und Berechnungsaufwand so gering wie möglich sein [GRO04], um die Kosten zu reduzieren und in kürzester Zeit Entwicklungsentscheidungen zu treffen.

Bei dem eigenschaftsorientierten Entwurf werden in den frühen Entwicklungsphasen bereits im industriellen Umfang rechnergestützte Verfahren angewendet. Beispielsweise werden die Zeichnungen mit einem Konstruktionsprogramm, dem sogenannten Computer-Aided-Design (CAD) erstellt, um sie dann mit einer Finite-Elemente-Methode (FEM) zu beurteilen [VAJ09]. Die Leistungsfähigkeit der Werkzeugmaschine wird in großem Maße durch die mechanischen Eigenschaften bestimmt [KUN13]. Folglich werden das statische Verformungsverhalten sowie die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Schwingungsformen der Gestellstrukturen und Antriebs-Lager-Systeme analysiert und bewertet. In den unterschiedlichen Entwicklungsphasen werden bei der Auslegung von Mechanik, Antriebssystemen und Maschinensteuerung unterschiedliche Anforderungen an das Simulationsmodell gestellt. Um eine hohe Effizienz zu erreichen, dürfen die Auslegungsschritte der einzelnen Komponenten nicht mehr getrennt, sondern müssen integrativ betrachtet werden. Für eine höhere Effizienz der gekoppelten Simulation ist die Verwendung von reduzierten Modellen vorteilhaft [RUD12].

Mit den Verfahren der Modellordnungsreduktion (MOR) werden hochdimensionale Modelle, zum Beispiel aus dem Finite-Elemente-Modell, reduziert. Diese Verfahren haben das Ziel, sehr große, komplexe und dynamische Systemmodelle durch kleinere Systemmodelle zu approximieren. Dabei sollen grundlegende Eigenschaften des Referenzmodells, beispielsweise die Stabilität und Passivität sowie die Ergebnisgüte, nicht verändert werden. Mit diesen Modellen wird die Möglichkeit geschaffen, eine zeitreduzierte Systemsimulation durchzuführen [MAG12].

Bei der Analyse der prozessgerechten Bewegung der Werkzeugmaschinenachsen können sich die einzelnen, in sich zumeist linearelastischen Baugruppen unter der Wirkung der Antriebe relativ zueinander bewegen. Diese Relativbewegungen führen bei der Werkzeugmaschine zu einer strukturellen Veränderung und damit zu Verhaltensänderungen der Bearbeitungsschnittstelle, also der Werkzeugspitze des sogenannten Tool-Center-Points (TCP). Um diese Strukturveränderung numerisch abzubilden, muss das Modell eine hohe Anzahl von Ein- und Ausgängen zur Verfügung stellen, um die kontinuierliche, positionsabhängige Änderung der Eingriffs- und Koppelverhältnisse zwischen den einzelnen, relativ zueinander bewegten Baugruppen einer Werkzeugmaschine wiederzugeben [SIE08]. Bisher werden hochdimensionale Ein- und Ausgangsräume für die Verhaltensanalyse von Werkzeugmaschinen nicht eingesetzt. In dieser Arbeit wird eine Methode der effizienten Reduktion von hochdimensionalen Modellen inklusive hochdimensionaler Ein- und Ausgangsräume erarbeitet.

Im Kapitel „Stand der Technik und Grundlagen“ wird ein Abriss der heute im Werkzeugmaschinenbau typischerweise eingesetzten numerischen Berechnungstechnologien vorgestellt. Dieses Kapitel beinhaltet ebenfalls die numerische Modellierung, bei der auf die Methoden zur Modellierung der kompletten Werkzeugmaschine sowie einzelner Komponenten eingegangen wird. Durch die Modellierungsvorgehensweise entstehen Restriktionen für die Modellordnungsreduktion. In dem Unterkapitel „Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren für Werkzeugmaschinen“ wird eine Zusammenstellung der grundlegenden mathematischen Beziehungen der dabei zum Einsatz kommenden numerischen Berechnungsverfahren dargelegt. Darauf folgend werden die unterschiedlichen Verfahrensvarianten für die jeweilige Problemstellung erläutert.

In der vorliegenden Arbeit werden die Themengebiete „Werkzeugmaschinenmodellierung“, „Modellordnungsreduktion“ und „Simulationsmodellkopplung für die mechatronische Simulation“ für die Realisierung von Verfahrbewegungen behandelt. Die Verbindung zwischen diesen Bereichen besteht darin, dass die komplexen, hochdimensionalen Werkzeugmaschinenmodelle mittels Modellordnungsreduktionsverfahren in niedrigdimensionale Modelle überführt werden. Diese reduzierten Teilmodelle werden dann für die Analyse der Werkzeugmaschine im kompletten Verfahrbereich gekoppelt. Bei der Kopplung dieser niedrigdimensionalen Modelle werden die Kopplungsbedingungen im FE-Modell berücksichtigt, um dem Fachmann einen einfacheren Zugang zu dieser Materie zu gewähren. Da diese Modelle jedoch hochdimensionale Ein- und Ausgangsräume besitzen, können die bisherigen Verfahren der Modellordnungsreduktion nicht angewendet werden. In dieser Arbeit wird die Problematik der hochdimensionalen Ein- und Ausgangsräume gelöst.

Die vorliegende Arbeit fördert den Einsatz von zeiteffizienten Simulationsverfahren in der Entwicklung, da Automatisierungsvarianten für die Erstellung von niedrigdimensionalen Modellen mittels moderner Modellordnungsreduktionsverfahren zur Verfügung gestellt werden. Die bisherigen Restriktionen der Modellordnungsreduktionsverfahren bezüglich der Anzahl der Ein- und Ausgänge des Systems werden stark vermindert, so dass eine praktische Durchführbarkeit gewährleistet wird. Durch dieses Zusammenspiel wird eine numerisch günstige, gemeinsame Simulation von Teilsystemen ermöglicht, ohne die Restriktion der stationären Betrachtung der Achsenposition im Arbeitsraum.

2 Stand der Technik und Grundlagen

2.1 Entwicklungsphasen der Werkzeugmaschine bis zur Abnahme

Der Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen ist in den jeweiligen Unternehmen unterschiedlich strukturiert, abhängig von der Firmengröße, der Mitarbeiterqualifikation und der Unternehmensstrategie sind die einzelnen Entwicklungsphasen verschieden stark ausgeprägt [KIP09]. In dieser Arbeit wird nicht die klassische Einteilung der Maschinenentwicklungsphasen nach der VDI-Richtlinie 2221 verwendet, da dort die Simulationsmethoden im Vordergrund stehen und diese phasenübergreifend und schon in den frühen Phasen eingesetzt werden [VDI2221]. Stattdessen werden in einem allgemeinen Überblick die einzelnen Entwicklungsphasen dargestellt, wie sie in unterschiedlicher Ausprägungsform in den Unternehmen stattfinden können. Ein grafischer Überblick wird in Bild 2-1 gegeben.

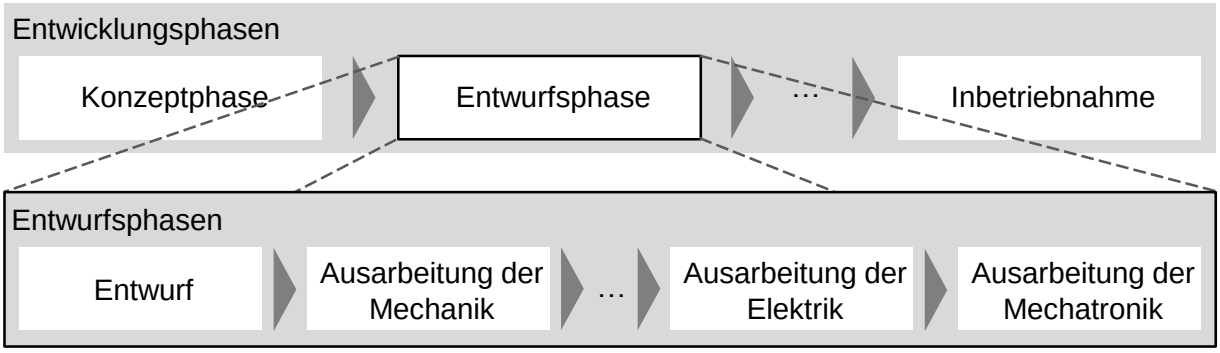


Bild 2-1: Überblick der Entwicklungsphasen bis zur Inbetriebnahme

Die an die Werkzeugmaschinen gestellten Anforderungen resultieren aus dem Lastenheft und dem zu erfüllenden Fertigungsprozess. In der Konzeptphase werden passende Wirkprinzipien und die Kinematik für die zu entwickelnde Maschine ausgewählt. In dieser Phase sind neben dem Lastenheft jedoch kaum Details der zukünftigen Maschine bekannt. In der Entwurfsphase werden das grobe mechanische, elektrische und regelungstechnische Verhalten der unterschiedlichen Entwürfe einander gegenübergestellt und die Grundlagen der Bauteildimensionierung geschaffen [ALB95].

In den darauffolgenden Phasen werden die unterschiedlichen Komponenten detailliert ausgearbeitet und auf der Komponentenebene eine Optimierung angestrebt [FON00, UHL06]. Die Teilsysteme sind im Einzelfall so aufeinander abzustimmen, dass unter Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen das Gesamtergebnis optimiert ist. Trotz nicht korrekter Modellparameter, wie beispielsweise die Steifigkeiten oder die Dämpfung, können relative Änderungen der Gesamteigenschaften abgeschätzt werden, da für die Approximation lineare Zusammenhänge gelten [WIT07].

In der Ausarbeitung der Mechanik werden die mechanischen Komponenten mittels CAD detailliert erstellt und mit Hilfe von Simulationen für unterschiedliche Lastfälle bewertet und bezüglich unterschiedlicher Kriterien aus den Werkzeugmaschinenanforderungen optimiert. In dieser Phase werden die geometrische Genauigkeit, die statische Steifigkeit und die strukturellen Eigenfrequenzen bestimmt und festgelegt. Durch den Verzicht auf physikalische Prototypen können hier Kosten und Entwicklungszeiten eingespart werden [BRE08, UHL12c], da vorzeitig die Eigenschaften vorbestimmt und der jeweiligen Anforderung entsprechend optimiert werden [BRE02, UHL06]. Dazu wird ein virtueller Prototyp benötigt, der alle relevanten

Eigenschaften abbildet. Die Maschinenelemente und -komponenten wie Hauptantriebe und Führungssysteme inklusive Lager haben einen markanten Einfluss auf die einsatzrelevanten Eigenschaften der Werkzeugmaschine [BRE02].

Aus den gegebenen Anforderungen entsteht ein komplexer Aufbau der Maschine, wodurch weitere Herausforderungen an das funktionale Zusammenwirken der einzelnen Baugruppen gestellt werden. Für eine effektive Konfiguration, Fertigung und Montage werden Werkzeugmaschinen daher bevorzugt modular konzipiert [ALB95]. Dies hat den Vorteil, dass durch den Austausch einiger Module flexibel auf unterschiedliche Ansprüche der Maschine reagiert werden kann [NEU12]. Dieser modulare Aufbau kann bei der Simulation ausgenutzt werden [DAD12], indem Verhaltensmodelle der einzelnen Module erstellt werden, was wiederum den Berechnungs- und Speicherbedarf massiv reduziert [ANT05, BON11]. Eine sehr effektive Methode zur Erstellung von Verhaltensmodellen ist die Verwendung von MOR-Verfahren.

Während der Ausarbeitung der Elektrik werden dann einige Arbeits- und Entwicklungsschritte durchgeführt, die das Ziel haben, die Energieversorgung und Funktion der Maschine sicherzustellen. Dazu werden die elektrischen Komponenten ausgelegt und bewertet. Aufgrund des disziplinspezifischen Wissens besitzt jede Fachrichtung ihre eigene Beschreibungsvariante und Nomenklatur. Das hat zur Folge, dass die jeweiligen Ersatzmodelle auf eine andere Art und Weise aufgebaut werden und somit für die andere Disziplin nicht intuitiv verständlich sind. Für die Untersuchung der elektrischen Komponenten werden einfache Ersatzmodelle der komplexen mechanischen Modelle benötigt, die mittels MOR-Verfahren zur Verfügung gestellt werden können.

In der Phase der Ausarbeitung der Mechatronik werden die einzelnen Teilsysteme miteinander gekoppelt und die Regelungsparameter eingestellt [KIP09]. Außerdem wird das mechatronische Systemverhalten bezüglich der Dynamik und des Bewegungsverhaltens optimiert. Bei der Änderung der einzelnen Komponenten ist jeweils zu überprüfen, inwieweit sich diese auf das komplette System auswirken. Die letzte Phase des Entwicklungsprozesses stellt die Erprobung und Inbetriebnahme der Werkzeugmaschine dar. Hier wird die Funktionsfähigkeit der Maschine gegenüber dem Kunden nachgewiesen. Die Inbetriebnahme stellt einen großen und unkalkulierbaren Zeit- und Kostenfaktor dar. Häufig werden erst hier Entwicklungsfehler aufgedeckt, die dann im Nachhinein kostenintensiv behoben werden müssen. Diese Phase bietet jedoch die Chance, Verzögerungen aus der Entwicklungs- und Montagephase zu kompensieren, um Strafzahlungen bei eventuell nicht eingehaltener Termintreue zu umgehen [WAB14]. Somit führt eine Optimierung in dieser Phase direkt zur Verringerung der gesamten Kosten und des Zeitbedarfs [SPI09].

Durch die parallele Einsetzung der virtuellen Inbetriebnahme im Entwicklungsprozess lässt sich die Phase der Inbetriebnahme beim Kunden verkürzen [PRI05]. Für die virtuelle Inbetriebnahme werden die Hardware-in-the-Loop-Simulation (HiLS) beziehungsweise auch die Software-in-the-Loop-Simulation (SiLS) eingesetzt. Bei der HiLS werden physikalische Maschinenelemente mit einem Steuerungsmodell gekoppelt. In der SiLS dagegen wird das Steuerungsmodell mit einem Simulationsmodell der Werkzeugmaschine verbunden. Dieses Simulationsmodell kann ein Verhaltens- oder ein Kinematikmodell beinhalten. Durch das Ersetzen von realen Komponenten durch virtuelle Komponenten werden bereits in der frühen Phase des Entwicklungsprozesses diese Komponenten getestet. So werden bei der HiLS mechanische Komponenten, die Aktuatoren und die Sensoren der Werkzeugmaschine mit einem Fertigungsprozessmodell in einem Simulationsmodell abgebildet. Mit diesem Simulationsmodell

wird die reale Steuerung verbunden, um optimierte Parameter zu ermitteln oder die Steuerung an sich zu testen [JÖN05].

Für den Nachweis, dass die Werkzeugmaschine die gewünschten Anforderungen erfüllt, wird häufig im Rahmen der Auslieferung und Übergabe eine Maschinenabnahme durchgeführt. Primär werden hierbei die technischen Eigenschaften der Maschine überprüft. Zusätzlich werden auch die fertigungstechnischen Aspekte der Qualität, Produktivität und Technologie nachgewiesen. Beispielhafte Kenngrößen zur Beurteilung der Werkzeugmaschinengüte sind die Positionierunsicherheit, die Kreisformabweichung, die statische Steifigkeit, die dynamische Nachgiebigkeit und das thermische Last-Verformungsverhalten. Die Prüfregel und die Anweisungen von fachgerechten Nutzung der Messtechnik zur Überprüfung der geometrischen Abweichungen sind in der DIN ISO 230-1 festgelegt [DIN230-1]. In der VDI/DGQ 3441 und in der DIN ISO 230-2 ist die Anwendung der statistischen Kenngrößen zur Beurteilung der Positioniergenauigkeit der Achsen geregelt [VDI3441, DIN230-2]. Für die Überprüfung der kinematischen Abweichungen zwischen den jeweiligen Bewegungsachsen können Kreisformtests durchgeführt werden. Diese sind in der DIN ISO 230-4 protokolliert [DIN230-4]. Mit einem Kreisformtest können zusätzlich Informationen über die Regelkreiseinstellung der beteiligten Achsen, die Abweichungen der verwendeten Messsysteme und das Stick-Slip-Verhalten der jeweiligen beteiligten Führungssysteme gewonnen werden. Weiterhin beeinflussen Bahngeschwindigkeit und -beschleunigung das Messergebnis. Der Kreisformtest wird somit auch für die Beurteilung des mechatronischen Verhaltens der Werkzeugmaschine verwendet.

2.2 Numerische Methoden zur Verhaltensanalyse von Werkzeugmaschinen

Nach der VDI-Richtlinie 3633 wird der Begriff „Simulation“ im industriellen Umfeld als die Nachbildung eines dynamischen Prozesses in einem System durch ein experimentierfähiges Modell verstanden, mit dessen Hilfe dann an Erkenntnisse gelangt werden kann, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind [VDI3633]. Mit einer computerbasierten Berechnungsmethode werden solche Simulationen erstellt, mit denen dann generell das Verhalten physikalischer Systeme untersucht und Vorhersagen über diese getroffen werden [VAJ09]. Auf diese Weise können mit Simulationen kostenintensive experimentelle Untersuchungen minimiert werden. Für die unterschiedlichen physikalischen Disziplinen und Problemstellungen existiert eine Vielzahl von Berechnungsverfahren und -programmen, deren Struktur zum Teil historisch gewachsen ist [WIT07].

Beispielhafte Untersuchungsziele für die Beurteilung von Werkzeugmaschinen sind zunächst die statische und dynamische Steifigkeit sowie die Eigenfrequenzen λ mit den zugehörigen Eigenformen [BÄN12]. Weiterhin werden mittels der FEM das dynamische Verhalten sowie die auftretenden Betriebsschwingungsformen ermittelt [BRE08]. Für die Simulation des dynamischen Verhaltens werden unterschiedliche Verfahren verwendet, die weit verbreitet sind und ein wichtiges Werkzeug für die Konstrukteure darstellen [WIT07]. Für diese Untersuchungsziele haben sich drei Verfahren etabliert: Die erste Methode ist die FEM, gefolgt von der Mehrkörpersimulation (MKS) und der digitalen Blocksimulation (DBS) [GRO09]. Die jeweiligen numerischen Werkzeuge, die zur Erstellung der Berechnungsmodelle benötigt werden, unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Ordnung und Art der erzeugten Gleichungssysteme

[SOP11]. Vermehrt werden auch hybride Berechnungsmethoden angewendet wie zum Beispiel die flexible MKS [HOF05] oder die Co-Simulation, die eine Kopplung der MKS mit der DBS [LEH07] oder eine Kopplung der FEM mit der DBS [BER03] darstellen.

Die Berechnungsprogramme, die für den industriellen Einsatz konzipiert sind, besitzen eine grafische Benutzer- und Modellierungsumgebung, mit der die Modelle in visueller Form konstruiert, aufbereitet und analysiert werden. Die mathematischen Zusammenhänge verbergen sich hinter den visualisierten Modellen und werden von den Programmen automatisch generiert. Deshalb wird die resultierende Modellgröße kaum beachtet. Werden die Zielstellung, die Genauigkeit und der Grad der Detaillierung der Modelle erhöht, entstehen zusätzlich Systemgleichungen mit einer hohen Freiheitsgradanzahl N_{FHG} [BUS12]. Mit der Herausforderung der hohen Genauigkeitsansprüche an diese Systeme entstehen in der Entwicklungsphase mathematische Modelle, die trotz der rasanten Entwicklung der Computertechnik an die Grenzen der modernen Hochleistungsrechner gelangen. Der erforderliche Rechen- und Zeitaufwand für eine ausreichend genaue Simulation lässt sich in der Regel nicht deterministisch voraussagen [PRI05]. Aus den genannten Gründen werden die Berechnungsmodelle und -methoden bislang nur auf Teilbereiche des Gesamtsystems angewendet beziehungsweise es werden nur diskret-stationäre Lagen des TCPs im Arbeitsraum berücksichtigt.

2.2.1 Finite-Elemente-Methode

Die Grundidee der FEM ist die Zerlegung einer komplexen Struktur in viele, einfach zu beschreibende finite Elemente, die für den Rechner lösbar sind. Diese Elemente werden miteinander verknüpft und bilden ein Netz, wie in Bild 2-2 in Teilbild c) dargestellt. Die diskreten Übergänge der Elemente werden als Knoten bezeichnet. Die mathematischen Modelle zur Beschreibung der Struktur und des dynamischen Verhaltens werden von der FE-Software automatisch aufgestellt und berechnet. An den Knoten wird nach dem Verschiebungsgrößenverfahren die partielle Differentialgleichung (DGL) der Mechanik gelöst [FIN77]. Dazu werden in jedem Element die Steifigkeits-, Dämpfungs- und Masseneigenschaften ermittelt, aus denen dann die Koeffizientenmatrizen der Bewegungsgleichung erzeugt werden [ALB95]. Jeder Knoten besitzt eine gewisse Anzahl an Freiheitsgraden N_{FHG}, welche die Bewegung des Elements darstellen. Je nach Diskretisierungsgrad erhöht sich die Elementenanzahl n_{EA} und somit die Freiheitsgradanzahl N_{FHG} [OER08]. Deshalb steigt mit der Erhöhung des Diskretisierungsgrads der numerische Aufwand.

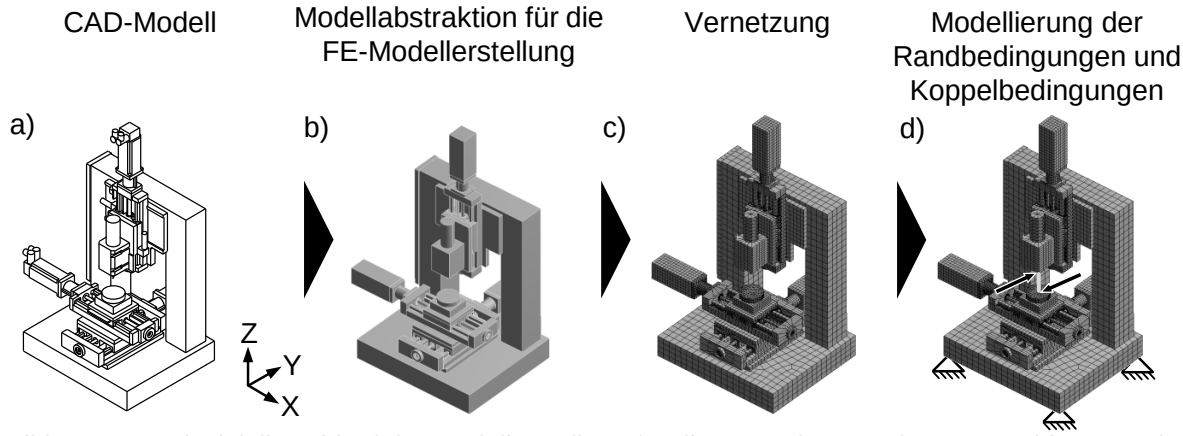


Bild 2-2: Prinzipieller Ablauf der Modellerstellung für die FEM einer Werkzeugmaschine von einem CAD-Modell bis zur Modellierung der Rand- und Koppelbedingungen

Nach BRECHER und WITT [BRE08] müssen jedoch für eine wirtschaftliche FEM-Simulation die geometrischen Details, die einen sehr geringen Einfluss auf das strukturelle Verhalten besitzen, aus dem Geometriemodell entfernt werden. Dieser Schritt ist in Bild 2-2 von Teilbild a) zu Teilbild b) dargestellt. Diese manuelle Nachbehandlung verlangt Erfahrung des Benutzers und birgt das Risiko des Entfernens geometrischer Details, die doch einen höheren Einfluss auf das strukturelle Verhalten besitzen [ALB95, BRE08].

2.2.2 Mehrkörpersimulation

Genauso wie die FEM ist die Mehrkörpermethode eine geometrieorientierte Modellierungsmethode. Die Modellierung des mechanischen Systems ist stark auf die grafische Repräsentation des Modells ausgelegt, die deshalb auch gleichzeitig für Animationszwecke verwendet wird. Mit der MKS werden hauptsächlich Aussagen über das kinematisch-dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen gewonnen. Dazu werden die Mechanismen, Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie deren korrespondierende Kräfte und Momente im Zeitbereich untersucht [BER03]. Im Gegensatz zur FEM handelt es sich hierbei um makroskopische Bewegungsgrößen [ZAE07] mit den entsprechenden geometrischen Nichtlinearitäten. Insbesondere durch die Starrkörperrotation entstehen stark nichtlineare, algebraische Gleichungen [SHA05].

Ursprünglich wurden mit der MKS einzelne Körper in einem Mehrkörper(MK)-Modell als Starrkörper abgebildet. Diese Starrkörper lassen sich über elastische Elemente, wie Feder-Dämpfer-Elemente und Gelenk-Elemente, miteinander verbinden [BER03, SIE08]. Heutzutage können elastische Eigenschaften der einzelnen Körper zum einen mit der FEM durch die modale Ersatzbeschreibung auf die Elemente der Mehrkörper übertragen werden oder durch die direkte Aufstellung beziehungsweise Integration der Systemmatrizen [LEH07, HOF08]. Bei dieser flexiblen MKS wird die Bewegung in eine nichtlineare und in eine linearisierte elastische Bewegung aufgeteilt [NOW11]. Diese elastischen Eigenschaften stellen eine Linearisierung an den Arbeitspunkten dar, an denen diese extrahiert worden sind.

2.2.3 Digitale Blocksimulation

Neben der rein mechanischen Strukturanalyse haben die Antriebe und ihre Regler einen hohen Einfluss auf das dynamische Werkzeugmaschinenverhalten [FON00]. Die Reglermodelle berechnen bei vorgegebenem Weg-, Geschwindigkeits- beziehungsweise Beschleunigungsprofil der jeweiligen Vorschubachsen die Motormomente beziehungsweise Motorkräfte [MEI08]. Diese Modelle bilden die äußeren Lasten des Strukturmodells.

Zur Abbildung und Analyse des elektrischen Antriebs und seiner Reglersysteme eignet sich besonders die DBS, die in Computer-Aided-Control-Engineering(CACE)-Programmen realisiert wird [SCD09]. Die dabei verwendete Programmstruktur ähnelt einem blockorientierten Signalflussplan. Hinter den Blockschaltbildern verbergen sich die Übertragungsfunktionen eines Teilsystems. Im Unterschied zu den Signalflussplänen, die gerichtete Signalglieder abbilden, ist in der DBS ein bidirektionaler Austausch von Zustandsgrößen möglich [DRO04].

2.2.4 Überblick über gekoppelte Simulationsverfahren

Für eine gemeinsame Simulation, bei der die fachspezifischen Modellierungsvarianten genutzt werden sollen, ist eine Kopplung der Modelle oder der Programme notwendig. Dazu existieren unterschiedliche Kopplungsrealisierungen, die für sich häufig eine Speziallösung darstellen

[DRO04]. Am Beispiel der Werkzeugmaschinen werden die strukturmechanischen Komponenten an den Koppelstellen, beispielsweise bei den Führungssystemen, mit Ersatzmodellen verknüpft [FON00]. Diese Verknüpfung wird mittels Zwangsbedingungen oder Feder-Elementen umgesetzt [BRE08]. Die Kopplung von mechanischen, elektrotechnischen und informationstechnischen Komponenten wird durch andere Größen ermöglicht.

Grundsätzlich können die Kopplungsmethoden in drei Ebenen untergliedert werden, wie in Bild 2-3 dargestellt: Auf der ersten Ebene, der Modellierungsebene, wird das Gesamtsystem in Teilsysteme zerlegt. Die zweite Ebene ist die Schnittstellenebene, bei der die Simulationswerkzeuge und die Lösungsverfahren gewählt werden. Auf der dritten Ebene wird der Austausch der Kopplungsdaten definiert [KÜB00, VAL09, BUS12].

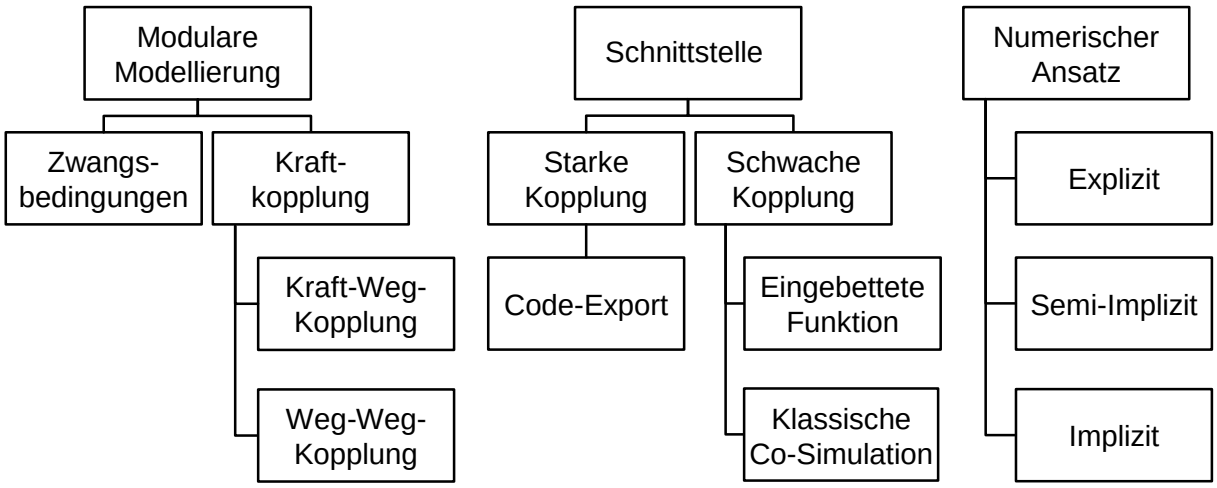


Bild 2-3: Klassifizierung der unterschiedlichen Kopplungsmöglichkeiten nach BUSCH [BUS12]

Grundsätzlich kann zwischen einer starken und einer schwachen Kopplung unterschieden werden. Bei der starken Kopplung wird im Gegensatz zur schwachen Kopplung nur ein numerischer Integrator benötigt. Mit Hilfe eines Code-Exports werden die Gleichungen eines Teilsystems dem numerischen Integrator des anderen Systems zur Verfügung gestellt. Eine starke Kopplung führt zur stabilen Simulation, da die Schrittweite vom steiferen System bestimmt wird [BUS12]. Bei der schwachen Kopplung werden die jeweiligen numerischen Integratoren der Teilsysteme zur Lösung des gekoppelten Systems verwendet. Die numerische Auswertung des globalen Systems wird durch zeitdiskrete Linker und Scheduler durchgeführt, die die Ein- und Ausgänge der entsprechenden Teilsysteme verbinden und eine Kommunikation zwischen den Teilsystemen zu diskreten Zeitpunkten realisieren [KÜB00]. Während der Integration werden die Koppelgrößen ausgetauscht. Eine Methode zum Austausch kann durch die Schleifenbildung bewerkstelligt werden.

2.3 Numerische Modellierung von Werkzeugmaschinen und deren Komponenten

Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Werkzeugmaschine muss das Zusammenspiel von Mechanik der Maschine, Regler, Antrieb und Anregung betrachtet werden. Die Anregung kann von außen wirken oder aus dem Fertigungsprozess selbst entstehen. Was die Mechanik der Werkzeugmaschine betrifft, haben die Maschinenelemente und -komponenten, wie die Hauptspindel, die Führungs- und die Lagersysteme einen entscheidenden Einfluss auf die einsatzrelevanten Eigenschaften [ALB95, ALT05, QUE05, WIT07]. Die Komponenten, die nicht direkt im Kraftfluss liegen, müssen zum Teil bei der Modellierung ebenfalls berücksichtigt

werden, da diese aufgrund der Massenwirkung die dynamische Steifigkeit beeinflussen [ALB95]. Aufgrund ihrer Komplexität war und ist die Modellbildung von Werkzeugmaschinen Gegenstand einer Vielzahl von Arbeiten. Erschwerend kommt hinzu, dass dem Maschinenentwickler in der Regel in der Entwicklungsphase nicht alle Parameter für ein geeignetes Modell zur Verfügung stehen. Insbesondere die Unkenntnis über die örtlichen Nachgiebigkeiten an den Koppelstellen erhöht die Unsicherheit des Simulationsmodells. Deshalb bedient sich der Werkzeugmaschinenentwickler in der Regel seiner Erfahrung, dem Stand der Technik und schon zur Verfügung stehender Ersatzmodelle. In solchen Ersatzmodellen werden Maschinenelemente wie Führungssysteme häufig makroskopisch durch Feder-Dämpfer-Elemente oder durch alleinige Feder-Elemente abgebildet, die mit diskreten Steifigkeits- und bzw. oder Dämpfungskennwerten hinterlegt werden [ALT05]. Die Modellierung der korrekten Steifigkeit ist wichtig, da diese generell die Lage der Frequenzspitzen der auftretenden Resonanzüberhöhungen im Simulationsmodell beeinflusst. Die Dämpfung ϑ wirkt auf die Amplituden A der Resonanzstellen ein.

Das Werkzeugmaschinengestell hat die Aufgabe, die unterschiedlichen Bauteile wie Antriebe und Führungssysteme zu halten und zu verbinden. Bei der Entwicklung und Analyse von Maschinengestellstrukturen werden insbesondere die Eigenschaften des statischen, dynamischen und thermischen Verhaltens fokussiert. Diese Konstruktionen können mittels Volumenelemente in der FEM modelliert werden. Die Strukturnachgiebigkeit des Gestells hat eine entscheidende Auswirkung auf die Regeldynamik und somit auch auf das Bearbeitungsergebnis. Daher ist eine genaue Ermittlung der hochfrequenten Schwingungsformen notwendig, die nur durch detaillierte Modellierung und nicht durch einfache oder klassische Mehrkörpersysteme erreicht werden kann [KNO09]. Für diese detaillierte Modellierung sind FEM und teilweise flexible MKS geeignet. Zusätzlich hat auch die Steifigkeit der Aufstellelemente einen hohen Einfluss auf die Positioniergenauigkeit [MEI08]. Diese können durch unterschiedliche Ersatzmodelle aus diversen Feder-Dämpfer-Elementen oder frequenz- und lastabhängigen Elementen nachgebildet werden [BRE08].

Die Führungen haben in Werkzeugmaschinen die Funktion, jeweils nur bestimmte Freiheitsgrade (FHG) zu erlauben und alle nicht zugelassenen Freiheitsgrade zu sperren. Diese Führungssysteme können als Schnittstelle der einzelnen Komponenten zur Umgebung interpretiert werden [HOF05]. Bekanntlich sind Führungssysteme, aus konstruktiven Gründen, nachgiebige Elemente im Kraftfluss. Deshalb besitzen diese Systeme einen hohen Anteil an der Gesamtnachgiebigkeit der Werkzeugmaschine [WEC06] und sind somit für die Modellierung von hohem Interesse [GRO06b].

Zur Klassifizierung der Führungen werden die jeweilige Bewegungsart, die Geometrie der Führungen sowie die Art der Flächentrennung herangezogen. Bei der Flächentrennung wird zwischen Gleitführungen und Wälzführungen unterschieden. Die Gleitführungen werden wiederum nach dem Typ der Schmierung unterteilt in hydrodynamische, in hydrostatische und in aerostatische Schmierung [ISP97, TEU05, WEC06].

Die oben genannten Führungssysteme werden grundsätzlich nach Radialführungen – hier inbegriffen sind auch die Lager – und Linearführungen getrennt. Als erstes soll hier auf die Lager eingegangen werden. Aufgrund der Anforderungen, die hinsichtlich Leistungsvermögen und Genauigkeit an die Hauptspindel von spanenden Werkzeugmaschinen gestellt werden, sind 90 % aller Führungssysteme wälzgelagert [NEU12]. Die Steifigkeit und die Genauigkeit der

Lager werden durch die Einstellung des Lagerspiels in begrenztem Maße angepasst [OPH86]. Die Wälzlagereigenschaften werden durch den Kontakt der Wälzelemente und ihrer Lagerringe bestimmt. Das radiale Steifigkeitsverhalten von Wälzlagern weist wegen des belastungsabhängigen Kontakts zwischen Wälzelementen und Lagerringen einen nichtlinearen Charakter auf [TEU05]. Die Werte der lagerspezifischen Steifigkeiten, die von den jeweiligen Belastungswerten abhängen, werden in der Regel vom Hersteller zur Verfügung gestellt.

Für die Nachbildung des Kraftflusses über die Wälzkörper zur Verbindung des Innen- und Außenrings, vgl. Bild 2-4 a), bieten sich die Feder-Dämpfer-Elemente zur Modellierung an, wie in Teilbild b) gezeigt, sofern vorausgesetzt, dass keine Spannungsaussagen über die Lagerringe getroffen werden müssen [SCC00, WIT07]. Zu diesem Ersatzmodell existiert auch die Variante, dass zwischen dem Innen- und dem Außenring die Kugelmassen mittels Punktmassen mit verbindenden Feder-Dämpfer-Elementen berücksichtigt werden [OPH83]. Eine weitere Möglichkeit, den Kraftfluss sicher zu stellen und die Innen- und Außenlagerringfläche kinematisch zu koppeln, stellt die Verbindung mittels Zwangsbedingungen dar, wie in Bild 2-4 c) gezeigt.

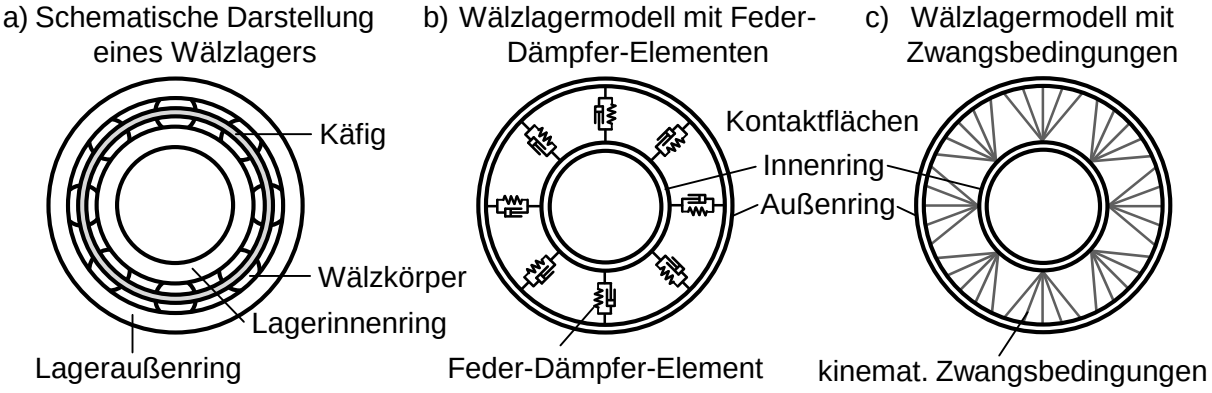


Bild 2-4: a) Quantitative Darstellung des Wälzlagers und Modellierungsvarianten der Kopplung für dynamische Untersuchung b) mittels Feder-Dämpfer-Elementen oder c) über kinematische Zwangsbedingungen

Eine größere Herausforderung als die Modellierung der Steifigkeit stellt die Nachbildung der Dämpfung dar. Die direkte Berechnung der Dämpfungsparameter ist bisher nicht möglich [KIP09]. Daher müssen sie geschätzt werden. Nach KRÄMER [KRA93] kann die Dämpfung ϑ im Bereich vom $(0{,}25-2{,}5)\cdot 10^{-5}$-fachen der Wälzlagersteifigkeit abgeschätzt werden. Nach OPHEY [OPH83] ist die Dämpfung ϑ abhängig von der Drehzahl, der Viskosität des verwendeten Schmieröls, der Vorspannkraft, der Anordnung und vom Lagerabstand der Wälzlager.

In der kommerziellen FE-Software wird die kinematische Kopplung der rotatorischen und der translatorischen Verschiebungen der Führungselementmodelle durch allgemeine lineare Zwangsbedingungen realisiert. Diese linearen kinematischen Zwangsbedingungen bzw. Kontaktbedingungen können durch Einzelpunktverbindungen (engl.: Single Point Constraints, kurz: SPC) und Mehrpunktverbindungen (engl.: Multipoints Constraints, kurz: MPC) realisiert werden [DAD10b]. Bei den SPC wird die Kraft bzw. die kinematische Zwangsbedingung direkt von einem Knoten auf den anderen übertragen [GRO06b]. Bei den MPC werden die Kraft oder die kinematische Randbedingung auf mehrere Knoten verteilt, ohne ihren Abstand zu den jeweiligen Knoten zu ändern. Von manchen FE-Programmen wird dies über starre Festkörperelemente (engl.: Rigid Body Elements, kurz: RBE) umgesetzt. Diese Elemente sind auch unter dem Begriff RBE vom Typ 1 bekannt und sind verschiebungsgesteuert. Diese Elemente werden in Bild 2-5 a) und b) visualisiert.

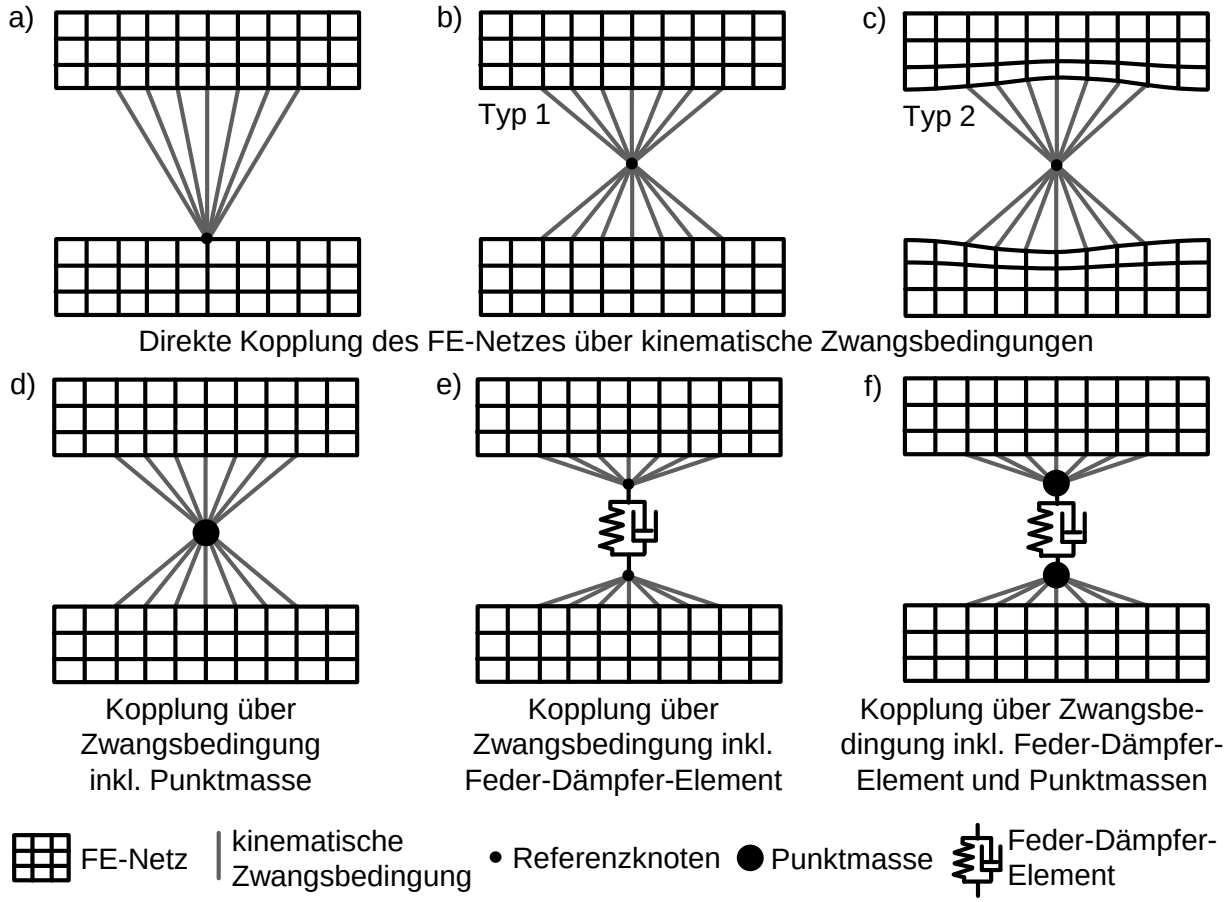


Bild 2-5: Schema zur Modellierung der Kraftübertragung mit Zwangsbedingungen in unterschiedlichen Realisierungsvarianten

Die Verschiebung des Referenzknotens wird hierbei mittels masseloser Verbindungen unverändert an die Anbindungsknoten übertragen, wie in Bild 2-5 a), b) und c) dargestellt. Diese Modellierung hat die Eigenschaft, lokal zu versteifen [SEK12]. Im Falle, dass mehrere Referenzknoten definiert werden, ist die Verbindung zwischen den Referenzknoten starr. Wenn dagegen die Elastizität des FE-Netzes für die kinematischen Zwangsbedingungen übernommen wird, entsteht eine interpolierte Verschiebung der verknüpften Flächen, wie in Bild 2-5 c) visualisiert [BER03, GRO06a, SIE08]. Dadurch wird die Neigung zur lokalen Versteifung verringert. Die kinematischen Zwangsbedingungen werden von manchen Autoren auch als RBE vom Typ 2 bezeichnet [OER08]. Bei kleinen Kontaktflächen empfiehlt sich die Verknüpfung mittels des RBE vom Typ 1 und bei größeren Kontaktflächen die Verknüpfung mit RBE vom Typ 2 [GEB11]. Die kraftgesteuerte Kopplung wird mit RBE-Elementen vom Typ 3 realisiert. Die abhängigen Knoten verändern ihre Position in Abhängigkeit vom Mittelwert aller Flächenknotenverschiebungen [DAD10a]. Bei der Überführung der FE-Netze durch die MOR in eine CACE-Umgebung ist die Information über die Art der Zwangsbedingung wichtig, da diese die Modelle stark beeinflussen.

Als nächstes wird auf die Modellierung der Linearführungen eingegangen. Die wälzgelagerten Linearführungen werden häufig als Kompaktführungssysteme mit unterschiedlichen Genauigkeiten eingesetzt. Aufgrund der geforderten Genauigkeiten wird häufig die höchste Vorspannklasse verwendet, was einer Vorspannung von ca. 8 % der dynamischen Tragzahl C_{dyn} entspricht. Diese muss bei der Modellierung berücksichtigt werden. Das Steifigkeitsverhalten in

Zug- und Druckrichtung der Linearführungswagen wird vom Hersteller angegeben. Der zusätzliche Einfluss von Kontaktstelle und Verschraubung des gesamten Führungssystems kann experimentell oder mittels FEM ermittelt werden [NEU12]. Da für die vorliegende Arbeit Gleitführungen nicht relevant sind, werden diese hier nicht näher betrachtet.

Bei der dynamischen und statischen Analyse der Werkzeugmaschine erfüllt das Modell der wälzgelagerten Linearführung die Aufgabe, das Steifigkeitsverhalten und die Führungseigenschaften abzubilden [TEU05, GEB11]. Der Kraftfluss führt, ähnlich wie bei den Lagern, vom Tragkörper durch die Wälzkörper in die Schiene. Dabei überträgt jeder Wälzkörper einen Teil der Gesamtlast. Die detaillierte Modellierung der wälzgelagerten Linearführung, wie in Bild 2-6 b) dargestellt, ist sehr aufwändig [GRO06a, DAD12] und aus Effizienzgründen für die Simulation der kompletten Werkzeugmaschine nicht zielführend [SIE08].

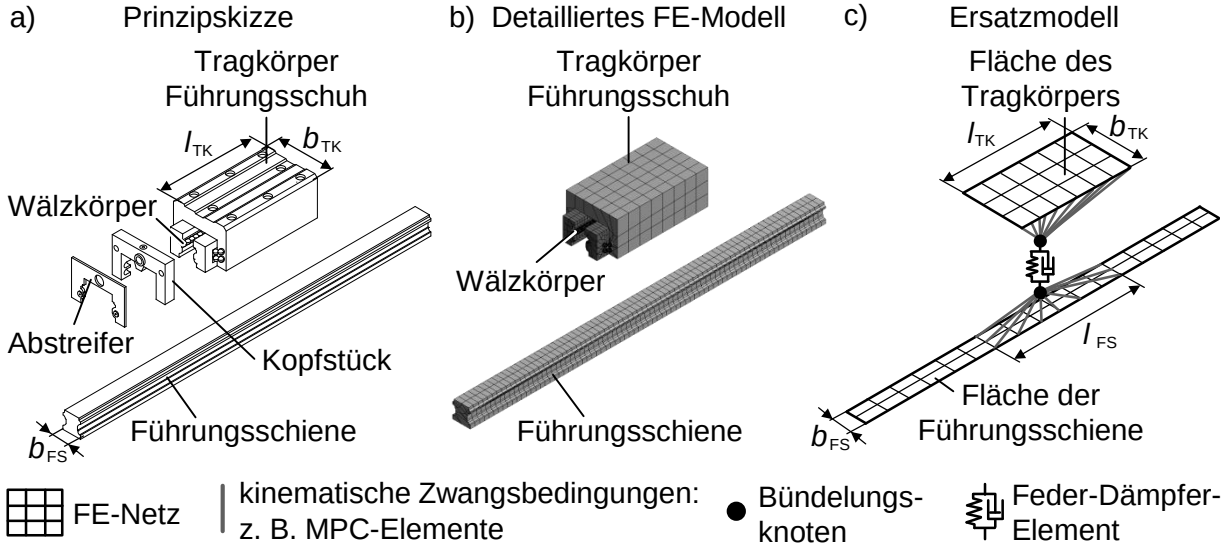


Bild 2-6: Modellierungen der wälzgelagerten Linearführung für die statische und dynamische Untersuchung: a) Prinzipskizze einer wälzgelagerten Linearführung, b) detailliertes FE-Modell für die Untersuchung der dynamischen Eigenschaften der Linearführung nach [DAD12] und c) Ersatzmodell einer wälzgelagerten Linearführung nach [SCC00]

Für die Berücksichtigung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften wälzgelagerter Linearführungen eignet sich die Modellierungsvariante aus Bild 2-5 e) mit einem Reihenmodell aus mehreren Feder-Dämpfer-Elementen [WEI01]. Die kinematische Zwangsbedingung stellt hier sicher, dass die Position der Krafteinleitung dem physikalischen System entspricht [BAU03]. Um dieses zu gewährleisten, wird mittig unter der Fläche des Tragkörpers ein Feder-Dämpfer-Element mit den MPCs verbunden, wie in Bild 2-6 c) visualisiert. Dieses Feder-Dämpfer-Element ist wiederum mit der Fläche der Führungsschiene mittels MPCs verbunden. Durch die Verwendung dieser Verbindungselemente wird eine homogene Lasteinleitung in das FE-Netz der Strukturbauteile gewährleistet [WIT07, SIE08]. Die Werte der Steifigkeit der Linearführung werden gewöhnlich vom Hersteller zur Verfügung gestellt und können entweder mit mehreren Feder-Dämpfer-Elementen für die jeweiligen Freiheitsgrade oder mit einem dreidimensionalen Feder-Dämpfer-Element in das Modell integriert werden [NEB98, WEI01, GEB11].

Abgesehen von den charakteristischen Verformungszuständen der Biege- und Torsionsverformungen des Werkzeugmaschinengestells treten auch Schwingungsformen auf, die aus der elastischen Verformung des Führungssystems resultieren. Bei diesen Verformungszuständen besitzen die elastischen Deformationen einen höheren Anteil an der Gesamtdeformation als

die Deformationen, die vom Werkzeugmaschinengestell oder von den umliegenden Komponenten verursacht werden [FIN77].

Zur Erfüllung der fertigungstechnischen Aufgabe muss eine Relativbewegung zwischen dem Werkzeug und dem Werkstück realisiert werden. Für diese Bewegung werden Antriebe benötigt, die sich entweder in Reihe oder parallel anordnen lassen. Die Antriebsauswahl wird häufig durch die erforderliche Leistung und die zu erreichende Genauigkeit bestimmt. Für die meisten Anwendungsgebiete der Werkzeugmaschinen werden Spindel-Mutter-Antriebe verwendet [HIR05]. Weisen diese Antriebe Wälzelemente wie Kugeln und Rollen zwischen Spindel und Mutter auf, werden sie entsprechend als Kugelgewindetriebe (KGT) bzw. Rollengewindetriebe (RGT) bezeichnet. Aufgrund ihrer Rollreibung und Vorspannung besitzen diese Systeme die Vorteile des hohen Wirkungsgrads, einer hohen axialen Steifigkeit k_a, des geringen Spiels und des vernachlässigbaren Stick-Slip-Effekts [NEU12]. Für die vorliegende Arbeit sind RGT nicht relevant und werden daher nicht weiter betrachtet.

Die Axialsteifigkeit k_a und die Torsionssteifigkeit k_t eines KGTs beeinflussen nicht nur zu einem erheblichen Teil die Positioniergenauigkeit, sondern spielen auch eine wichtige Rolle beim dynamischen Verhalten der Linearachsen [OKW09]. Diese Steifigkeiten verändern in hohem Maße die erste und zweite Eigenfrequenz des Antriebs sowie deren zugehörige Eigenformen [DAD10a, FRE12]. In der FEM ist es üblich die Spindel mit dem mittleren Durchmesser d_{S0} zu vereinfachen. Die Steifigkeiten können nach DIN 69051 Teil 6 und nach der DIN ISO 3408 Teil 4 berechnet werden [DIN69051-6, ISO3408-4]. Die Steifigkeit der Mutter wird durch die Anzahl und den Durchmesser der belasteten Wälzkörper, den Schmiegungsfaktor, den Kontaktwinkel sowie durch die Vorspannung bestimmt. Den höchsten Einfluss auf die Steifigkeit hat die Vorspannung. Abhängig von der Vorspannung erhöht sich die Steifigkeit um den Faktor der dritten Wurzel [DIN69051-6].

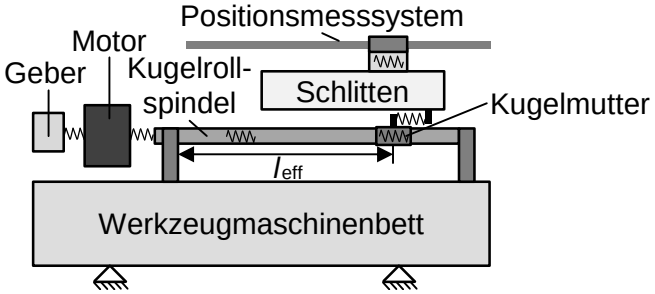


Bild 2-7: Schematische Darstellung eines Kugelgewindespindelantriebs

Die axiale Gesamtsteifigkeit einer Linearachse des Typs KGT wird durch die Axiallager, die Kugelrollspindel und die Kugelmutter bestimmt, vergleiche Bild 2-7 a) [OKW09]. Die axiale Gesamtsteifigkeit $k_{KGTa,ges}$ setzt sich somit aus der axialen Kugelmuttersteifigkeit k_{Ma}, der effektiven axialen Steifigkeit der Kugelrollspindel $k_{Sa}(l_{eff})$ und der Axialsteifigkeit der Kugelrollspindellagerung k_{La}, deren Wert vom Hersteller geliefert werden [FRE12], wie folgt zusammen:

$$k_{KGTa,\,ges} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_{Ma}} + \frac{1}{k_{Sa}(l_{eff})} + \frac{1}{k_{La}}\right)} \quad . \tag{2-1}$$

Die Steifigkeit der Kugelrollspindel hängt von der effektiven Spindellänge l_{eff}, vom E-Modul und von der Querschnittsfläche der Spindel ab [FON00]. Aufgrund der Steifigkeitsabhängigkeit von der Länge l_{eff} wird die Steifigkeit des KGTs $k_{KGT,ges}$ von der Schlittenposition abhängig [HOF08, OKW09, FRE12]. Daraus folgt, dass die komplette Werkzeugmaschine ein positionsabhängiges Steifigkeitsverhalten aufweist.

2.3.1 Dämpfung und deren Eigenschaften

Die Dämpfung in einem dynamischen System sorgt dafür, dass die Amplituden, die durch eine Krafteinwirkung entstehen, mit der Zeit abnehmen. Deshalb sind die Dämpfung und die Modellierung dieser für die Simulation bezüglich des Verhaltens im Zeitbereich von großer Bedeutung [WIT07]. Die Dämpfung kann grundsätzlich in zwei Dissipationsgruppen unterteilt werden [PET83]. Bei der ersten Gruppe handelt es sich um eine äußere Dämpfungswirkung. Einige Vertreter dieser Gruppe sind zum einen die von außen wirkende Dämpfungskraft, die aus der Reibung oder von externen Dämpfern resultiert, zum anderen die Dissipation, die durch Wechselwirkung mit der Umgebung oder durch Abstrahlung entsteht [KUN13]. Dieser Dämpfungsanteil kann durch diskrete Dämpfer zwischen den Strukturkomponenten, wie Führungen und Lager, mittels viskoser Dämpfer abgebildet werden [WIT07].

Bei der zweiten Gruppe tritt die Dissipation innerhalb des Systems auf. Typische Beispiele hierfür sind die Werkstoff- und die Fügestellendämpfung. Werkstoffdämpfung macht nach PETUELLI [PET83] allerdings nur 10 % der Gesamtdämpfung der kompletten Werkzeugmaschine aus, die im Wesentlichen aus metallischen Werkstoffen bestehen. Diese Werkstoffdämpfung ist mithilfe hysteretischer Dämpfungsmodelle abbildbar. Die Dämpfungswirkung, die durch die Relativbewegungen in den Fügestellen zwischen den einzelnen Maschinenkomponenten hervorgerufen wird, ist im Vergleich zur Werkstoffdämpfung erheblich höher [FIN77]. Die Kontaktflächendämpfung an den Fügestellen kann durch das Modell von Coulomb abgebildet werden [PET83]. Bei miteinander verschraubten Maschinenkomponenten, die eine große Steifigkeit und einzeln betrachtet eine geringe Dämpfung aufweisen, darf die Energiedissipation dieser Baugruppe nicht vernachlässigt werden [FIN77, KUN13].

Aufgrund der hohen Anzahl der unterschiedlichen Dämpfungseinflüsse und deren Charakteristika werden diese durch sehr starke Vereinfachung neben den diskreten Dämpfern an den Strukturkoppelstellen approximiert. Eine Übersicht der diskreten Dämpfungselemente, die in der Werkzeugmaschine Anwendung finden, ist in der Arbeit von KUNC [KUN13] dargestellt. Eine typische Approximation der Dämpfung wird in der folgenden sogenannten Bequemlichkeitshypothese, die auch als Rayleigh-Dämpfung bekannt ist, umgesetzt. Diese Modellbildung beruht auf der Annahme, dass die Verteilung der Dämpfung der jeweiligen Massen- und der Steifigkeitsverteilung entspricht [ALB95, OPH86, ISP97]. Diese Annahme wird durch die Gleichung 2-2 ausgedrückt.

$$\boldsymbol{E} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K} \tag{2-2}$$

Für die Berechnung der Dämpfung $\boldsymbol{E}$ steht vor der Masse $\boldsymbol{M}$ der masseproportionale Dämpfungsfaktor α und vor der Steifigkeit $\boldsymbol{K}$ der steifigkeitsproportionale Dämpfungsfaktor β. Für zwei bekannte Frequenzpunkte und deren Dämpfungsmaß lassen sich die Vorfaktoren wie folgt berechnen.

$$\vartheta = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta}{2}\omega \tag{2-3}$$

In Bild 2-8 wird der Nachteil des frequenzabhängigen Dämpfungsverlaufs ersichtlich. Mit steigender Frequenz nimmt der massenproportionale Dämpfungsanteil ab, während der steifigkeitsproportionale Dämpfungsanteil steigt. Dies widerspricht häufig der Realität. Deshalb ist die Rayleigh-Dämpfung nur für ausgewählte Frequenzbereiche anwendbar.

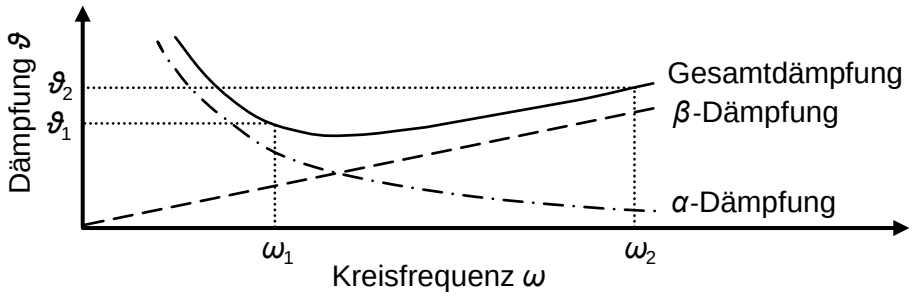


Bild 2-8: Dämpfungsverlauf der Bequemlichkeitshypothese in Abhängigkeit von der Frequenz

In der FE-Software ANSYS wird dagegen eine Erweiterung der Rayleigh-Dämpfung für die Berechnung verwendet.

$$\boldsymbol{E} = \alpha\boldsymbol{M} + (\beta + \beta_e)\boldsymbol{K} + \sum_{i=1}^{N_{Material}} \beta_i \boldsymbol{K}_i + \beta_e \boldsymbol{K} + \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{N_{Element}} \boldsymbol{E}_k \qquad (2\text{-}4)$$

Mit der folgenden Variable β_i als konstantem steifigkeitsmatrixproportionalen Vorfaktor, $\beta_e = 2\vartheta/\omega$ als variablem steifigkeitsmatrixproportionalen Vorfaktor, $\boldsymbol{E}_\vartheta$ als frequenzabhängige Dämpfung und $\boldsymbol{E}_k$ als Elementdämpfungsmatrix kann die Dämpfung über die Frequenz als nahezu konstant modelliert werden [CAI02].

Die Dämpfung ist von einer Vielzahl an Einflüssen abhängig und nicht generell beschreibbar. Für die Modellierung der Werkzeugmaschine werden in der folgenden Tabelle 2-1 die Dämpfungsgrade als Ansatzwerte für eine numerische Analyse angegeben.

Tabelle 2-1: Dämpfungskennwerte für unterschiedliche Materialien, Montagezustände und Komponenten der Werkzeugmaschinen

Bezeichnung	Dämpfungsgrad	Quelle
Stahl-, Stahlschweißkonstruktion beispielsweise bei einer Balkenstruktur oder einer Antriebsstange	$\vartheta = 0{,}001$ - $0{,}002$	[SUM86, HOF08, KUN13]
Grauguss beispielsweise bei einer Balkenstruktur oder einem Drehmaschinenbett	$\vartheta = 0{,}0028$ - $0{,}0045$	[OPH86, KUN13]
Gummifedern	$\vartheta = 0{,}01$ - $0{,}08$	[HOF08]
KGT mit Rollenführungen ohne Dichtpaket	$\vartheta \approx 0{,}075$	[KUN13]
KGT mit abgedichteten Rollenführungen	$\vartheta \approx 0{,}11$	[KUN13]
Drehmaschinenbett aus Grauguss inkl. Support, Spindelkasten und Aufstellelemente	$\vartheta \approx 0{,}31$	[OPH86]
geregelte Vorschubachse eines KGT mit abgedichteten Rollenführungen	$\vartheta \approx 0{,}325$	[KUN13]
komplette Drehmaschine mit Maschinenbett aus Grauguss	$\vartheta \approx 0{,}38$	[OPH86]
Wälzführungen (Schwingung in Vorschubrichtung)	$\vartheta = 0{,}01$ - 2	[ALB95]
Wälzführung (bei Biege- oder Torsionsschwingung)	$\vartheta = 1$ - 2	[ALB95]
konventionelle Ständerfräsmaschine	$\vartheta = 1{,}5$ - $2{,}5$	[EIB90]
Gleitführung (Verformung in der Fügestelle)	$\vartheta = 2$ - $3{,}5$	[ALB95]
komplette Werkzeugmaschine	$\vartheta = 2$ - 10	[OER08, SUM86]

2.3.2 Werkzeugmaschine als mechatronisches System

Die reine mechanische Modellierung und Analyse der Werkzeugmaschine reicht nicht aus, um deren Verhalten komplett zu bestimmten. Deshalb muss die Werkzeugmaschine als mechatronisches System betrachtet werden. Der Begriff Mechatronik bezeichnet ein Fachgebiet, das sich mit technischen Systemen beschäftigt, die aus eng miteinander verkoppelten Teilsystemen der Fachdisziplinen Mechanik, Elektrotechnik und Informationstechnik gebildet werden [NEU07]. Im Rahmen eines interdisziplinären Entwicklungsprozesses, in der die Fachdisziplinen enthalten sind, ist zum einen die Funktionalität der Subsysteme selbst und zum anderen ihr Zusammenspiel im Gesamtsystem entscheidend. Aufgrund des engen Zusammenwirkens der einzelnen Teilsysteme und ihrer gegenseitigen Beeinflussung ist es nicht oder nur eingeschränkt möglich, diese Teilsysteme getrennt voneinander zu entwickeln. Stattdessen muss bei einer ganzheitlichen numerischen Untersuchung der Werkzeugmaschine als mechatronisches Gesamtsystem eine integrative Betrachtung der Modellbestandteile für die Maschinenstruktur, die Steuerungs- und Regelungsstruktur sowie den Fertigungsprozess erfolgen [ESS13]. Diese mechatronische Simulation befähigt dazu, qualitative und quantitative Aussagen über das statische und dynamische Werkzeugmaschinenverhalten zu treffen, ohne dass ein physikalischer Prototyp existiert [ZIR06, SCR11, WAB14].

Keines der in Unterkapitel 2.1 genannten Simulationsverfahren kann für sich genommen die Erfordernisse für eine mechatronische Systemsimulation der Werkzeugmaschine, bspw. die prozessgerechte Betrachtung mit bewegten Achsen, erfüllen. Ein Lösungsansatz besteht daher darin, die unterschiedlichen Berechnungsverfahren und Modellierungsbestandteile miteinander zu kombinieren oder ineinander zu integrieren bzw. die jeweiligen Systeme zu koppeln. Eine Übersicht über die Kopplungsmöglichkeiten ist in Unterkapitel 2.2.4 gegeben. Auch die aktuellen kommerziellen Programmsysteme bieten zunehmend integrative Lösungen und Teillösungen an [RUD12].

Zur Beschreibung des dynamischen Werkzeugmaschinenverhaltens muss das Zusammenspiel von Regler, Motor, Maschinenmechanik und Anregung betrachtet werden. Dazu werden Schnittstellen zwischen den einzelnen Kategorien benötigt, wie bspw. zwischen dem mechanischen und dem elektrischen Teil einer Werkzeugmaschine. Die jeweiligen Kräfte und Momente können als Schnittstellen verwendet werden. Die physikalische Kopplung des elektrischen Antriebs mit der Mechanik des Kugelgewindetriebs wird über das Motormoment realisiert. Dieses Moment wirkt auf den Kugelgewindetrieb, der wiederum mittels Gewindemutter am Werkzeugmaschinenschlitten über die Muttersteifigkeit und der Mutterdämpfung befestigt ist. Der Werkzeugmaschinenschlitten ist zudem durch ein Führungssystem mit der Werkzeugmaschinenstruktur verbunden. Erweitert man das mechanisch-elektrische System um einen kaskadierten Lageregelkreis, wird daraus ein mechatronisches System. Nun ist der elektrische Antrieb mit der Regelung über Drehzahl, Strom und Spannung verknüpft. Der mechanische Teil wird über das Messsystem zur Erfassung der Schlittenposition an die Regelung gekoppelt und mit den Sollwerten aus der Steuerung abgeglichen.

Prinzipiell ist die Dynamik der Antriebsregelkreise durch die kleinsten mechanischen Eigenfrequenzen λ_{min} begrenzt. Bei konventionellen Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Antrieben werden die relevanten Eigenfrequenzen λ für die Reglerauslegung aufgrund der Nachgiebigkeiten der mechanischen Übertragungsglieder bestimmt. Diese sind häufig die Ur-

sache für die kleinsten mechanischen Eigenfrequenzen λ_{min}. Bei KGT ist häufig die Gewindespindel für die kleineste Eigenfrequenz λ_{min} verantwortlich. Somit ist nun die Kenntnis der dynamischen Eigenschaften der Werkzeugmaschinenstrukturkomponenten wichtig, da diese einen höheren Einfluss auf die ersten Eigenfrequenzen λ besitzen. Bei hochdynamischen Maschinen erhöht sich der Einfluss nochmals, insbesondere wenn Leichtbaustrukturelemente eingesetzt werden. Die Modellierung der Leichtbaustruktur als Starrkörper ist nicht zielführend. Aus diesem Grund werden Modelle zur Beschreibung der Nachgiebigkeit benötigt. Für komplexe Strukturen eignet sich die FEM zur Bestimmung der relevanten Nachgiebigkeiten. Für eine mechatronische Simulation, bei der die mechanischen Strukturen mit den Modellen der Antriebe und des Steuerungssystems zu einem Gesamtsystem kombiniert werden, sollten die Modelle im Hinblick auf den Zeitbedarf der Simulationsrechnung eine geringe Dimension besitzen. Daher werden für die mechanische Struktur MOR-Verfahren zur Erzeugung von niedrigdimensionalen Modellen benötigt.

Aufgrund der erwähnten Versteifungseffekte der Modelle ist bei der Kopplung strukturmechanischer und regelungstechnischer Werkzeugmaschinenkomponenten die Berücksichtigung der hochfrequenten Anteile notwendig, die grundsätzlich von FE-Modellen geliefert werden. Deshalb wird ein Reduktionsverfahren benötigt, das bei höheren Frequenzen kein versteiftes Ersatzsystem aus dem hochdimensionalen FE-Modell bereitstellt.

Die Kopplung eines Werkzeugmaschinenmodells an eine reale Steuerung gehört zu der Kategorie der HiLS. Sie erlaubt eine Inbetriebnahme der Steuerung in Echtzeit [REI07]. Eine Echtzeitanwendung besitzt die Anforderung, dass sie sicher und zeitlich genau ist [NEU11]. Zusätzlich muss die Antwortzeit aus der Echtzeitanwendung garantiert und die Synchronisation der Ereignisse mit den Daten gewährleistet werden [ESS13]. Aus diesen Anforderungen folgt, dass die Ausführzeiten der Echtzeitanwendung von deterministischer Natur sein müssen.

Eine HiLS für die Untersuchung der Hardwarekomponenten einer kompletten Werkzeugmaschine enthält ein Werkzeugmaschinenmodell, Software und Hardware-Anteile, z. B. zum Auslesen der Antriebssteuersignale oder der Nachbildung von Sensorsignalen. Um eine realistische Inbetriebnahme zu simulieren, ist der Einsatz einer realen Steuerungshardware notwendig. Dies setzt allerdings eine echtzeitfähige HiLS voraus. Bei einem echtzeitfähigen Simulationssystem muss das Ergebnis eines Berechnungszyklus zu einem fest definierten Zeitpunkt zur Verfügung stehen [PRI05]. Das bedeutet, dass die Rechenschrittweite oder das Vielfache der Rechenschrittweite der Kommunikationsgeschwindigkeit einer realen Steuerungshardware entspricht [PRI04]. Um die Echtzeitfähigkeit der Modelle zu gewährleisten, werden derzeit Abstriche beim Detaillierungsgrad und der Qualität in Kauf genommen [JÖN05]. Für solche Systeme werden explizite Lösungsalgorithmen benötigt [SEK12], wie es noch in Gleichung 2-34 vorgestellt und in Bild 2-10 b) visualisiert wird. Aus hohen Eigenwerten λ des Systems resultiert eine kleine Rechenschrittweite h. Deshalb sind hochdynamische Systemeigenschaften ungünstig.

Es existieren unterschiedliche Paradigmen zur Erstellung von echtzeitfähigen Modellen, die das dynamische Werkzeugmaschinenverhalten im Simulationskern beschreiben. Eine mögliche Herangehensweise ist die direkte Erzeugung von MK-Modellen. Diese sind häufig numerisch günstig und können deswegen direkt in die Echtzeitumgebung integriert werden. Im Falle, dass elastische Deformationen zu berücksichtigen sind, können diese bspw. mit MATLAB aus einem FE-Modell über den Real Time Workshop importiert werden. Mit diesen Modellen erhöht

sich der numerische Aufwand enorm. Deshalb werden derzeit MOR-Verfahren angewendet, die niedrigdimensionale Verhaltensmodelle erstellen.

Eine andere Herangehensweise zur Erstellung von echtzeitfähigen Modellen stellt SEKLER [SEK12] vor. Er verwendet für HiL-Anwendungen modal reduzierte Modelle. Das Verhalten und die Qualität der Modelle werden durch Systemidentifikationsverfahren an das reale System angepasst. Einer geringeren Modellqualität und dem Vorhandensein hochfrequenter Anteile steht hier der Vorteil der modalen Entkopplung des Systems gegenüber. Generell existieren unterschiedliche Methoden zur Erstellung niedrigdimensionaler Verhaltensmodelle [JÖN05]. Zur Minderung des numerischen Aufwands können die Systemmatrizen, wie später noch genannt und in Unterkapitel 2.4.1 dargestellt wird, modal entkoppelt werden [HOH11]. Diese entkoppelten und unabhängigen Subsysteme können während der Echtzeitsimulation numerisch unabhängig berechnet werden.

2.3.3 Modellierung von Relativbewegungen

Bei der Untersuchung von Werkzeugmaschinen sind nicht nur die Absolut-, sondern auch die Relativbewegungen von Interesse [ZIR06, SEK12]. Beispiele dafür sind die Relativbewegungen zwischen Führungswagen und Führungsschiene [BRE08]. Durch die Verfahrbewegung bspw. der Schlitten ändern sich die Positionen der Krafteinleitung und der Schwerpunktlagen der angrenzenden Struktur [HOF05]. Deshalb besitzt das System Werkzeugmaschine zusätzliche positionsabhängige dynamische Eigenschaften.

Auch für eine prozessgerechte Analyse der Werkzeugmaschine, bei der sich die Maschinenachsen relativ zueinander bewegen, müssen die daraus resultierenden strukturellen Veränderungen der gesamten Maschine berücksichtigt werden [RUD12]. Diese Veränderungen verursachen eine Verhaltensänderung im Arbeitsraum. Daraus ergeben sich Anforderungen bezüglich der positionsabhängigen Verschiebungskopplung an das Simulationsmodell um die von der Relativbewegung verursachten strukturellen Effekte abbilden zu können. In der vorliegenden Arbeit werden diese Veränderungen durch die Modifikation der kontinuierlichen und positionsabhängigen Eingriffs- und Kopplungsverhältnisse zwischen den einzelnen Werkzeugmaschinenkomponenten realisiert. Die Verknüpfung der Teilsysteme kann grundsätzlich durch geometrische oder durch parametrische Koppelgleichungen erfolgen. Die einzelnen Realisierungsansätze zur Relativbewegung unterscheiden sich im Umfang der Strukturmodellierung sowie in der Kombination von FEM, MKS und DBS [GRO09]. In der Vergangenheit wurden bereits mehrere Ansätze zur Betrachtung der poseabhängigen Eigenschaften angewendet, auf die im Folgenden eingegangen wird. Unter dem Begriff Pose wird die Kombination von Position und Orientierung eines Objekts nach DIN EN ISO 8373 [DIN8373] verstanden.

Die reguläre Kinematiksimulation für die räumliche Bewegung einzelner Maschinenkomponenten kann mit der MKS realisiert werden. Der Fokus dieser MKS liegt auf der Animation zur Beurteilung möglicher Kollisionen, ohne die elastischen Verformungen der einzelnen Komponenten zu berücksichtigen [CHR03, NEU11]. Mit der klassischen FEM dagegen werden große Verfahrbewegungen nicht korrekt abgebildet, da die Massen- wie auch die Steifigkeitsmatrix hier nicht aktualisiert werden. Insbesondere bei der kontinuierlichen Veränderung der lokalen Lastverteilung zwischen den beiden sich relativ bewegenden Komponenten kann aufgrund des numerischen Aufwands die Strukturveränderung nicht in geeigneter Zeit berücksichtigt werden. Dem gegenüber kann in der Starrkörperbetrachtung die kontinuierliche Verschiebung

von Kontaktpunkten in kommerziellen MKS-Programmen in akzeptabler Zeit berechnet werden [SIE09]. Dabei werden wie bereits angesprochen die elastischen Eigenschaften nicht berücksichtigt. Eine andere Herangehensweise bietet die Formulierung der FE-Elemente in einem bewegten Bezugssystem durch die „Floating Frame of Reference Formulation“ [SHA05]. Dabei entsteht eine zustandsabhängige und komplexe Massenmatrix, die schwer oder nicht invertierbar ist. Bei einer anderen, von SHABANA [SHA03] entwickelten Methode, der absoluten Knotenkoordinaten-Formulierung, ist die Steifigkeitsmatrix zwar komplex, die entstehende Massenmatrix ist aber zustandsunabhängig und einfach invertierbar. Mit dieser Formulierung lassen sich große Verfahrbewegungen mit finiten Elementen unter Einsatz hohen numerischen Aufwands realisieren [ZAE07]. Eine andere Herangehensweise ist die Interpolation unterschiedlicher diskreter Arbeitsraumpositionen ausgewerteter FE-Modelle [BRE06].

Eine Kombination der FEM und der MKS ist die flexible MKS, mit den diskreten und elastischen Teilmodellen berücksichtigt werden können. Beim Einsatz flexibler MKS auf der Basis des modalen Reduktionsverfahrens, das in Unterkapitel 2.5.3 näher erläutert wird, werden die Steifigkeitseigenschaften der flexiblen Strukturen aus den FE-Modellen gewonnen. Die kommerziellen FE-Programme liefern die flexiblen Eigenschaften mittels Eigenmoden und statischer beziehungsweise dynamischer Korrekturmoden. Bei der Modellierung der Verfahrbewegungen von Werkzeugmaschinenachsen wird eine hohe Anzahl von Koppelstellen für die sich bewegende Krafteinleitung benötigt [SEK12]. Im Falle, dass die flexiblen Eigenschaften aus der gemischten Reduktion gewonnen werden, ist eine hohe Anzahl Korrekturmoden erforderlich [SIE08]. Aufgrund der lokalen Steifigkeit dieser Korrekturmoden besitzt das System hohe Eigenfrequenzen, die während der expliziten Simulation anregend wirken. Als Gegenmaßnahme zu dieser Anregung kann die Rechenschrittweite des Lösungsalgorithmus verringert werden. Das wiederum führt zu einer hohen Gesamtrechenzeit und ist somit auch für Echtzeitanwendungen nicht mehr nutzbar. Hinzu kommt, dass die Modelle für die flexiblen MKS auf einer statischen und dynamischen Kondensation von FE-Modellen bezüglich der Koppelstellen basieren und in der Regel nur für eine Arbeitsraumposition gültig sind [QUE05]. Deshalb beschränken sich die Berechnungen von Verfahrbewegungen bisher auf kleine Wegstrecken [MEI08]. Zusätzlich kann die lokale Kontaktsteifigkeit bei der einfachen modalen Reduktion nicht berücksichtigt werden.

SEKLER [SEK12] präsentiert eine Methode, mit der die Relativbewegung zwischen zwei Teilstrukturen realisiert wird, die aus der modalen Reduktion stammen. Bei dieser Beschreibungsmethode finden die dynamischen Kräfte keine Berücksichtigung. Für eine ähnliche Vorgehensweise haben sich auch RUDOLF [RUD12] sowie HOHER und RÖCK [HOH11] entschieden. Mit dieser Beschreibungsvariante ist es möglich nichtlineare Koppelbedingungen zu berücksichtigen [RUD12]. An einem Beispiel einer Linearachse werden zwei FE-Teilkomponenten durch jeweils ein modal reduziertes Modell approximiert. In der Echtzeitumgebung sind diese Modelle durch nichtlineare Koppelbedingungen miteinander verbunden, um eine Relativbewegung zu realisieren. Die Echtzeitfähigkeit erhöht sich durch die parallelisierte Berechnung [HOH11].

FONSECA [FON00] und SIEDL [SIE08] empfehlen dagegen die Anwendung der nodalen Körper. Damit entfällt die aufwändige Selektion der Schnittstellenknoten, da auf jeden Knoten zugegriffen werden kann. Dem Vorteil der höheren Modellgenauigkeit, der dadurch entsteht, steht ein deutlich größerer numerischer Aufwand entgegen, da die Ersatzmodelle mit einer großen Anzahl von Ein- und Ausgängen behaftet sind [HOF08, SEK12]. Dieser Ansatz wird in der

vorliegenden Arbeit aufgegriffen und durch die Reduktion der Ein- und Ausgangsräume wird eine Lösung für diese Problemstellung in Unterkapitel 5.4.2 geliefert.

Bei einer Verfahrbewegung wandert die resultierende Last durch die Neukopplung von einem Schnittstellenknoten zum nächsten. Ein einfaches Umschalten zwischen den jeweiligen Knoten erzeugt im Modell Schwingungen, die im realen System nicht vorkommen. Deshalb ist eine Modellierung der kontinuierlichen Krafteinleitung notwendig. Dies wird mit einer erhöhten Anzahl von Koppelknoten ermöglicht, die die resultierende kontinuierliche Krafteinleitung durch eine parabolische Verteilungsfunktion in der flexiblen Struktur darstellt [SIE08].

2.4 Mathematische Grundlagen

2.4.1 Grundgleichungen zur Systembeschreibung

Um komplexe mechanische Strukturen zu berechnen werden diese durch eine Diskretisierung in N_{FHG} Freiheitsgrade zerlegt, wie es in Bild 2-2 c) dargestellt ist. Dadurch entstehen N_{FHG} diskrete Elemente, deren Eigenschaften durch einfache Ersatzmodelle dargestellt werden können. Durch das Zusammensetzen der N_{FHG} Elemente entsteht eine Approximation der komplexen mechanischen Struktur in Form eines Gleichungssystems. In diesem Gleichungssystem werden die entsprechenden Strukturverschiebungen im Verschiebungsvektor $\boldsymbol{q}(t)$ zusammengefasst. Wenn die Erregung an mindestens einem Freiheitsgrad des Systems angreift, wird dies zu einem inhomogenen System. Dabei muss die Dimension des Erregervektors $\boldsymbol{p}(t)$ nicht mit der Dimension des Systems übereinstimmen. Um eine Berechnung durchzuführen, wird der P-dimensionale Erregervektor mit der konstanten Matrix $\boldsymbol{B}\check{} \in \mathbb{R}^{N\times P}$ multipliziert [WOD04].

Aus rechentechnischen Gründen wird oft angenommen, dass die mechanischen Systeme linear und zeitinvariant sind und nur für kleine Deformationen Gültigkeit besitzen. Das dynamische Verhalten wird durch die folgende allgemeine Form der N-dimensionalen Matrizendifferentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + (\underbrace{\check{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{E}})\,\dot{\boldsymbol{q}}(t) + (\underbrace{\check{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{K}})\,\boldsymbol{q}(t) = \check{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{p}(t) \\ &\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}\boldsymbol{q}(t) + \check{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{p}(t)\,. \end{aligned} \tag{2-5}$$

Die erste Gleichung beschreibt die Dynamik des Systems mit der Matrix $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ als Massenmatrix. Die zweite Gleichung beschreibt die Ausgangsgleichung und ist für die Zuordnung von ausgewählten Zuständen verantwortlich. Die symmetrische Matrix $\check{\boldsymbol{E}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist die Dämpfungsmatrix und die schiefsymmetrische Matrix $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definiert die gyroskopische Matrix. Die gyroskopischen Effekte werden beispielsweise durch Kreiselwirkung oder Feder- und Dämpfungseigenschaften der Gleitlager hervorgerufen [WOD04]. Die symmetrische Matrix $\check{\boldsymbol{K}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ beschreibt die Steifigkeitsmatrix und $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ betitelt die schiefsymmetrische Matrix der nichtkonservativen, lageabhängigen und zirkulatorischen Kräfte. Diese Matrizen werden auch unter dem Begriff Systemmatrizen zusammengefasst [WEI00]. Die Matrizen $\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}}}$, $\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}}$ und $\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}} \in \mathbb{R}^{Q\times N}$ sind die Ausgangsmatrizen und $\boldsymbol{D}\check{} \in \mathbb{R}^{Q\times P}$ ist die Durchgangsmatrix, welche die direkte Zuordnung der Eingänge zu den Ausgängen beschreibt.

Das Eigenwertproblem für die obere Gleichung 2-5 wird mit dem Exponentialansatz $\boldsymbol{q}(t) = \hat{\boldsymbol{q}}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ gelöst. Daraus resultiert folgendes homogene, algebraische Gleichungssystem:

$$(\lambda^2\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}. \tag{2-6}$$

Damit die Gleichung für einen nichttrivialen Zustand erfüllt ist, muss die Determinante des Klammerausdrucks Null werden. Durch die Bildung der Determinante erfährt die Matrix einen Rangabfall, was zu einem Informationsverlust führt. Somit muss später ein Parameter vorgegeben werden. In der Regel wird die Anfangsamplitude für die Bestimmung des unbekannten Parameters verwendet. Die Gleichung hat *N* Lösungen inklusive ihrer konjugiert komplexen Eigenwerte:

$$\lambda_k, \lambda_k^* = -\delta_k \pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}k} \text{ mit } k = 1, 2, \cdots, N. \tag{2-7}$$

Der Eigenwert λ_k bezeichnet den *k*-ten Eigenwert mit positivem Realteil und der Eigenwert λ_k^* den *k*-ten Eigenwert mit dem negativen Imaginärteil. Der Realteil ist die Abklingkonstante δ_k, wobei $\omega_{\mathrm{d}k}$ die *k*-te Kreisfrequenz des gedämpften Systems ist, die auch unter dem Begriff Quasi-Eigenkreisfrequenz bekannt ist. Die Abklingkonstante beschreibt das Abklingverhalten des zugehörigen *k*-ten komplexen Eigenvektors. Die Eigenwerte werden in die Gleichung 2-6 eingesetzt und erhalten die zugehörigen komplexen Eigenvektoren [GAS12].

Die modale Zerlegung findet ihre Anwendung z. B. in der Modalanalyse. Mit dieser Analyse können die Eigenkreisfrequenz und die dazugehörige Eigenform einer Struktur berechnet werden. Sie ist unabhängig von der Belastungsart und dient daher sehr gut als Startpunkt für weitere dynamische Untersuchungen. Für die modale Zerlegung der Gleichung 2-5 werden die Eigenvektoren ohne Dämpfung berechnet, womit sich reelle Eigenwerte und die dazugehörigen reellen Eigenvektoren ergeben. Die Modalmatrix vereinfacht sich wie folgt:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{N}}]. \tag{2-8}$$

Mithilfe der Modalmatrix $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}}$ können die modale Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ und die modale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}$ berechnet werden. Erfüllt die Dämpfungsmatrix die Bequemlichkeitshypothese aus Gleichung 2-2, kann die modale Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$ auf die gleiche Art berechnet werden [GAS12].

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}},\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}} \text{ und } \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{Q} \tag{2-9}$$

Die einzelnen Matrizen sind aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren Diagonalmatrizen, womit das gekoppelte DGL-System in ein modales entkoppeltes DGL-System transformiert wird. Mit der modalen Anregung $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}(t) = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(t)$ wird folgende Gleichung aufgestellt:

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}(t). \tag{2-10}$$

Das entkoppelte *N*-dimensionale DGL-System entspricht *N* separaten Einmassenschwingern, die getrennt behandelt und superpositioniert werden können.

Mechanische Systeme können auf unterschiedliche Art und Weise beschrieben werden. Das Ziel der Beschreibung ist, eine Aussage über das Verhalten des Systems aufgrund einer Anregung zu treffen. Die wichtigsten drei Darstellungsarten sind die Zustandsraumdarstellung (ZRD), die Nullstellenpoldarstellung (engl.: Zero Pole Gain, kurz: ZPG) und die Übertragungsfunktion, die auch als Transferfunktion (TF) bekannt ist. Diese Darstellungsvarianten werden in diesem Kapitel vorgestellt. Zugunsten der Übersichtlichkeit wird im Weiteren auf die Darstellung der Variable *t* verzichtet und ist nicht als Einschränkung zu verstehen.

Die Übertragungsfunktion gibt die Eingangs- und die Ausgangsbeziehungen eines Systems wieder, ohne eine genaue Kenntnis der inneren Struktur des Systems zu besitzen. Das Übertragungsverhalten eines Systems kann zum einen im Zeitbereich oder zum anderem im Frequenzbereich angegeben werden. Im Frequenzbereich werden aus den Übertragungsfunktionen die Frequenzgangfunktionen gebildet. Diese werden für lineare zeitinvariante Systeme als

Quotient des Fourier-Spektrums des Ausgangs und des Eingangs des Systems angegeben unter der Voraussetzung, dass die Erregung und somit auch der Eingang deterministisch sind [DIN1311-1]. Für solche linearen zeitinvarianten Systeme sind die Frequenzgänge invertierbar. Diese allgemeine Definition des Frequenzgangs ist auch auf die Zustandsraumdarstellung einer komplexen Übertragungsfunktion anwendbar. Da die Fourier-Transformation Beschränktheit fordert, ist eine Darstellung über die Laplace-Transformation mit den komplexen Variablen

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega \tag{2-11}$$

zu wählen. Der Realteil der Laplace-Variable σ entspricht der Dämpfung im System und der Imaginärteil ω ist die Kreisfrequenz [LOH04].

Die Übertragungsfunktion wird dann durch die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Gleichung 2-5 wie folgt gebildet:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TF}}(s) = (s^2\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}}} + s\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{q}})\cdot(s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}. \tag{2-12}$$

Durch die Übertragungsfunktion ist eine eindeutige Zuordnung des Eingangs und des Ausgangs eines Systems gegeben. Mit $s = \mathrm{j}\tilde{\omega}$ und $\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}}} = 0$ sowie $\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}} = 0$ wird mit dieser Übertragungsfunktion das Bodediagramm erstellt.

Die üblichen numerischen Integrationsverfahren und die spätere Analyse der Stabilität des Systems setzen eine Formulierung des Systems erster Ordnung voraus, die als Zustandsraumdarstellung bezeichnet wird. Im Gegensatz zur Systembeschreibung im Bildbereich mittels der Übertragungsfunktion gibt die Zustandsraumdarstellung nicht nur das funktionelle Eingangs-Ausgangs-Verhalten eines Systems an, sondern auch das Verhalten der inneren Struktur [CZI08]. Der Zustand eines dynamischen Systems wird durch den Energiegehalt, das heißt die potentielle und die kinetische Energie, bestimmt. Deshalb kann durch die Kenntnis eines Zustands, bei dem der Weg und die entsprechende Geschwindigkeit direkt mit der Energie verbunden sind, das zukünftige Verhalten des Systems zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass die äußeren Einflüsse bekannt sind [UNB07].

Die Zustandsraumdarstellung ist für die numerische Beschreibung in CACE-Programmen gut geeignet. Die Vorteile dieser Beschreibungsart eines Systems gegenüber der Beschreibung über die DGL *N*-ter Ordnung sind die übersichtliche Darstellungsform, die einfache Untersuchungsmöglichkeit der Steuer- und Beobachtbarkeit sowie die Stabilität eines Systems [LUN05]. Im Folgenden wird auf die Konstruktion des Zustandsraums aus der DGL zweiter Ordnung aus Gleichung 2-5 eingegangen. Dazu werden folgende Variablen definiert:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}}\end{aligned}\right\}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}}\,. \tag{2-13}$$

Die Ausgangsgleichungen definieren die Zuordnung der nach außen sichtbaren bzw. messbaren Zustände [WOD04].

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{q}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{y}_{\dot{\mathrm{q}}} = \boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}}\dot{\boldsymbol{q}} \text{ und } \boldsymbol{y}_{\ddot{q}} = \boldsymbol{C}_{\ddot{q}}\ddot{\boldsymbol{q}} \tag{2-14}$$

Da in der Zustandsraumdarstellung die Zustände nur in der nullten und in der ersten zeitlichen Ableitung vorliegen, muss für die Erhaltung der Zustände der zweiten Ableitung eine Gleichung hinzugezogen werden, die aus der Umstellung der Gleichung 2-5 stammt.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,I}} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}} - \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p} \tag{2-15}$$

Daraus ergeben sich die Matrizen für die Ausgangsgleichung mit der Information der zweiten Ableitung:

$$\boldsymbol{y}_{\ddot{q}} = \underbrace{\left[-\check{\boldsymbol{C}}_{\ddot{q}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} \;\; -\check{\boldsymbol{C}}_{\ddot{q}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}\right]}_{\hat{\boldsymbol{C}}_{\ddot{q}}}\dot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{\left[\check{\boldsymbol{C}}_{\ddot{q}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}\right]}_{\boldsymbol{D}_{\ddot{q}}}\boldsymbol{p} \quad . \tag{2-16}$$

Die Ausgangsvektoren lassen sich je nach Anwendungsfall zu einem Vektor und die einzelnen Ausgangsmatrizen zu einer Matrix zusammenfassen [WOD04, GEB11]:

$$\boldsymbol{y}_{q} = \boldsymbol{C}_{q}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{y}_{\dot{q}} = \boldsymbol{C}_{\dot{q}}\dot{\boldsymbol{q}} \text{ und } \boldsymbol{y}_{\ddot{q}} = \hat{\boldsymbol{C}}_{\ddot{q}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}_{\ddot{q}}\boldsymbol{p} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_{\ddot{q}}\\ \boldsymbol{y}_{\dot{q}}\\ \boldsymbol{y}_{q}\end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{\ddot{q}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{\dot{q}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{q}\end{bmatrix}. \tag{2-17}$$

Mit der Substitution und den zusätzlichen Ausgangsgleichungen wird aus Gleichung 2-5 das folgende Gleichungssystem [GAW04]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,I}} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}}.\end{aligned} \tag{2-18}$$

Dieses Gleichungssystem kann unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{DA}} + \boldsymbol{D}_{\ddot{q}}$ und $\boldsymbol{D}_{\mathrm{DA}}$ als Durchgangsanteil der Durchgangsmatrix, wie folgt zu einer Gleichung zusammengeführt werden:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,II}}\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}-\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR}} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2-19}$$

Die allgemeine Form des Zustandsraums (ZR) für ein lineares, zeitinvariantes und dynamisches System lautet somit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR}} &= \check{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}}\\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR}} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}}.\end{aligned} \tag{2-20}$$

Bei dieser Darstellung wird implizit davon ausgegangen, dass es sich um ein singuläres Problem handelt und somit auch um eine algebraische Differentialgleichung (engl.: Differential Algebraic Equation, kurz: DAE). Dagegen lässt sich die Matrix $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}$ bei einem nichtsingulären Problem invertieren.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,II}}\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,I}}\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,II}}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2-21}$$

In der zusammengefassten Schreibweise ergibt sich mit $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}} = (\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}$ die folgende Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}}\\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR}} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}}.\end{aligned} \tag{2-22}$$

Bei dieser Darstellung handelt es sich um gewöhnliche Differenzialgleichungen (engl.: Ordinary Differential Equation, kurz: ODE). Die erste Gleichung wird als Zustandsgleichung bezeichnet, die die Dynamik des Systems wiedergibt, während die zweite Gleichung auch als Ausgangs- oder Beobachtungsgleichung bekannt ist [UNB07]. Die hier verwendete Matrizendarstellung ist allgemein gehalten, damit die Fälle eines Single-Input-Single-Output(SISO)-, Single-Input-Multi-Output-, Multi-Input-Single-Output- und Multi-Input-Multi-Output(MIMO)-Systems ihre Berücksichtigung finden. Im Falle eines SISO-Systems werden aus den Matrizen $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}$ und $\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}$ Vektoren und die Matrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR}}$ wird zu einem Skalar.

Der Zustandsvektor $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}}$ gibt durch die Lage und die Geschwindigkeit den Systemzustand an. Seine Dimension $n = 2N$ wird als Ordnung des Systems bezeichnet. Der Vektor $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}}$ ist als

Eingangsvektor bekannt, in dem die äußere Anregung enthalten ist, während $\boldsymbol{y}_{ZR}$ als Ausgangsvektor bezeichnet wird. Die $n \times n$ Dynamikmatrix wird durch $\boldsymbol{A}_{ZR}$ ausgedrückt und enthält Informationen über das Eigenverhalten des Systems [WEI00], zum Beispiel dessen Stabilität wie in Unterkapitel 2.4.3 näher dargestellt wird. Die Gestalt der Dynamikmatrix sowie der $n \times p$ Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{ZR}$ mit $p = 2P$ ist unabhängig davon, wie die Ausgänge des Systems sind. Die Ausgänge können Verschiebungen, Geschwindigkeiten und bzw. oder Beschleunigungen beinhalten [SEK12]. Die Eingangsmatrix beschreibt die Art des Einwirkens der äußeren Erregung, wohingegen die $q \times n$ Ausgangs- oder Beobachtungsmatrix $\boldsymbol{C}_{ZR}$ mit $q = 2Q$ den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen und den Ausgangsgrößen angibt. Der direkte proportionale Einfluss der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen ist mit der $q \times p$ Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}_{ZR}$ gegeben. Diese Matrix entsteht beispielsweise bei sprungfähigen Systemen. Die Beobachtungsmatrix und die Durchgangsmatrix sind abhängig von der Art der Ausgänge.

2.4.2 Systemtheorie

Neben der Systemstabilität stellt sich stets auch die Frage nach der Beobachtbarkeit und der Steuerbarkeit. Zu deren Klärung sind aus der Regelungstechnik Berechnungsvorschriften bekannt. Zu Gunsten der Übersichtlichkeit wird hier auf den Index „ZR“ verzichtet. Die Prüfung auf Beobachtbarkeit ist wichtig für die Fragestellung, ob durch eine Messung überhaupt hinreichende Informationen über das dynamische Systemverhalten gewonnen werden können. Die Beobachtbarkeit wird über das Rangkriterium von Kalman geprüft [UNB07].

$$\operatorname{rang}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \vdots \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \vdots \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}2}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}n-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}] = n \tag{2-23}$$

Dabei ist n die Anzahl der Freiheitsgrade. Dieses Kriterium ergibt nur Ja- oder Nein-Aussagen. Bei einer negativen Aussage kann das Kriterium von Hautus verwendet werden. Es gibt Informationen darüber, welche Moden beobachtbar sind und welche nicht [LUN05].

$$(\lambda_j \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_j = 0 \Rightarrow \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2-24}$$

Nach der Beobachtbarkeit wird nach dem Rangkriterium nach Kalman kontrolliert, ob das System steuerbar ist.

$$\operatorname{rang}[\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n \tag{2-25}$$

Auch hier können mit diesem Kriterium nur Ja- oder Nein-Aussagen getroffen werden. Wenn sich eine negative Aussage herausstellt, sollte wieder das Kriterium von Hautus herangezogen werden. Nach diesem Kriterium werden Aussagen darüber getroffen, welche Schwingungsmoden steuerbar sind und welche nicht [LUN05].

$$(\lambda_j \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_j = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j \neq \boldsymbol{0} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2-26}$$

Aussagen über die Steuerbarkeit und Regelbarkeit von Systemen können auch über die folgende, sogenannte Lyapunov-Gleichung geleistet werden, falls die Dynamikmatrix eine Hurwitz-Matrix ist [LUN05]

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \;\text{ und }\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \tag{2-27}$$

mit

$$\boldsymbol{P} = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \tag{2-28}$$

als sogenannte Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{P}$ und der folgenden Definition der Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}$.

$$\boldsymbol{Q} = \int_0^\infty \left(e^{\boldsymbol{A}t}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\, e^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t \tag{2-29}$$

Die Matrizen hängen stark vom Aufbau des Systems ab, aber die Eigenwerte aus der Matrixmultiplikation der Matrizen ***PQ*** sind unabhängig von der Transformation. Die Quadrate der Eigenwerte λ_k von ***PQ*** aus einem stabilen System werden als Hankel-Singulärwerte (engl.: Hankel Singular Values, kurz: HSV) bezeichnet und sind wie folgt definiert [ANT05].

$$\sigma_{\mathrm{HSV},k} = \sqrt{\lambda_k} \tag{2-30}$$

Diese Eigenwerte beschreiben die Systemenergie [UNB07]. Um dynamische Systeme quantifizieren zu können, werden mathematische Normen verwendet. Zum Messen und Vergleichen besitzen zwei mathematische Normen eine besondere Bedeutung. Die $\mathcal{H}_2$-Norm ist ein Maß für die in der Impulsantwort enthaltene Energie. Diese Norm kann im Frequenzraum und im Zeitbereich definiert werden [FON00].

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2} = \|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\mathrm{i}\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \quad \text{bzw.} \quad \|G_j\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|G_{ij}\|_2^2} \tag{2-31}$$

DOYLE ET AL. [DOY92] präsentieren eine hilfreiche Form mittels der Eingangsmatrix zur Berechnung der Norm.

$$\|G\|_2^2 = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B} \tag{2-32}$$

Die $\mathcal{H}\infty$-Norm beschreibt den höchsten Punkt im Amplitudengang und mithin die größte Verstärkung, die ein Eingangssignal erfahren kann. Diese Norm ist folgendermaßen definiert:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \|G\|_\infty = \max_\omega |G(\mathrm{i}\omega)| \,. \tag{2-33}$$

Die Norm stellt prinzipiell eine Abbildung dar, mit der bspw. ein Vektor oder eine Matrix zu einer Zahl zugeordnet wird. Grundsätzlich kann die Norm durch die *p*-te Wurzel der Summe der *p*-ten Potenz der Vektor- oder Matrixeinträge berechnet werden. Mit $p = 2$ wird diese Norm als Spektralnorm bezeichnet. Im Falle, dass *p* unendlich ist, wird die Norm als Zeilensummennorm oder als Unendlich-Norm bezeichnet.

2.4.3 Stabilitätsbetrachtung

In der Systemdynamik existieren unterschiedliche Definitionen für den Begriff der dynamischen Stabilität. In der nichtlinearen Dynamik ist die Definition nach Lyapunov verbreitet. In diesem Zusammenhang wird ein System als stabil bezeichnet, wenn die Lösungen ausgehend von einem beliebigen Punkt innerhalb einer kleinen Umgebung um den Gleichgewichtspunkt ausgelenkt werden und wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehren. Für lineare zeitinvariante Systeme können mit den Eigenwerten λ der Dynamikmatrix, die identisch mit den Polstellen sind, aus Gleichung 2-22 Aussagen über die Stabilität abgeleitet werden [WOD04].

$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ instabil
$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ grenzstabil
$\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ stabil

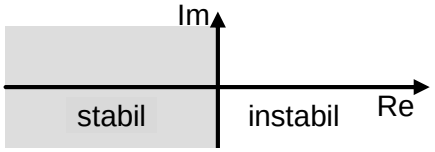


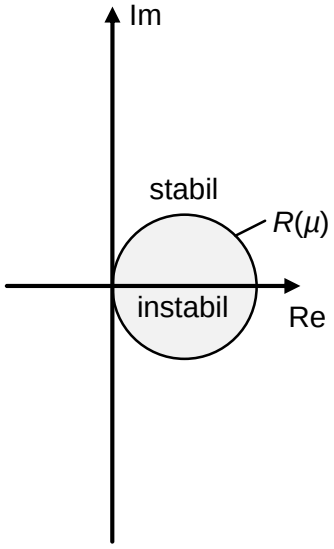
Bild 2-9: Stabilitätsgebiet eines linearen Systems im Zustandsraum

Neben der Stabilität eines Systems existiert der Begriff der A-Stabilität im Zusammenhang mit einem numerischen Lösungsalgorithmus. Bei diesem Begriff geht es um die Stabilität des Lösungsalgorithmus mit zeitdeterministischer fester Rechenschrittweite. Die Wahl des Lösungsalgorithmus besitzt eine hohe Relevanz für echtzeitfähige Simulationsmodelle und bei der Kopplung unterschiedlicher Modelle. Echtzeitfähige Berechnungsmodelle werden bei HiLS für die Steuerungsoptimierung, für die Online-Identifizierung und für die simulationsbasierte Funk-

tionskontrolle, wie bspw. Condition Monitoring oder für modellprädikative Bahnplanung benötigt [HOH11]. Insbesondere bei der HiLS kommt hinzu, dass diese während des Lösungsprozesses nur einen geringen Speicherbedarf aufweisen dürfen. Bei der Kopplung unterschiedlicher Modelle sind deterministische Rechenschrittweiten vorteilhaft für den Austausch von Lösungen der Teilmodelle.

Bei den Lösungsalgorithmen mit festen Rechenschrittweiten kann zwischen impliziten und expliziten Verfahren unterschieden werden. Bei dem impliziten Lösungsalgorithmus ist der aktuelle Lösungsschritt vom zukünftigen, noch zu berechnenden Lösungsschritt abhängig. Deshalb benötigen implizite Lösungsalgorithmen einen höheren Speicher- und Zeitbedarf als explizite. Der Vorteil des impliziten Lösungsalgorithmus ist jedoch, dass für ein physikalisch stabiles System immer eine stabile Lösung liefert. Bei einem physikalisch stabilen System liegen die Eigenwerte λ der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}$ in der negativen komplexen Ebene. Das Stabilitätsgebiet $R(\mu)$ des impliziten Lösungsalgorithmus befindet sich außerhalb des Instabilitätskreises auf der positiven komplexen Ebene, siehe Bild 2-10 in Teilbild a). Daher sind die Lösungen eines stabilen physikalischen Systems mit einem impliziten Lösungsalgorithmus auch stabil.

a) Stabilitätsgebiet des impliziten Euler-Lösungsalgorithmus



b) Stabilitätsgebiete der expliziten Runge-Kutta-Lösungsalgorithmen

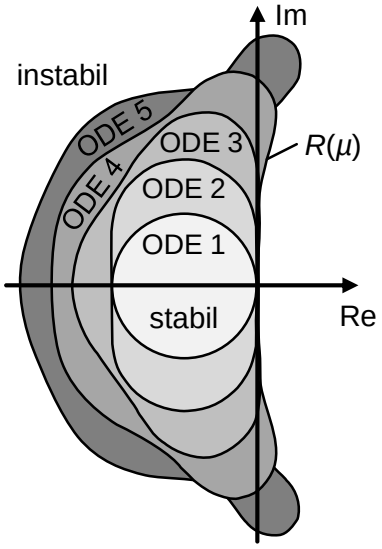


Bild 2-10: A-Stabilität impliziter und expliziter Lösungsalgorithmen in der komplexen Ebene

Bei expliziten Lösungsalgorithmen, wie sie bei der HiLS aufgrund der deterministischen Rechenschrittweite benötigt werden, ist das Stabilitätsgebiet von der Funktion $R(\mu) < 1$ umhüllt, vgl. Bild 2-10 in Teilbild b). Diese Lösungsalgorithmen werden zum Beispiel in MATLAB mit der Abkürzung ODE bezeichnet.

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \cdots + \frac{\mu^k}{p!} + \mathcal{O}(\mu^{k+1}) \tag{2-34}$$

Die Größe des Stabilitätsgebiets $R(\mu)$ der obigen Gleichung 2-34 ist aufgrund von $\mu = h\lambda$ abhängig von der Rechenschrittweite h und von der Ordnung p, die die Art des Lösungsalgorithmus bestimmt [GEK06]. Je kleiner die Schrittweite eines expliziten Lösungsalgorithmus ist, desto größer wird das Stabilitätsgebiet des Lösungsalgorithmus. In Bild 2-10 b) sind die Stabilitätsgebiete der üblichen expliziten Einschrittverfahren von $k = 1$ bis $k = 5$ dargestellt, die auch als Runge-Kutta-Verfahren bekannt sind.

2.5 Konzepte und Grundlagen der Modellordnungsreduktion

2.5.1 Einführung

Die Simulation von hochdimensionalen Systemen ist sehr zeit- und ressourcenaufwändig. Aufgrund des begrenzten zur Verfügung stehenden Arbeitsspeichers können Simulationen großer Systeme nicht vollumfänglich durchgeführt werden. In diesen Fällen führt die Modellordnungsreduktion aufgrund der Reduktion der Systemgröße zur Minimierung der benötigten Hardware und Simulationszeit.

2.5.2 Projektionsverfahren

Die direkte Verwendung komplexer hochdimensionaler Modelle, wie sie typischerweise bei der FEM entstehen, ist für die effiziente Berechnung von nachgelagerten Prozessen wie bspw. für die Dynamikanalyse aufgrund der extrem großen Rechenzeiten nicht praktikabel [SEK12]. Daher liegt es nahe, die Freiheitsgradanzahl der Modelle mittels Modellordnungsreduktionsverfahren (MOR-Verfahren) zu verringern. Die Aufgabe des Verfahrens ist die Approximation eines Referenzsystems durch ein möglichst niedrigdimensionales Ersatzsystem. Dieses System soll allgemein aus aussagekräftigen Gleichungssystemen bestehen, die das Systemverhalten in hinreichender Genauigkeit wiedergeben. Zur Approximation des Ersatzsystems existieren unterschiedliche Verfahren, wie in Bild 2-11 gezeigt. Die klassischen Verfahren werden in diesem Abschnitt und die modernen Verfahren im Kapitel 5 beschrieben.

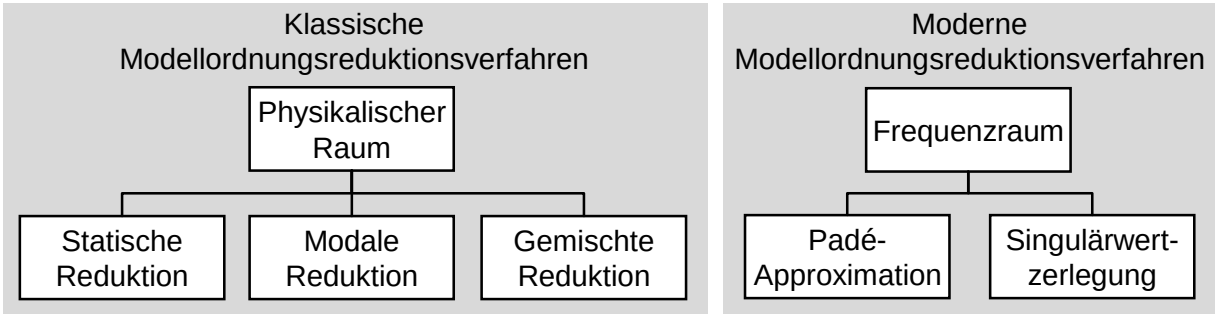


Bild 2-11: Übersicht ausgewählter klassischer und moderner Modellordnungsreduktionsverfahren

Wie bei der modalen Reduktion als Vertreter der klassischen Methoden können die modernen Reduktionsverfahren allgemein als Projektionsverfahren verstanden werden. Die Modellordnungsreduktion wird durchgeführt, indem geeignete Projektionsmatrizen zur Erzeugung der niedrigdimensionalen Räume mit den hochdimensionalen Räumen multipliziert werden. Daher wird hier zunächst auf die Theorie der Projektionen eingegangen. Dafür ist die Definition notwendig, dass $\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}$ genau dann eine Projektion ist, wenn $\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}$ ein Element aus einem Vektorraum $\boldsymbol{O}$ und zusätzlich idempotent ist. Idempotent bezeichnet eine Funktion beziehungsweise ein Element einer Menge, das mit sich selbst verknüpft wieder sich selbst ergibt. Bei orthogonalen Projektionen mit orthogonalen Basen $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ gilt zudem $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$, so dass sich die Gleichung 2-35

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V})^{-1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \tag{2-35}$$

vereinfacht darstellen lässt als

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}. \tag{2-36}$$

Die Projektion aus Gleichung 2-35 wird als Petrov-Galerkin-Projektion und die vereinfachte Gleichung 2-36 als Galerkin-Projektion bezeichnet [GRI97, ANT05].

Somit wird die Suche nach einer geeigneten Approximation zum reduzierten System zu einer Suche nach einer geeigneten Projektionsmatrix. Zur Erzeugung dieser Projektionsmatrizen existieren unterschiedliche Ansätze. Die spätere Anwendung dieser Matrizen und somit der Arbeitsablauf zur Erzeugung des reduzierten Systems erfolgen grundsätzlich nach dem gleichen Muster. Für die allgemeine Differentialgleichung wird eine Projektionsmatrix $\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}$ gesucht, die aus einem N-dimensionalen Gleichungssystem ein Differentialgleichungssystem L-ter Dimension mit $L \ll N$ erstellt, wie im Nachfolgenden beispielhaft skizziert ist:

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{red}} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}} \cdot \boldsymbol{q} \text{ mit } \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{N},\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L} \text{ und } \boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}} \in \mathbb{R}^{L \times N}. \tag{2-37}$$

Wird nun die Gleichung 2-37 in die Gleichung 2-5 eingesetzt und von links mit der transponierten Projektionsmatrix multipliziert, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}}_{\boldsymbol{M}_{\mathrm{red}}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{red}} + \underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}}_{\boldsymbol{E}_{\mathrm{red}}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{red}} + \underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}}_{\boldsymbol{K}_{\mathrm{red}}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{red}} = \underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}_{\mathrm{red}}}\boldsymbol{p}\,. \tag{2-38}$$

Die Reduktion eines N-dimensionalen Systems zweiter Ordnung zu einem L-dimensionalen System zweiter Ordnung wird durch den L-dimensionalen Unterraum dargestellt. Dies wird in Bild 2-12 visualisiert.

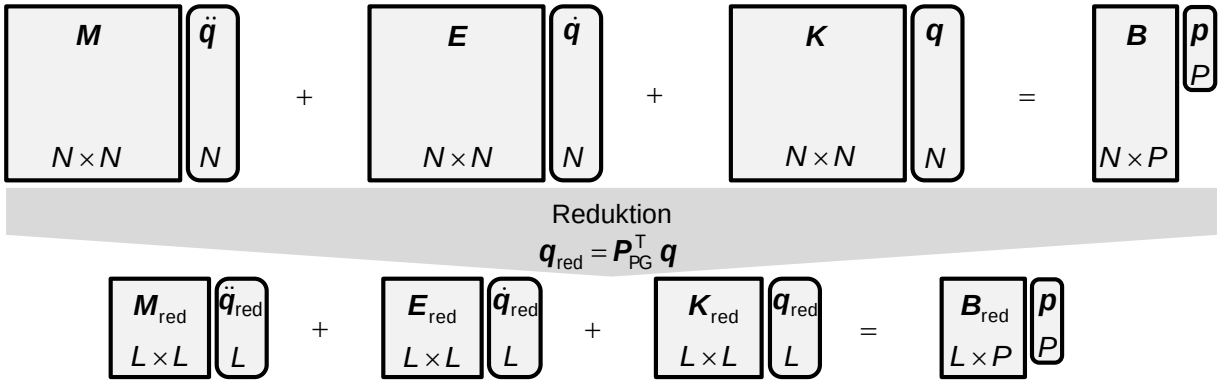


Bild 2-12: Schematische Darstellung der Ordnungsreduktion eines Systems zweiter Ordnung

Diese Projektion kann auch an der Zustandsraumdarstellung des Systems erster Ordnung angewendet werden, wobei die Projektionsmatrix dann demgemäß angepasst werden muss.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR}} &= \underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR,red}}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}}_{\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR,red}}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR}} &= \underbrace{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}}_{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR,red}}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \underbrace{\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR}}}_{\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR,red}}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR}}\end{aligned} \tag{2-39}$$

Eine weitere Methode zur Systemfreiheitsgradreduktion ist die Streichung von nicht steuerbaren und nicht regelbaren Systemzuständen der Zustandsraumdarstellung aus Gleichung 2-22. Diese Minimalrealisierung hat jedoch den Nachteil, dass aufgrund der Vernachlässigung der schwach steuerbaren und schwach regelbaren Systemanteile die Genauigkeit des Übertragungsverhaltens nicht garantiert werden kann.

2.5.3 Klassische Reduktionsverfahren

Die statische Reduktion, die auch als Guyan-Reduktion bekannt ist, beschreibt eine Kondensation der Systemmatrizen durch eine sukzessive Eliminierung von Zeilen und Spalten ausgewählter Freiheitsgrade [GUY65]. Bei diesem Verfahren werden die Verschiebungsvektoren wie folgt nach Hauptfreiheitsgraden und nach Nebenfreiheitsgraden sortiert und partitioniert: $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}})^{\mathrm{T}}$ [SIE08, GAS12].

Die Hauptfreiheitsgrade werden mit einem H als Index gekennzeichnet. Die Wahl der Hauptfreiheitsgrade, die eine Auswahl der als am wichtigsten erachteten FE-Knoten darstellt, erfolgt aus unterschiedlichen Gründen. Diese werden entweder physikalisch motiviert oder durch formale Überlegungen gewählt. Bei der physikalischen Überlegung können bestimmte Freiheitsgrade vernachlässigt werden oder die relevanten Bewegungsrichtungen erhalten bleiben, in denen sich die Massen konzentrieren oder an denen die äußere Anregung bzw. Kopplungsbedingungen angreifen [WIS06]. Die restlichen Freiheitsgrade werden als Nebenfreiheitsgrade eingestuft und mit einem N als Index gekennzeichnet. Damit wird das Gleichungssystem aus dem folgenden Schur-Komplement zusammengesetzt [LIE07].

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathrm{HH}} & \boldsymbol{M}_{\mathrm{HN}} \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{NH}} & \boldsymbol{M}_{\mathrm{NN}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{H}} \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{\mathrm{HH}} & \boldsymbol{E}_{\mathrm{HN}} \\ \boldsymbol{E}_{\mathrm{NH}} & \boldsymbol{E}_{\mathrm{NN}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{H}} \\ \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{HH}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{HN}} \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{NH}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{NN}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{2-40}$$

Anschließend wird ein konservatives Hilfssystem erstellt, bei dem die Dämpfung vernachlässigt wird und nur die Massen der Hauptfreiheitsgrade berücksichtigt werden [WIS06].

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathrm{HH}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{H}} \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{HH}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{HN}} \\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{NH}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{NN}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{2-41}$$

In der zweiten Zeile des obigen Gleichungssystems Gleichung 2-41 ist ein statischer Zusammenhang gegeben. Mit dieser homogenen Gleichung wird eine Verknüpfung zwischen den Hauptfreiheitsgraden $\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}$ und den Nebenfreiheitsgraden $\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$ hergestellt.

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = -\boldsymbol{K}_{\mathrm{NN}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{NH}}\boldsymbol{u}_{H} \tag{2-42}$$

Mit dieser Näherung wird die benötigte Transformationsmatrix $\boldsymbol{P}_{\mathrm{SR}}$ in Gleichung 2-43 erzeugt, wie in der Referenz [GAS12] ausführlich dargestellt wird.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \hline -\boldsymbol{K}_{\mathrm{NN}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{NH}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}_{\mathrm{SR}}} \underbrace{\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}}_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{red}}} \tag{2-43}$$

Bei der statischen Reduktion wird die Dynamik ignoriert, was an der Abwesenheit der Massenmatrix zu erkennen ist. Deshalb ist dieses Verfahren für hochdynamische Werkzeugmaschinen nicht erfolgsversprechend. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass die Größe des Systems um sechs Hauptfreiheitsgrade je Ein- und Ausgang anwächst [SEK12].

Die modale Reduktion wird für Systeme mit geringer Dämpfung oft genutzt. Die anfängliche Vorgehensweise der modalen Reduktion entspricht der modalen Zerlegung. Im Gegensatz zur vollständigen modalen Matrix der Gleichung 2-8 werden hier nicht alle *N* Eigenvektoren in der Modalmatrix verwendet, sondern nur die ersten Eigenvektoren bis zur relevanten Eigenkreisfrequenz *L*. Somit entsteht eine reduzierte Modalmatrix $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}}$. Abhängig davon, wie groß die Frequenznachbarschaften der letzten Eigenkreisfrequenzen und ihre Einflüsse auf den interessanten Frequenzbereich des Systems sind, müssen zusätzliche Eigenvektoren betrachtet werden [GAS12]. Daraus ergibt sich die folgende Projektionsmatrix:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{modal}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{L}}]. \tag{2-44}$$

Es ist zu beachten, dass diese Reduktion nicht eindeutig ist. Die Projektionsmatrix ist davon abhängig, wie die Eigenvektoren sortiert und skaliert werden. Häufig werden die Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix normiert. Daraus resultiert

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}} = \mathrm{diag}\left\{2\vartheta_1\omega_1^2, \cdots, 2\vartheta_{\mathrm{L}}\omega_{\mathrm{L}}^2\right\},\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}} = \mathrm{diag}\left\{\omega_1^2, \cdots, \omega_{\mathrm{L}}^2\right\} \tag{2-45}$$

mit ϑ_k als modalem Dämpfungsgrad, siehe Bild 2-8, α als massen- und β als steifigkeitsproportionaler Vorfaktor, ϑ als globaler Dämpfungsgrad sowie ϑ_L als Dämpfungsgrad der L-ten Eigenform, der sich wie folgt berechnen lässt:

$$\vartheta_k = \frac{\alpha}{2\omega_k} + \frac{\beta\omega_k}{2} + \vartheta + \vartheta_{L,k} \quad \text{für } 1 \le k \le L. \tag{2-46}$$

Insbesondere bei der Verwendung der modalen Reduktion in der Substrukturtechnik hat sich gezeigt, dass die Genauigkeit dieser Methode geringer ist als die anderen klassischen MOR-Verfahren. Für eine höhere Genauigkeit muss eine hohe Anzahl an Moden berücksichtigt werden [GAS12], was aber häufig zu einem deutlichen Anwachsen des Berechnungssystems führt. Zusätzlich besitzt dann dieses System hochfrequente Anteile, die sich negativ auf die HiLS auswirken. Außerdem wird das Ersatzsystem aufgrund der Streichung von Moden steifer. Vorteilhaft an dieser Methode ist die Unabhängigkeit von der Dimension des Ein- und Ausgangsraums. Die reine modale Reduktion ist für mechanische Strukturen ungeeignet [WEI01], da die externen Freiheitsgrade keine Masse besitzen [SEK09].

Die Kombination der statischen und modalen Reduktion führt zur Component-Mode-Synthesis (CMS) [FON00] oder auch Craig-Bampton-Methode [CRA68], wobei die reduzierten Freiheitsgrade oft als Craig-Bampton-Moden betitelt werden [HOF05]. Durch seine Integration in die kommerzielle FE-Software erfuhr es im letzten Jahrzehnt eine starke Verbreitung [MAG10], obwohl diese Reduktion häufig einen Fehler von 10 % aufweist [FON00]. Mit der CMS können die strukturdynamischen Eigenschaften einer Werkzeugmaschine in ein Mehrkörpersystem integriert werden [SEK12, KOU13], um die Mechanik des Systems unter Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften detailliert zu untersuchen [KIP09].

Zunächst werden die wichtigen Freiheitsgrade, hier die Hauptfreiheitsgrade, nach unten in den Verschiebungsvektor verschoben, wie es in Gleichung 2-40 dargestellt ist. Die wichtigsten Freiheitsgrade sind sorgfältig auszuwählen, da eine nachträgliche Änderung der reduzierten Systeme nicht mehr möglich ist [SIE08]. Wichtige Freiheitsgrade sind bei der Erstellung reduzierter Systeme, die miteinander gekoppelt werden sollen, die Schnittstellenknoten und Knoten, an denen die restlichen Randbedingungen angreifen. Anschließend wird ein dämpfungsfreies konservatives Hilfssystem erstellt, in dem die Hauptfreiheitsgrade auf Null gesetzt werden, damit später der statische Zusammenhang geliefert werden kann [GAS12].

$$\boldsymbol{M}_{NN}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{NN}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}_N \quad \text{beziehungsweise} \quad \boldsymbol{0} \tag{2-47}$$

Durch geschicktes Zusammenfügen der reduzierten Modalmatrix $\boldsymbol{Q}_{red}$ mit den statischen Eigenschaften wird die Projektionsmatrix wie Gleichung 2-48 zusammengestellt.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_H\\ \boldsymbol{u}_N\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{red} & -\boldsymbol{K}_{NN}^{-1}\boldsymbol{K}_{NH}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}_{CMS}}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_{red}\\ \boldsymbol{u}_H\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}_{red}} \tag{2-48}$$

Jedoch ist diese Projektionsmatrix ebenfalls nicht eindeutig, da sie von der freien Wahl der Reihenfolge und der Normierung der Eigenformen abhängt. Durch diese Reduktionsart sind die reduzierten Matrizen nicht mehr diagonaldominant, das heißt es besteht eine Kopplung zwischen den unterschiedlichen Freiheitsgraden [BER03].

Zur Erhöhung der Modellgenauigkeit werden Korrekturverfahren angewendet [WEI01]. Die statischen Korrekturmoden werden durch eine Einheitsverformung jedes gewählten Schnittstellenknotens erzeugt, während alle anderen Schnittstellenknoten festgehalten werden [HOF05]. Die Schnittstellenknoten entsprechen häufig den Hauptfreiheitsgraden. Die daraus

resultierenden Verformungen werden als statische Korrekturmoden verwendet. Für die Modellierung von Verfahrbewegungen wird eine erhöhte Anzahl von Koppelknoten benötigt, die zur Erhöhung der statischen Korrekturmodenanzahl und damit zugleich zur Erhöhung der Systemdimension führen [BER03, SIE08]. Durch die Erhöhung der Ein- und Ausgangsdimension um eine Koppelstelle erhöht sich die Systemmatrix entsprechend um die jeweiligen Freiheitsgrade [SEK12].

Hinzu kommt, dass die statischen Korrekturmoden eine hohe lokale Steifigkeit verursachen, was eine sehr hohe Eigenfrequenz zur Folge hat [SIE08]. Daraus folgt, dass bei der numerischen Auswertung des Ersatzmodells mit sehr kleinen Schrittweiten gerechnet werden muss, um deren Schwingungen auszuwerten. Diese Ersatzsysteme benötigen folglich einen erhöhten numerischen Zeitaufwand. Deshalb sind diese Systeme für HiLS nicht geeignet.

2.6 Fazit

Anhand der Ausführungen zum Stand der Technik ist bekannt, dass die Simulation für die Analyse, Überprüfung und Bewertung von Werkzeugmaschinen ein wichtiges Werkzeug der Entwicklung darstellt. Die unterschiedlichen Simulationsverfahren werden in der Produktentwicklung bis zur Inbetriebnahme eingesetzt, um die Werkzeugmaschinenentwicklung abzusichern und zu verkürzen. Mit der Herausforderung der hohen Genauigkeitsansprüche an die Simulationsmodelle entstehen in der Entwicklungsphase hochdimensionale mathematische Modelle.

In der Regel verwendet die FEM unveränderliche Geometriestrukturen innerhalb eines Berechnungslaufs. Jede notwendige Veränderung an der Modellstruktur der Werkzeugmaschine erzwingt einen Neuaufbau der Systemmatrizen bzw. die Neuerstellung der Vernetzung oder Verknüpfung der korrespondierenden FE-Knoten. Dies würde bei der Berücksichtigung der Relativbewegung zwischen zwei Werkzeugmaschinenkomponenten notwendig werden, um mehrere Positionen des TCPs im Arbeitsraum zu betrachten. Deshalb sind mit der FEM nur Aussagen über die stationäre Position im Arbeitsraum möglich. Eine Bewertung der eigentlichen Bahnbewegung der Werkzeugmaschinenkomponenten ist somit nur eingeschränkt zulässig. Diese Einschränkung kann behoben werden, wenn eine transiente Rechnung im Zeitbereich durchgeführt wird. Diese bewegten FE-Modelle sind aber aus den oben genannten Gründen sehr rechen- und speicherintensiv und somit unwirtschaftlich.

Generell ist die Simulation hochdimensionaler Systeme mit einem hohen Zeit- und Ressourcenaufwand verbunden. Häufig können aufgrund des begrenzten zur Verfügung stehenden Arbeitsspeichers Simulationen großer Systeme nicht vollumfänglich durchgeführt werden. In diesen Fällen führt die Modellordnungsreduktion aufgrund der Systemgrößenreduktion zur Minimierung der benötigten Hardware und Simulationszeit. Durch die Simulationszeitreduktion verringern sich zusätzlich auch die Lizenzkosten, da mehrere Simulationen mit einer Lizenz in einem Zeitrahmen durchführbar sind. Zusätzlich kommt hinzu, dass es bei sehr großen Matrizen aufgrund des numerischen Rundungsfehlers zu Ungenauigkeiten kommen kann. Dieser Leistungsverlust wird durch die Modellordnungsreduktion verringert. Zur weiteren Effizienzsteigerung sollen die Ersatzsysteme möglichst keine hochfrequenten Anteile besitzen, da diese für die explizite Auswertung kleine Rechenschritte h erfordern, was wiederum zur Erhöhung der Rechenzeit t_R führt.

Bisher werden hauptsächlich die klassischen Reduktionsverfahren verwendet. Eine weit verbreitete Variante ist die gemischte Reduktion. Zur Genauigkeitserhöhung der reduzierten Modelle werden Korrekturverfahren angewendet. Die statischen Korrekturmoden werden durch eine Einheitsverformung des jeweils gewählten Schnittstellenknotens erzeugt, während alle anderen Schnittstellenknoten festgehalten werden. Die Schnittstellenknoten entsprechen im Allgemeinen den Hauptfreiheitsgraden. Die daraus resultierenden Verformungen werden dann als statische Korrekturmoden verwendet. Für die Modellierung von Verfahrbewegungen wird eine erhöhte Anzahl von Koppelknoten benötigt, die zu einer massiven Erhöhung der statischen Korrekturmodenanzahl und damit zugleich zur Erhöhung der Systemdimension führt. Durch die Erhöhung der Ein- und Ausgangsdimensionen um eine Koppelstelle steigen die zu betrachtenden Freiheitsgrade in den Systemmatrizen an. Hinzu kommt, dass die statischen Korrekturmoden eine hohe lokale Steifigkeit verursachen, was zu hohen Eigenfrequenzen der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}$ führt. Daraus folgt, dass bei der numerischen Auswertung des Ersatzmodells mit einem expliziten Berechnungsverfahren sehr kleine Rechenschrittweiten h verwendet werden müssen. Diese Ersatzsysteme benötigen folglich einen erhöhten numerischen Zeitaufwand. Deshalb sind diese Systeme für HiLS nicht geeignet. Hinzu kommt, dass die Modelle für die flexiblen MKS auf einer statischen und dynamischen Kondensation von FE-Modellen bezüglich der Koppelstellen basieren und im Allgemeinen nur für eine Arbeitsraumposition gültig sind. Deshalb beschränken sich die Berechnungen von Verfahrbewegungen bisher auf kleine Wegstrecken.

Zur Optimierung des mechatronischen Werkzeugmaschinenverhaltens ist der Momentanzustand für die Algorithmen zur Schwingungsminderung entscheidend. Bei den vorausschauenden Algorithmen ist der zukünftig zu durchfahrende Zustand bestimmend. Die Angabe des Zustands ist insbesondere bei poseabhängigen Nachgiebigkeiten der Maschinenstruktur kritisch. Bisher werden die Nachgiebigkeiten je nach Pose der Maschine durch Lookup-Tabellen der Steuerung zur Verfügung gestellt. Zur Ermittlung dieser Nachgiebigkeiten ist eine aufwändige Vermessung der Nachgiebigkeiten notwendig, die für die Maschinenhersteller mit einem hohen Kostenaufwand verbunden ist, da sie die entsprechende Sensorik und ausreichend geschultes Personal bereitstellen müssen. Ein hohes Potential zur Kostenminimierung bietet ein Modell, das die positionsabhängige Nachgiebigkeit berücksichtigt und auf Grundlage von vorhandenen FE-Modellen generiert wird.

Bei der Analyse der poseabhängigen Werkzeugmaschinenachsen werden realitätsnahe Kraftübertragungsverfahren benötigt. Dazu existieren unterschiedliche Modellierungsvarianten. Diese Varianten haben gemeinsam, dass für die Kraftübertragung mehrere Koppelstellen benötigt werden. Daraus resultiert, wie oben zusammengefasst, eine erhöhte Anzahl von Ein- und Ausgängen des zu betrachtenden Systems, die die Dimension und Eigenschaften der reduzierten Ersatzsysteme negativ beeinflussen.

3 Zielsetzung und Arbeitsschwerpunkte

Wie zuvor beschrieben, entstehen bei poseabhängigen Werkzeugmaschinenmodellen Systeme, die mit einer hohen Anzahl an Ein- und Ausgängen versehen sind. Daraus ergibt sich die Problemstellung, dass aus der Anwendung von Modellordnungsreduktionsverfahren Ersatzsysteme hervorgehen, die eine hohe Dimension aufweisen. Insbesondere bei der Berücksichtigung von Verfahrbewegungen und der daraus resultierenden Kraftübertragung besitzen die Modelle aufgrund ihrer angewiesenen hohen Anzahl von Ein- und Ausgängen eine hohe Systemdimension. Zusätzlich enthalten diese Systeme häufig hochfrequente Anteile, die dafür sorgen, dass der explizite Lösungsprozess mehr Zeit beansprucht.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von Strategien und Konzepten zur Erstellung niedrigdimensionaler Modelle, die hochdimensionale Ein- und Ausgangsräume besitzen und eine hohe Approximationsgenauigkeit aufweisen. Mit diesen niedrigdimensionalen Ersatzsystemen sollen numerische Analysen in kürzerer Zeit bei gleichzeitig geringerer Rechenleistung durchgeführt werden, als dies mit klassischen Methoden möglich ist. Um das gesetzte Ziel zu erreichen, wird vor der eigentlichen Modellordnungsreduktion eine Projektion der Ein- und Ausgangsräume in einen niedrigdimensionalen Raum vorgenommen. Danach wird die Dimension des Systems mithilfe eines Modellordnungsreduktionsverfahrens verringert. Das reduzierte System erhält mit einer Rückprojektion seine ursprünglichen Ein- und Ausgangszustände zurück. Dieses Vorgehen wird in Bild 3-1 visualisiert.

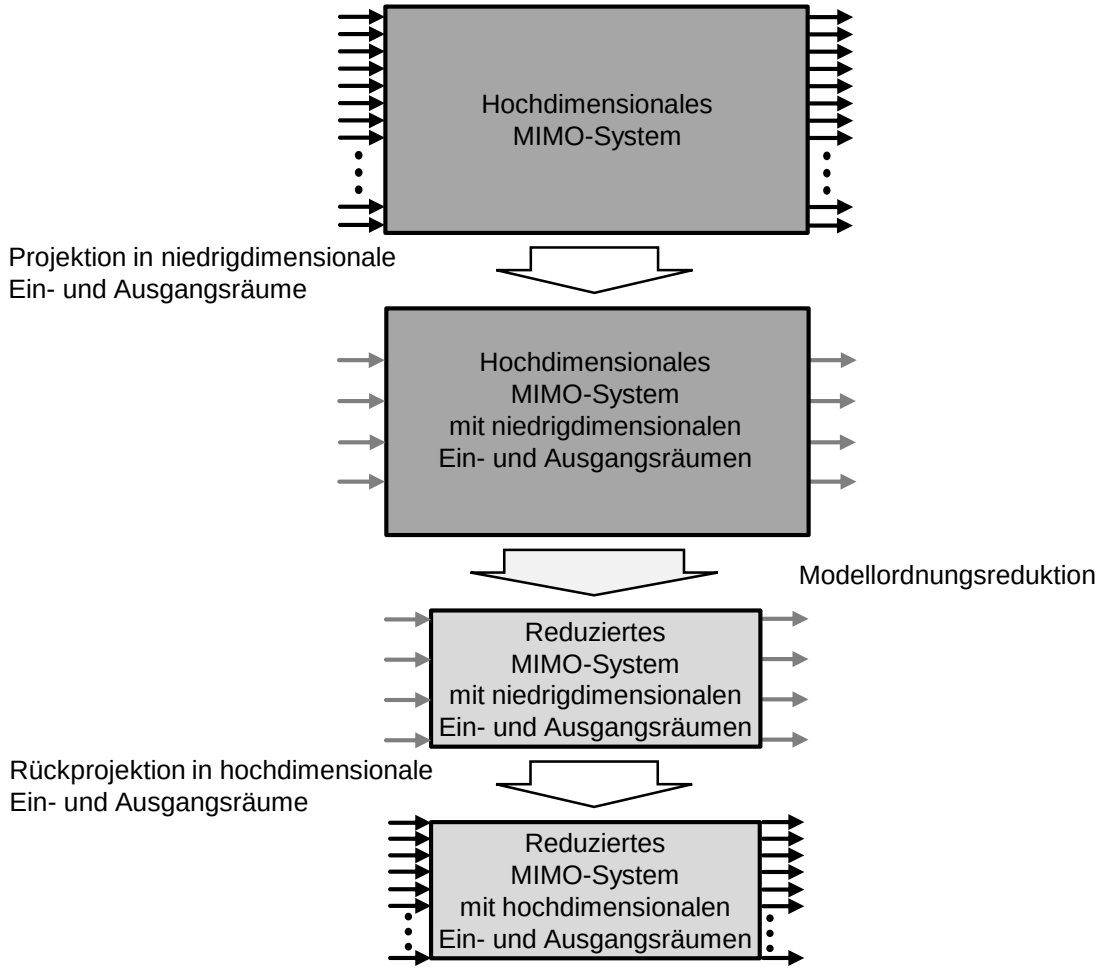


Bild 3-1: Struktur des Lösungsansatzes zum Erreichen reduzierter MIMO-Systeme mit hochdimensionalen Ein- und Ausgangsräumen

Das erläuterte Verfahren wird am Beispiel einer Werkzeugmaschine demonstriert. Die notwendigen Schritte zur Erzeugung einer virtuellen Werkzeugmaschine und zur in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchung von Verfahrbewegungen werden in Bild 3-2 gezeigt. Für die Validierung der Modellordnungsreduktion und die mechatronische Simulation wurden die folgenden Zwischenschritte hinzugefügt, die in der Werkzeugmaschinenentwicklung nicht benötigt werden: der Modellabgleich zwischen dem reduzierten Modell, dem Referenzmodell und der experimentellen Überprüfung. Diese zusätzlichen Schritte sind im Bild mit gepunkteten Linien eingezeichnet.

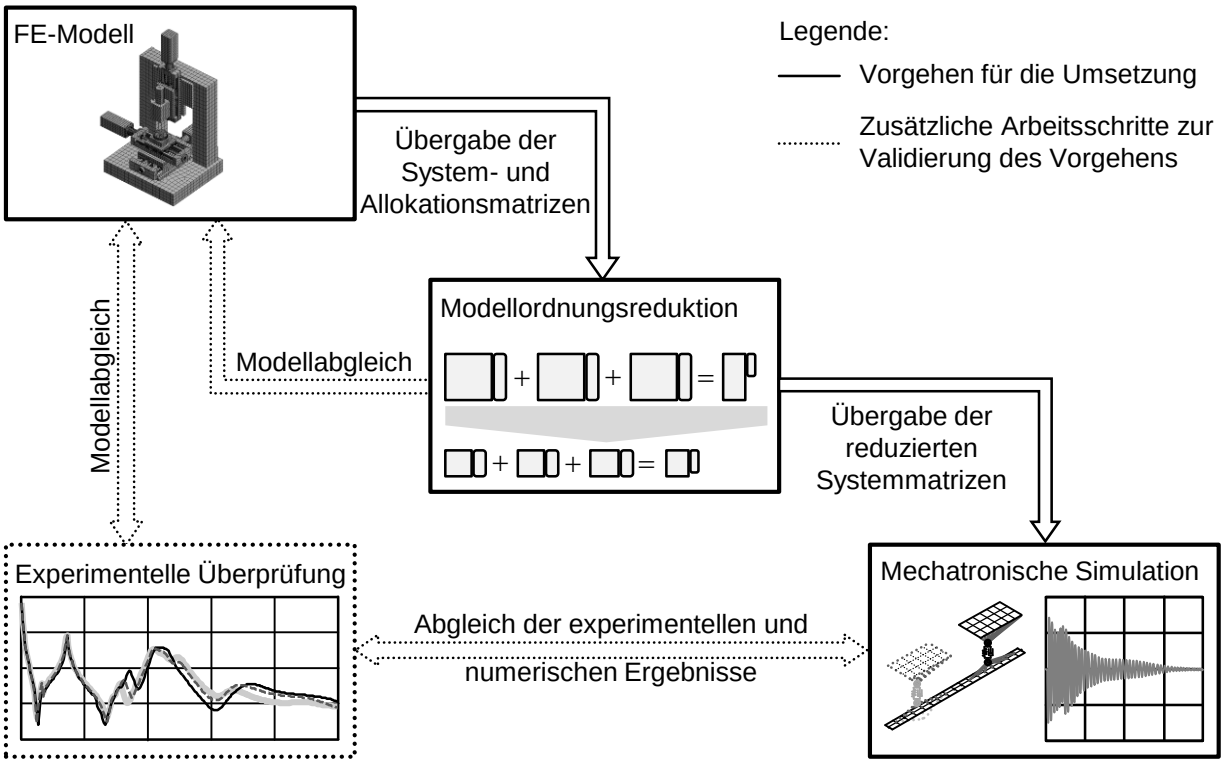


Bild 3-2: Ablauf der Modellierung eines gekoppelten Systems mit Verfahrbewegungen unter Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften

Zunächst werden in Kapitel 4 die dynamischen Werkzeugmaschineneigenschaften experimentell erfasst. Diese Daten werden zum einen für den Nachweis positionsabhängiger dynamischer Werkzeugmaschineneigenschaften und zum anderen für die Anpassung des FE-Modells verwendet. Im zweiten Schritt werden FE-Modelle erstellt, die dann im dritten Schritt im Rahmen der Modellordnungsreduktion in Kapitel 5 Verwendung finden. Nach dem Schritt der Modellordnungsreduktion werden die reduzierten Systemmatrizen für die Simulationskopplung ausgegeben. Die vollständigen Systemmatrizen und die Allokationsmatrix zum Erstellen der Ein- und Ausgänge werden aus dem FE-Modell gewonnen. Diese Ausgänge sind sowohl für die Verhaltensanalyse des reduzierten Systems als auch für die spätere Kopplung der einzelnen Teilsysteme in Kapitel 6 notwendig. In diesem Kapitel wird im vierten Schritt die mechatronische Simulation durchgeführt, um die reduzierten Systeme zu koppeln. Im Vorfeld wird das Modell für die mechatronische Simulation aufbereitet. Die Kopplung der unterschiedlichen Modelle sowie die Durchführung der Simulation finden in der MATLAB-Umgebung statt. Das gekoppelte System wird anschließend mit den Ergebnissen aus der experimentellen Überprüfung validiert. Zur Überprüfung der Qualität der reduzierten Matrizen findet hier der zusätzliche Arbeitsschritt des Modellabgleichs zwischen dem reduzierten Modell und dem Referenzsystem statt.

4 Dynamisches Verhalten der Werkzeugmaschine

4.1 Einführung

Das dynamische Verhalten einer Werkzeugmaschine schließt hauptsächlich die Teilaspekte der Starrkörperbewegung und das Schwingungsverhalten der Werkzeugmaschinenkomponenten ein. Zusätzlich beinhaltet das dynamische Verhalten die Elastizität und Dämpfung der Koppelstellen sowie schlussendlich die Bahnsteuerung. Durch die Starrkörperbewegung ändert sich die Steifigkeits- und Massenverteilung. Damit einhergehend verändert sich auch das Schwingungsverhalten der Werkzeugmaschinenkomponenten. Für die Bewegungsmodellierung und die Bahnsteuerung bietet sich die CACE-Umgebung an und wird in Kapitel 6 angewendet. Mit der FEM kann beispielsweise das Schwingungsverhalten der Werkzeugmaschine ermittelt werden, das Inhalt dieses Kapitels ist. Im darauffolgenden Kapitel 5 werden mit modernen Modellordnungsreduktionsverfahren die hochdimensionalen FE-Modelle in den niedrigdimensionalen Raum projiziert.

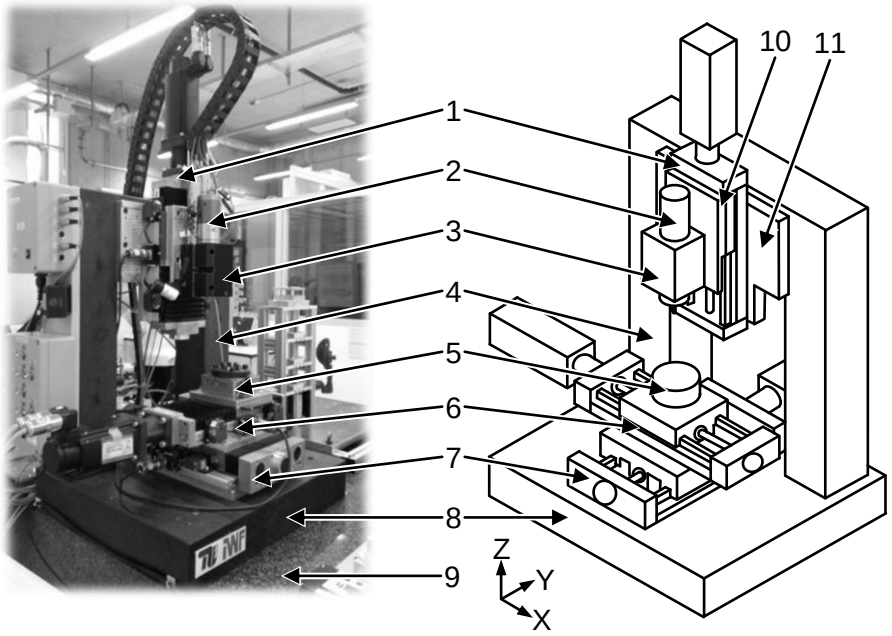
Um das dynamische Verhalten der Werkzeugmaschine zu bestimmen und zu beschreiben, werden als erstes in diesem Kapitel die Versuchsmaschine, die Methoden und die Messgeräte der experimentellen Untersuchung inklusive Auswertung dargestellt. Diese Auswertung umfasst die Identifikation der positionsabhängigen dynamischen Systemeigenschaften sowie die Anpassung der Werkstoffdaten im Simulationsmodell. Außerdem wird experimentell das mechatronische Verhalten der Versuchsmaschine ermittelt. Aus den CAD-Daten wird das FE-Modell durch die klassische FE-Modellierung erstellt und mit den Ergebnissen aus der experimentellen Untersuchung verifiziert. Dazu wird die Software ANSYS Workbench V15 (ANSYS WB) des Herstellers ANSYS INC. aus Canonsburg, USA, genutzt.

4.2 Definition und Beschreibung der Mikrofräsmaschine

Die Versuchsmaschine ist eine Mikrofräsmaschine, die im Rahmen des Sonderforschungsbereichs Transregio 29 (SFB TR 29) „Engineering hybrider Leistungsbündel – Dynamische Wechselwirkungen von Sach- und Dienstleistungen in der Produktion“ des Instituts für Werkzeugmaschinen und Fabrikbetrieb (IWF) der Technischen Universität Berlin aufgebaut wurde und in Bild 4-1 links abgebildet ist.

Im weiteren Verlauf wird für die bessere Übersicht die in Bild 4-1 rechts dargestellte Skizze der Mikrofräsmaschine verwendet. Die verwendete Mikrofräsmaschine besteht im Wesentlichen aus drei Schienenführungstischen der Firma BOSCH REXROTH, Lohr am Main, des Typs TKK (Pos. 1, Pos. 6 und Pos. 7), einer Hochfrequenzmotorspindel 4015 DC der Firma SYCOTEC aus Leutkirch im Allgäu (Pos. 2) und einem Granitportal (Pos. 4). Der ungebremste Schienenführungstisch des Typs TKK 20-225 mit einem maximalen Verfahrbereich von $V_{B,max} = 70$ mm bildet die Y-Achse (Pos. 7), der ungebremste Schienenführungstisch des Typs TKK 15-155 mit dem maximalen Verfahrbereich von $V_{B,max} = 117$ mm vervollständigt den Kreuztisch als X-Achse (Pos. 6). Der gebremste Schienenführungstisch des Typs TKK 15-155 repräsentiert die Z-Achse (Pos. 1) und besitzt ebenfalls einen maximalen Verfahrbereich von $V_{B,max} = 117$ mm. Diese Achse ist mit einer Adapterplatte aus Aluminium (Pos. 11) am Granitportal (Pos. 4) montiert. Die Spindel ist mit einem Spindelspannblock (Pos. 3) des Typs 4864 der Firma SYCOTEC an einer Adapterplatte aus Aluminium (Pos. 10) an der Z-Achse befestigt.

Das Granitportal ist wiederum mit einem 3,5 Tonnen schweren Granittisch (Pos. 9) verschraubt. Auf der X-Achse ist das pneumatische Werkstückspannsystem (Pos. 5) montiert.



Komponenten:
1 Z-Achse
2 Spindel
3 Spindelspannblock
4 Granitportal
5 Werkstückspann-system
6 X-Achse
7 Y-Achse
8 Granitboden
9 Granittisch
10 Adapterplatte Z-Schlitten/Spindel
11 Adapterplatte Z-Achse/Portal

Bild 4-1: Beschreibung der Versuchsmaschine

4.3 Versuchsbeschreibung und Durchführung der experimentellen Untersuchungen

Für die Modellierung der Mikrofräsmaschine und deren Verifizierung werden die statischen Steifigkeiten, das dynamische Strukturverhalten und das mechatronische Gesamtverhalten experimentell erfasst und analysiert. Die Ergebnisse aus der Untersuchung der statischen Steifigkeiten und des dynamischen Strukturverhaltens finden bei der Anpassung des FE-Modells Anwendung.

4.3.1 Messgeräte und Messmethoden

Die Steifigkeit ist abhängig vom Werkstoffkennwert E-Modul, von der Geometrie sowie von der Vorspannung, die bspw. durch Verschraubungen hervorgerufen wird. Diese Verschraubungsvorspannung ist für die Kraftübertragung des Systems notwendig, da die resultierende vorgespannte Kontaktfläche den Kraftfluss ermöglicht. Aus der Praxis ist bekannt, dass die Schraubenvorspannung die Eigenmoden beeinflussen [NEB98] und die relevanten Eigenfrequenzen *f* bis zu 20 % verschieben kann [WIT07]. Deshalb ist die Steifigkeit mit einer Unsicherheit behaftet. Um diese zu verringern, wird die statische Steifigkeit als reziproker Wert der statischen Nachgiebigkeit durch Verlagerungsmessung ausgewählter Komponenten ermittelt. Dazu ist an verschiedenen Messpunkten unter Beaufschlagung unterschiedlicher Gewichte mit einem Feinzeiger die Verlagerung zu erfassen, wie in Bild 4-2 skizziert. Durch diesen Messaufbau lassen sich die Nachgiebigkeiten des Motors, des Flansches inklusive Kupplung, der Traversen sowie der Grundplatte des Schienenführungstisches ermitteln. Mit den gemessenen Werten werden dann die Steifigkeiten der einzelnen Komponenten im FE-Modell angepasst.

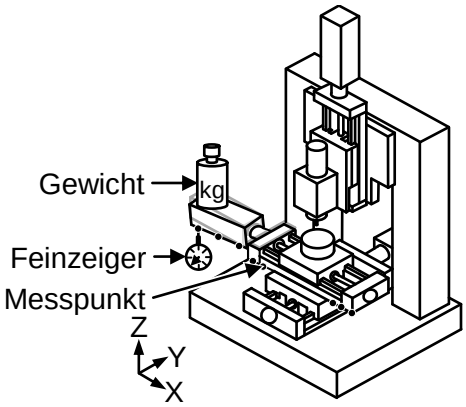


Bild 4-2: Schematische Darstellung des Messaufbaus zur Ermittlung der statischen Nachgiebigkeit einzelner Komponenten

Für die Analyse des dynamischen Strukturverhaltens wird auf die experimentelle Modalanalyse zurückgegriffen. Die generellen Messaufbauten der experimentellen Modalanalyse in ihren zwei unterschiedlichen Varianten sind in Bild 4-3 abgebildet. In der ersten Variante wird die eingeleitete Kraft mit einem Impulshammer des Typs 9728A2000 des Herstellers KISTLER AG, Winterthur, Schweiz, realisiert, wie in Bild 4-3 a) skizziert. In der zweiten Variante wird die eingeleitete Kraft dagegen mit einem elektrodynamischen Erreger („Shaker“) verwirklicht, wie in Bild 4-3 b) symbolisiert.

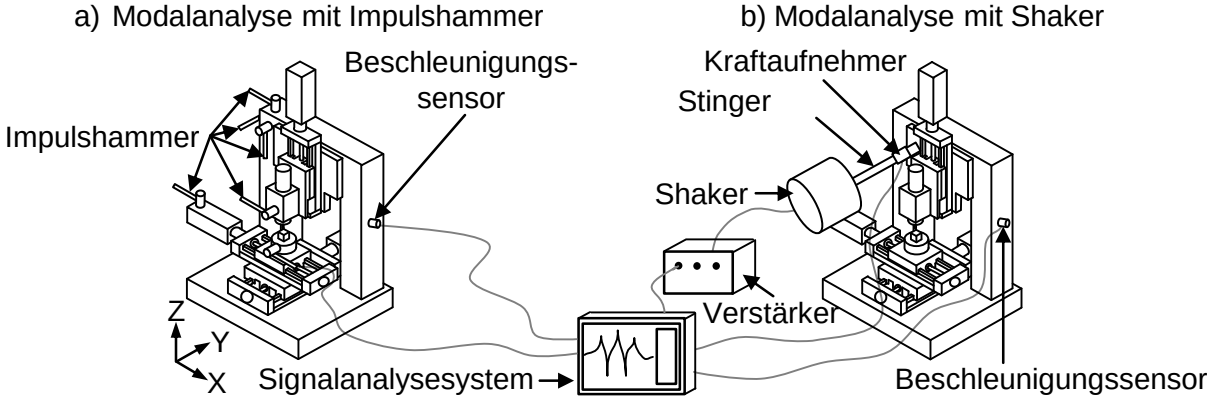


Bild 4-3: Beschreibung der Versuchsaufbauten für die dynamische Untersuchung mit der Erregung durch a) einen Impulshammer und b) einen Shaker

Für die Ermittlung der Beschleunigungs- bzw. Kraftamplitude sowie ihrer jeweiligen Phasenlage werden diese im eingeschwungenen Zustand gemessen. Dazu wird eine gleichmäßige Sinusschwingung mit einem Frequenzinkrement von $f_I = 2$ Hz und einer konstanten Kraftamplitude $\hat{F}_A = 10$ N mittels eines freihängenden Shakers realisiert. Die Gleitsinusfunktion bietet den Vorteil einer hohen Reproduzierbarkeit sowie eines guten Verhältnisses zwischen Nutz- und Störsignal. Außerdem wird mit diesem Verfahren mit einer hohen Energiedichte gemessen. Des Weiteren werden Leckage-Effekte unterdrückt. Zusätzlich können im Gegensatz zum Messverfahren mit Impulshammer Nichtlinearitäten erkannt werden. Der verwendete Shaker inklusive Verstärker und Kraftaufnehmer ist Teil der Schwingprüfanlage TIRAvib TV 51140-M des Herstellers TIRA GmbH, Schalkau. Die Anregungskraft F_A wird während der Messung mithilfe des ICP Kraftaufnehmers des Typs 208C03 der Firma TIRA GmbH, Schalkau, überprüft. Mit den Triaxial-Beschleunigungssensoren des Typs 356A26 vom Hersteller PCB PIEZOTRONICS INC., Depew, New York, USA, werden die Beschleunigungen an den unterschiedlichen Messpositionen erfasst.

Auf der zu untersuchenden Struktur werden diskrete Messpunkte festgelegt. Die Positionen der Messpunkte werden in Bild 4-4 b) und c) visualisiert. An diesen Messpunkten werden mit Hilfe der Beschleunigungssensoren die aus der Anregung resultierenden Verformungsbeschleunigungen ermittelt. Damit können sodann die Nachgiebigkeitsfrequenzgänge berechnet werden, indem die messtechnisch erfassten Daten durch die schnelle Fouriertransformation in den Frequenzbereich überführt werden. Die Messung wird mit einer Abtastfrequenz von $f_S = 2$ kHz durchgeführt. Hierbei kommt ein Antialiasingfilter zur Anwendung, um die hochfrequenten Anteile über $f = 1.000$ Hz herauszufiltern. Zusätzlich zu diesem Tiefpassfilter wird noch ein Hochpassfilter verwendet, um Signale mit Frequenzen unter $f_{Hf} = 40$ Hz auszuschließen. Im Anschluss daran werden die gemessenen Beschleunigungsfrequenzgänge geglättet. Um eine hohe Vergleichbarkeit der gemessene mit den numerisch ermittelten Beschleunigungsfrequenzgängen zu gewährleisten.

Zur Identifizierung der positionsabhängigen Systemeigenschaften der Mikrofräsmaschine wird die Messung für die Kombinationen der drei unterschiedlichen Konfigurationen der X-, Y- und Z-Schlittenpositionen durchgeführt. Um eine möglichst hohe Anzahl an Eigenmoden anzuregen und somit die zugehörigen Eigenfrequenzen zu identifizieren, werden unterschiedliche Positionen der Anregung verwendet. An der oberen Ecke des Granitportals wird mit dem Impulshammer in jede Achsenrichtung, zusätzlich am Motor der X- und Y-Achse in die Z-Richtung und außerdem am Spindelspannblock in Y-Richtung angeregt, vergleiche Bild 4-3 a). Die Anregungskräfte sind zu hoch, um diese direkt am TCP ohne bleibende Spindellagerschäden einzuprägen. Deshalb wird die Anregung mit dem Impulshammer bevorzugt am Spindelspannblock vorgenommen.

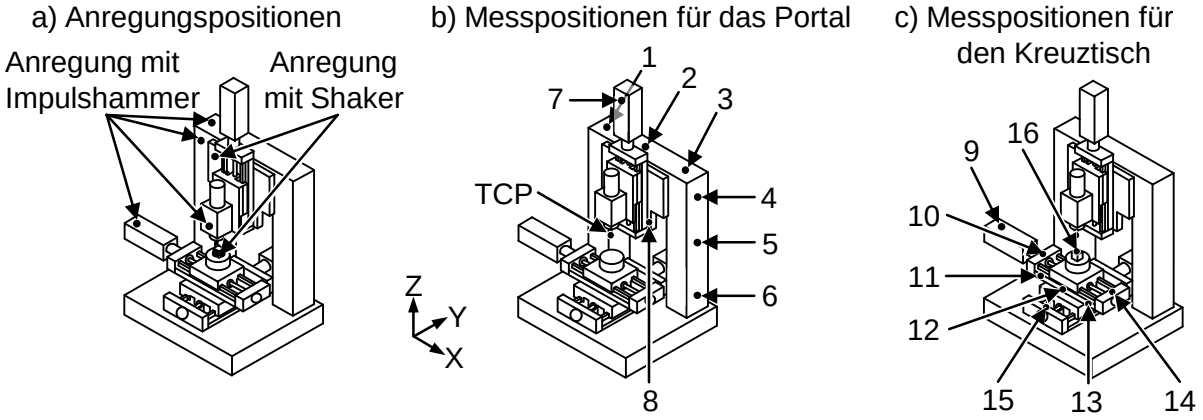


Bild 4-4: Beschreibung a) der Anregungspositionen, b) der Messpositionen für das Portal und c) der Messpositionen für den Kreuztisch bei der experimentellen Modalanalyse

Mit dem Impulshammer werden mindestens fünf Messungen je Anregungsort und Messpunkt durchgeführt. Generell sind Messwerte mit Schwankungen behaftet. Deshalb wird zur grafischen Darstellung der verteilten, diskreten Ergebnisse die Kastengrafik verwendet, wie exemplarisch in Bild 4-5 vorgestellt. Durch diese Grafik werden der Median, der untere und obere Quartil sowie die beiden Extremwerte dargestellt. Innerhalb der Quartilsdifferenz liegen immer 50 % der Daten, die durch den Kasten eingegrenzt werden. Aus der Lage der Box ergeben sich daher Informationen über die Art der Schwankungen beziehungsweise der Messdatenverteilung. Der Median ist hierbei der mittlere Wert der sortierten Datenreihe. Durch die Angabe des größten und des kleinsten Messwerts wird die Streuung der Messung deutlich.

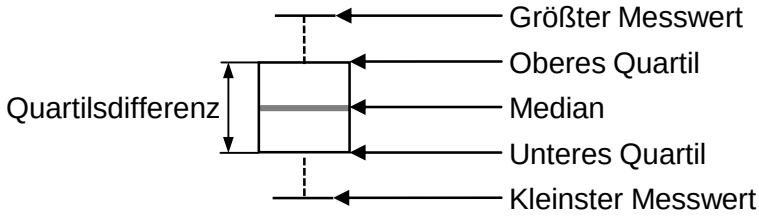
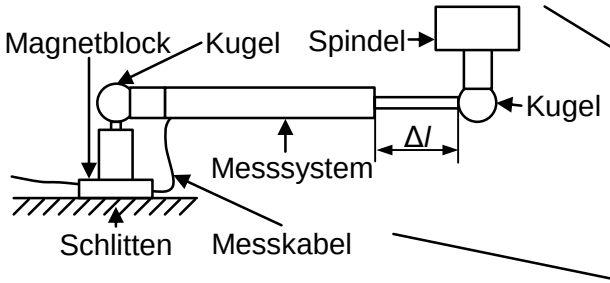


Bild 4-5: Schematischer Aufbau einer Kastengrafik zur Beschreibung statistisch verteilter Daten

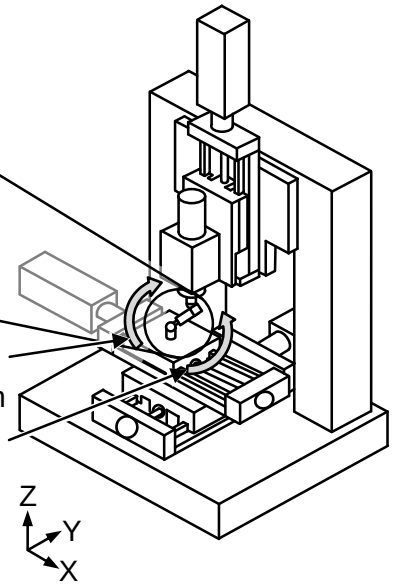
Zur Ermittlung des mechatronischen Verhaltens bezüglich des Zusammenspiels der Dynamik und der Regelung der Mikrofräsmaschine wird der Kreisformtest angewendet. Mit diesem Messverfahren lassen sich nach DIN ISO 230-4 [DIN230-4] die Dynamik und die Positionsgenauigkeit der Maschine beurteilen. Dazu wird in dieser Arbeit ein taktiles Ballbar-System des Typs QC10 vom Hersteller RENISHAW, New Mills, Großbritannien, genutzt. Die so ermittelten Daten werden für den Abgleich des numerischen Kreisformtests in Kapitel 6 verwendet.

Das Messprinzip des Ballbar-Systems ist in Teilbild a) von Bild 4-6 dargestellt. Beim Umfahren einer vorgegebenen idealen, kreisförmigen Bewegung erfährt das Ballbar-System eine Längenänderung Δl. Mit dieser Änderung wird die Abweichung von einer programmierten idealen Kreisbahn identifiziert, wie beispielhaft in Teilbild c) visualisiert. Durch den durchgeführten Kreisformtest können so Informationen zum zweiachsigen Verhalten der Mikrofräsmaschine gewonnen werden.

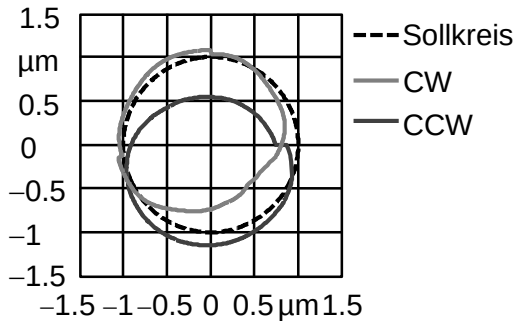
a) Prinzip Ballbar-System



b) Messaufbau eines Kreisformtests



c) Beispielhaftes Resultat eines Kreisformtests



CW: Messrichtung im Uhrzeigersinn

CCW: Messrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn

Bild 4-6: Messprinzip und schematischer Messaufbau inklusive beispielhaftem Ergebnis eines Kreisformtests

In dieser Messung äußern sich Umfang und Art der bestehenden Nichtlinearitäten aus der Achsbewegung als Umkehrspitzen und Umkehrspannen. Zusätzlich sind die periodischen Geradheits- oder Positionsabweichungen als periodische Deformationen der Kreisbahn beobachtbar. Kreisdeformationen haben ihren Ursprung im systematischen Achslängenfehler. Im Fall einer Deformation der Kreisbahn, deren Deformation parallel zu den Winkelhalbierenden der beiden beteiligten Achsen liegt, kann die Ursache entweder in einer Rechtwinkligkeitsabweichung oder in nicht abgestimmten Lagereglerfaktoren liegen. Bei Anwendung dieses

Messverfahrens werden die Schwingungen, die aus den Strukturbauteilen oder aus dem Antrieb resultieren, als oszillierende Störung in der Kreisbahn sichtbar. Außerdem können die Reglereinstellungen überprüft und analysiert werden [WEI00].

Bei der Messung ist darauf zu achten, dass der Kreisformtest die Kreisbahnen ohne Beschleunigungsänderungseinflüsse am Beginn und am Ende der Kreisbahn aufnimmt. Deshalb wird die Kreisbahn vor dem Start- und nach dem Endpunkt um jeweils einen Halbkreis verlängert. Zur Ermittlung der unterschiedlichen Einflüsse werden die zwei Parameter Kreisdurchmesser und Vorschubgeschwindigkeit variiert.

Neben der Messung der Beschleunigung mit den Beschleunigungssensoren aus Bild 4-3, werden Verlagerungsinformationen gemessen. Dazu werden die Positionen über die Zeit mittels Laserinterferometrie gemessen. Der zugehörige Messaufbau ist in Bild 4-7 schematisch dargestellt.

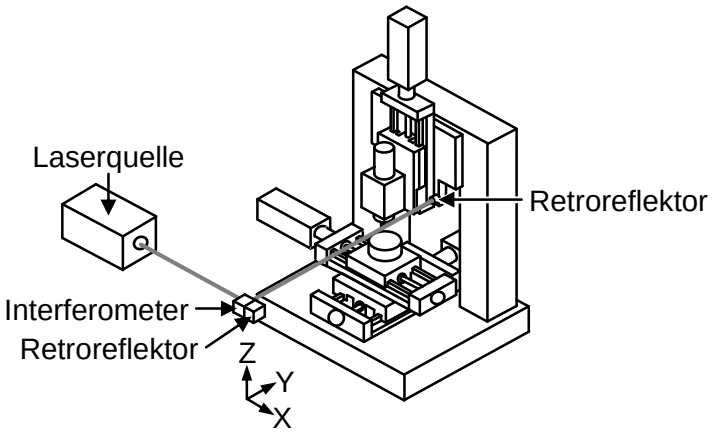


Bild 4-7: Schematischer Messaufbau zur Messung der Verlagerung mittels Laserinterferometer

Bei diesem Messaufbau kommt das Laserinterferometersystem der Firma RENISHAW, New Mills, Großbritannien, vom Typ XL-80 zum Einsatz. Dieses System besteht aus einem Laserkopf XL80 und einer Kompensationseinheit XC80. Zur Messung wird ein massereduzierter Retroreflektor sowie ein Interferometer, das mit einem Retroreflektor verbunden ist, verwendet. Die Messwerte werden mit einer Abtastfrequenz von $f_S = 50$ kHz, einer Messauflösung von $l_{mess} = 0{,}001$ µm und für eine Messzeit von $t_{mess} = 10$ s aufgenommen.

4.3.2 Statische Nachgiebigkeit

Der reziproke Wert der Steifigkeit ist definiert als Nachgiebigkeit. Die statische Steifigkeit wird als lineare Funktion betrachtet. Die entsprechenden Werte werden mittels der Verlagerung ermittelt, die sich aufgrund einer statischen Last einstellt. Der Versuchsaufbau für diese Messung wurde im vorherigen Abschnitt erklärt und ist in Bild 4-2 dargestellt. Während der Messung ist die Regelung der Mikrofräsmaschine nicht aktiv. Dadurch wird sichergestellt, dass nur die mechanische Steifigkeit ohne die Wirkung der Regelung ermittelt wird. Während der Messung befinden sich beide Achsen des Kreuztisches in der Nullstellung. Für die Messung werden Gewichte mit den Massen $m = 5$ kg und $m = 10$ kg verwendet. Bei Gewichten mit niedrigerer Masse sind die Messwerte mit hohen Unsicherheiten mit bis zu $\delta_{el} = 4$ µm behaftet. Ein Teilgrund dafür ist, dass das verwendete Messequipment nicht ausreichend genau ist. Zur Vermeidung von plastischen Verformungen werden keine Gewichte mit höherer Masse eingesetzt.

Pos.	Verlagerung δ_{el} bei $m = 5$ kg	Verlagerung δ_{el} bei $m = 10$ kg
1	15 µm	42 µm
2	7 µm	25 µm
3	2 µm	3 µm

Feinzeigermess-auflösung: $d_{mess} = 1$ µm
Gewicht: Variation
X-Schlitten-position: $P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlitten-position: $P_{SY} = 0$ mm

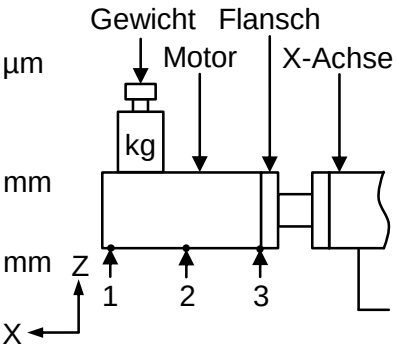


Bild 4-8: Verlagerungsergebnisse zur Ermittlung der statischen Nachgiebigkeit des Motors an der X-Achse

In der Auflistung in Bild 4-8 werden die Verlagerungswerte für den Motor der X-Achse an drei unterschiedlichen Messpositionen, nämlich am Anfang, in der Mitte und am Ende des Motors dargestellt. Mit diesem Versuch in Kombination mit den Ergebnissen aus Bild 4-9 wird der E-Modul des Motors im FE-Modell modifiziert. In der Liste aus Bild 4-9 sind die Ergebnisse der Verlagerung zur Anpassung des E-Moduls von Motor, Flansch und Grundplatte des Schlittenführungstisches der Y-Achse abgebildet. In diesem Versuchsaufbau werden vier Messpositionen ausgewertet, um insbesondere den E-Modul des Flansches inklusive innenliegender Kupplung anzupassen. Mit dem Gewicht von $m = 5$ kg ist eine Verlagerungsmessung an Pos. 4 allerdings nicht möglich. Erst bei $m = 10$ kg ist ein sicherer Messwert ermittelbar.

Pos.	Verlagerung δ_{el} bei $m = 5$ kg	Verlagerung δ_{el} bei $m = 10$ kg
1	35 µm	65 µm
2	21 µm	40 µm
3	4 µm	7 µm
4		2 µm

Feinzeigermess-auflösung: $d_{mess} = 1$ µm
Gewicht: Variation
X-Schlitten-position: $P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlitten-position: $P_{SY} = 0$ mm

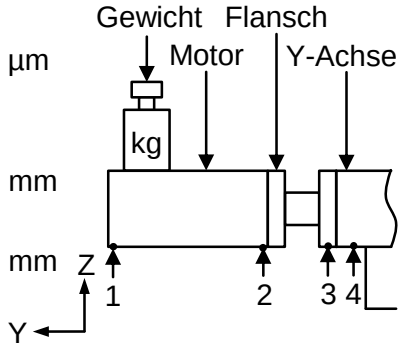


Bild 4-9: Verlagerungsergebnisse zur Ermittlung der statischen Nachgiebigkeit der Komponenten Motor, Flansch und Schlittenführungsbett der Y-Achse

Mit dem Verlagerungsergebnis aus Bild 4-10 und dem Ergebnis von Pos. 4 aus Bild 4-9 wird der E-Modul der Grundplatte des Schlittenführungstisches der Y-Achse angepasst. Aufgrund des gleichen Aufbaus der Y-Achse und der Z-Achse können die Ergebnisse aus der Ermittlung der statischen Nachgiebigkeit auf diese Achse übertragen werden.

Pos.	Verlagerung δ_{el} bei $m = 5$ kg	Verlagerung δ_{el} bei $m = 10$ kg
1		2 µm

Feinzeigermess-auflösung: $d_{mess} = 1$ µm
Gewicht: Variation
X-Schlitten-position: $P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlitten-position: $P_{SY} = 0$ mm

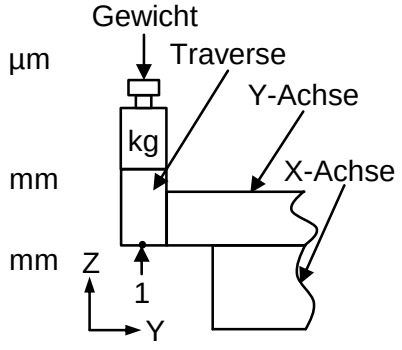


Bild 4-10: Verlagerungsergebnisse zur Ermittlung der statischen Nachgiebigkeit der Y-Achse

4.3.3 Positionsabhängige dynamische Eigenschaften

Zur Identifizierung der Eigenfrequenzen eignen sich zwei unterschiedliche Methoden [UHL12b], die beide in Bild 4-3 gezeigt sind. Im ersten Schritt wird hier zunächst die experimentelle Modalanalyse mittels Impulshammer als Kraftanregung durchgeführt, wie in Bild 4-3 a) dargestellt. Die Messungen werden für unterschiedliche Schlittenpositionen min. fünffach durchgeführt. Die Schlittenpositionen wurden zwischen den Messvorgängen erneut angefahren und die Regelung der Achsen wurde stets abgeschaltet. Durch das jeweils erneute Anfahren der Achspositionen sind in den Messwerten unterschiedliche Kontakt- und Reibbedingungen enthalten. Dadurch steigt zwar die Streuung der Messwerte, aber es wird ein allgemeineres Verhalten der Werkzeugmaschine ermittelt. Auf diese Weise kann sichergestellt werden, dass für die Anpassung des FE-Modells keine partikulären Situationen mit ungünstige Kontakt- und Reibbedingungen verwendet werden. Die Ergebnisse für die drei Z-Schlittenpositionen sind in Bild 4-11 und in Bild 4-12 zu sehen. Für die unterschiedlichen X- und Y-Schlittenpositionen sind die Schwankungen der Messwerte so hoch, dass keine eindeutige und sichere Identifikation der Eigenwerte möglich ist. Daher werden diese Ergebnisse nicht dargestellt.

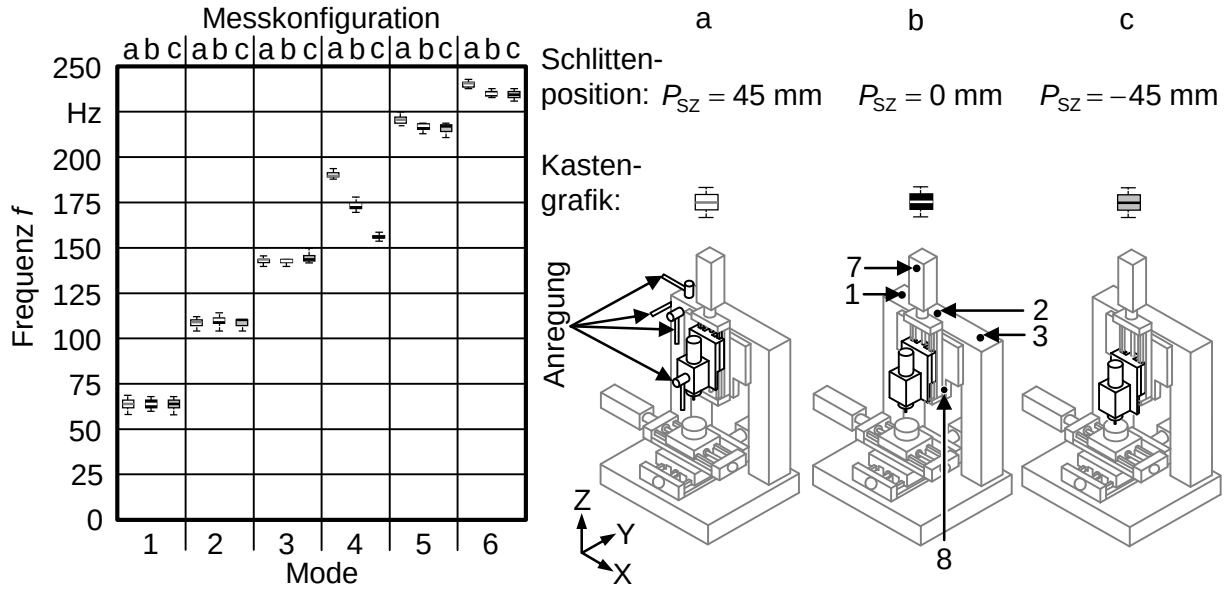


Bild 4-11: Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse mittels Impulshammer-Anregung zwischen 0 Hz und 250 Hz für drei unterschiedliche Schlittenpositionen der Z-Achse

In Bild 4-11 ist der Frequenzbereich von f_{Bu} = 0 Hz bis f_{Bo} = 250 Hz und in Bild 4-12 ist der Frequenzbereich von f_{Bu} = 250 Hz bis f_{Bo} = 500 Hz abgebildet. In beiden Diagrammen sind die Ergebnisse aus den Messpunkten 1 bis 3 sowie 7 und 8 enthalten. Diese Punkte wurden gewählt, da hier die Eigenfrequenzen eindeutig identifizierbar sind. An den anderen Messpunkten, wie diese in Bild 4-4 dargestellt sind, ist für die gewählten Anregungspositionen keine eindeutige und sichere Identifikation möglich. Die ersten drei Eigenfrequenzen sind unabhängig von der Z-Schlittenposition. Die erste Eigenfrequenz nimmt den Wert f_{Gl} = 66 Hz ein, wobei die Messung eine Streuung von f_{St} = 4 Hz bis f_{St} = 5 Hz aufweist. Die zweite Eigenfrequenz wurde bei f_{Gl} = 116 Hz identifiziert und besitzt eine Streuung von f_{St} = 5 Hz bis f_{St} = 6 Hz. Die dritte Eigenfrequenz liegt zwischen f_{Gl} = 144 Hz und f_{Gl} = 146 Hz, die Messung enthält eine Streuung von f_{St} = 4 Hz.

Für die vierte Eigenfrequenz ist eine deutliche Abhängigkeit von der Z-Schlittenposition erkennbar, da sich die Messwerte in den einzelnen Versuchsszenarien signifikant voneinander unterscheiden. Die Messwerte aus dem Messpunkt 7 besitzen für diese Eigenfrequenz sehr hohe Amplituden, da die Schwingungen hauptsächlich am Motor der Z-Achse auftreten. In der Messkonfiguration a befindet sich der Z-Schlitten in der obersten Position $P_{SZ} = 45$ mm. Bei dieser Konfiguration liegt die vierte Eigenfrequenz bei $f_{GI} = 182$ Hz. In der zweiten Messkonfiguration b nimmt der Schlitten die mittlere Position von $P_{SZ} = 0$ mm ein. Hier lässt sich die vierte Eigenfrequenz bei $f_{GI} = 174$ Hz identifizieren. Für die Messkonfiguration c, bei der sich der Z-Schlitten auf der untersten Position von $P_{SZ} = -45$ mm aufhält, sinkt die vierte Eigenfrequenz sogar auf $f_{GI} = 154$ Hz. Die jeweiligen Messwerte weisen eine Streuung von jeweils $f_{St} = 4$ Hz auf. Ähnliche Ergebnisse bezüglich der positionsabhängigen Eigenfrequenz finden sich auch in der Arbeit von FREY et al. [FRE12]. Aus der FE-Analyse in Unterkapitel 4.4 wird deutlich, dass diese positionsabhängige Eigenschaft durch die Steifigkeitswirkung der effektiven Länge l_{eff} der Kugelgewindespindel verstärkt wirkt.

Die Positionsabhängigkeit der fünften und sechsten Eigenfrequenz ist gegenüber der vierten eher gering. Für die Messkonfiguration a lässt sich für beide genannten Eigenfrequenzen eine Überhöhung von $f_{St} = 4$ Hz bis $f_{St} = 6$ Hz identifizieren. Diese Überhöhung ist für die beiden anderen Messkonfigurationen nicht nachweisbar. Die fünfte Eigenfrequenz für die Messkonfiguration a liegt bei $f_{GI} = 220$ Hz und die sechste Eigenfrequenz bei $f_{GI} = 245$ Hz mit einer Messwertschwankung von $f_{St} = 4$ Hz. Die Eigenfrequenz für die beiden anderen Schlittenpositionen liegt je bei $f_{GI} = 218$ Hz und $f_{GI} = 240$ Hz mit der gleichen Messwertstreuung.

Die siebente Eigenfrequenz weist eine Positionsabhängigkeit bezüglich des Z-Schlittens auf. Wie in Bild 4-12 zu erkennen ist, steigt die siebente Eigenfrequenz von $f_{GI} = 252$ Hz in der Messkonfiguration a auf $f_{GI} = 258$ Hz in der Messkonfiguration b und $f_{GI} = 272$ Hz in der Messkonfiguration c an. Die achte Eigenfrequenz liegt zwischen $f_{GI} = 272$ Hz und $f_{GI} = 275$ Hz. In der experimentellen Modalanalyse mittels Impulshammer kann nicht erkannt werden, ob hier eine Frequenzaufspaltung beziehungsweise -verschmelzung vorherrscht oder ob der Frequenzwert $f_{GI} = 272$ Hz zur siebenten oder achten Eigenmode gehört. Die Messwerte für die beiden genannten Eigenfrequenzen weisen eine Schwankung von $f_{St} = 4$ Hz bis $f_{St} = 6$ Hz auf. Insbesondere in der Messsituation, in der die Anregung am Spindelspannblock erfolgt und sich der Beschleunigungssensor an der Messposition 8 befindet, besitzen die siebente und achte Eigenfrequenz eine hohe Dominanz.

Für die neunte bis zwölfte Eigenfrequenz ist keine eindeutige Positionsabhängigkeit hinsichtlich des Z-Schlittens erkennbar. Die neunte Eigenfrequenz liegt zwischen $f_{GI} = 382$ Hz und $f_{GI} = 384$ Hz, die Messwerte schwanken um $f_{St} = 4$ Hz in diesem Frequenzwertbereich. Die zehnte Eigenfrequenz steigt von $f_{GI} = 406$ Hz bei der Messkonfiguration a auf $f_{GI} = 410$ Hz bei der Messkonfiguration c an mit Messwertvariationen von $f_{St} = 4$ Hz bis $f_{St} = 8$ Hz. Die elfte Eigenfrequenz befindet sich zwischen $f_{GI} = 450$ Hz und $f_{GI} = 451$ Hz und die Messwerte schwanken zwischen $f_{St} = 3$ Hz und $f_{St} = 8$ Hz. Die letzte experimentell erfasste Eigenfrequenz wurde zwischen $f_{GI} = 493$ Hz und $f_{GI} = 496$ Hz identifiziert und weist eine Streuung von $f_{St} = 2$ Hz bis $f_{St} = 3$ Hz auf.

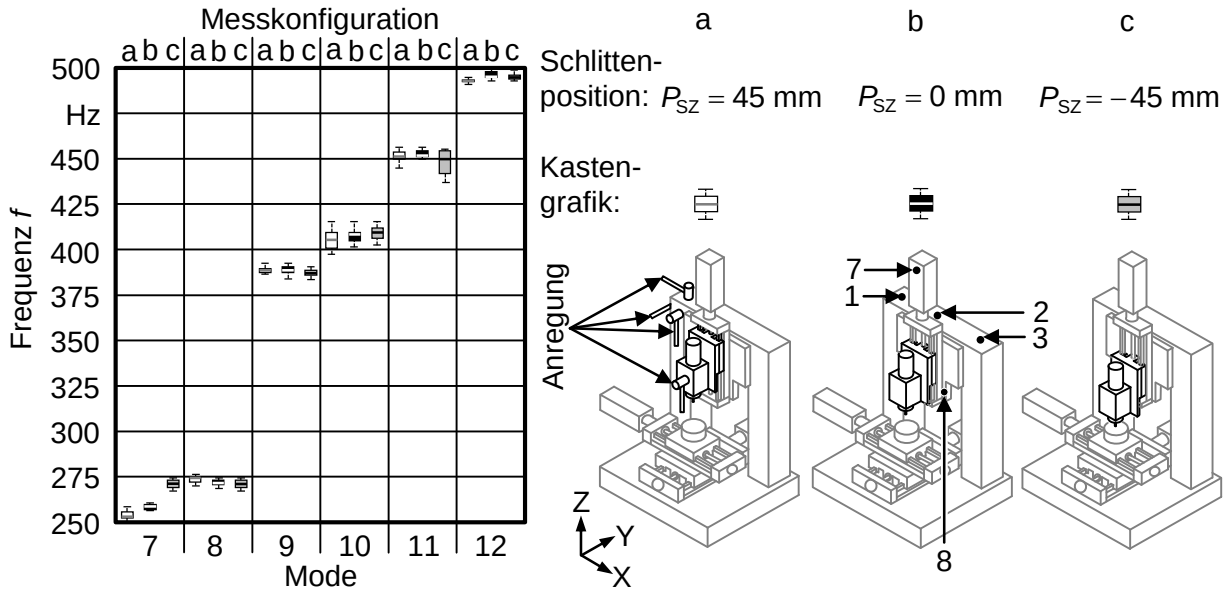


Bild 4-12: Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse mittels Impulshammer-Anregung zwischen 250 Hz und 500 Hz für drei unterschiedliche Schlittenpositionen der Z-Achse

Mit der Messung mit dem Impulshammer können generell Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Schlittenposition identifiziert werden. Mit dieser Messmethode ist eine reproduzierbare Ermittlung des Phasenverlaufs nicht sichergestellt. Außerdem sind die ermittelten Amplitudenfrequenzgänge mit hohen Messschwankungen verbunden, so dass diese für den Abgleich mit dem FE-Modell nur bedingt geeignet sind. Deshalb wird zusätzlich die experimentelle Modalanalyse mittels eines Shakers zur Anregung durchgeführt.

Der Versuchsaufbau ist im vorherigen Abschnitt erklärt und in Bild 4-3 b) visualisiert. Bei dieser Methode befinden sich ein Anregungspunkt auf der Adapterplatte für Z-Achse und Portal sowie ein weiterer Anregungspunkt an einem Adapterbauteil im Werkstückspannsystem. Die gleitsinusförmige Kraft wirkt jeweils in Y-Richtung. Es wurde eine Kraftamplitude von $\hat{F}_{AY} = 10$ N eingestellt. Die Kraftamplitude variiert über die Frequenz. Ab einer Frequenz von etwa $f = 400$ Hz nimmt die Kraftamplitude auf ca. $\hat{F}_{AY} = 9$ N ab, bei $f = 500$ Hz beträgt die Kraftamplitude lediglich $\hat{F}_{AY} = 8$ N, da die Energie von der Struktur aufgenommen wird. Daher nimmt aber die Streuung der Messwerte ab der Frequenz von $f = 300$ Hz massiv zu. Die Regelung des Shakers liefert im Frequenzbereich von $f = 0$ Hz bis $f = 40$ Hz keine reproduzierbaren und zuverlässigen Kraftamplituden. Aus diesem Grund werden die Messwerte unter $f_{HF} = 40$ Hz durch einen Hochpassfilter eliminiert. Auch bei diesem Aufbau werden unterschiedliche Schlittenpositionen gemessen. Dazu wurden zwischen den Messvorgängen die Positionen jeweils neu angefahren und die Regelung der Achsen danach stets abgeschaltet. Die Messwerte beinhalten folglich unterschiedliche Kontakt- und Reibbedingungen.

In Bild 4-13 sind exemplarisch die gemessenen Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung vom Messpunkt 2 von $f_{BU} = 0$ Hz bis $f_{BO} = 1.000$ Hz in Form eines sogenannten Bodediagramms abgebildet. In diesem Bodediagramm werden Betrag der Amplitude A und Phasenwinkel P des Frequenzgangs als Funktion der Frequenz f dargestellt. Dabei wird die Amplitudenachse logarithmisch dargestellt und der Phasenwinkel linear aufgetragen. Die Darstellung des Amplitudenbetrags wird als Amplitudenfrequenzgang und der Phasenwinkel als Phasengang bezeichnet. In den darauffolgenden Darstellungen wird aufgrund der hohen Messwertschwankungen, die über $f = 500$ Hz stark zunehmen, lediglich der Frequenzbereich von $f_{BU} = 0$ Hz bis $f_{BO} = 500$ Hz dargestellt. Diese Darstellungseinschränkung kann vorgenommen

werden, da die Aussage über die dynamischen Eigenschaften in Abhängigkeit von den Achsenpositionen auch schon unter $f = 500$ Hz möglich ist. Außerdem liegen die meisten regelungstechnisch relevanten Frequenzen im Bereich $f < 500$ Hz [KNO09].

Die jeweiligen Messungen wurden für die dargestellte Konfiguration mindestens fünffach durchgeführt, um die Wiederholgenauigkeit zu erfassen. Als Ergebnis werden lediglich die umhüllenden Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ visualisiert. Deshalb werden in einigen Diagrammen zwei und in den anderen drei gemessene Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ dargestellt. Die Messwerte der restlichen Wiederholungsmessungen liegen verteilt im grau hinterlegten Messwertband. Für eine bessere Übersichtlichkeit und spätere Vergleichbarkeit der Simulationswerte mit den Messwerten wird auf die Darstellung aller Messkurven verzichtet und stattdessen ein Messwertband abgebildet. Am Messwertband ist zu erkennen, dass die Messschwankungen in der Frequenz stark variieren können. Die Größenordnung der Schwankungen wird durch das Messwertband implizit geliefert. Daher wird auf die explizite Angabe dieser frequenzabhängigen Schwankungen verzichtet. Zur Identifizierung der Eigenfrequenzen werden die maximalen Amplitudenwerte herangezogen. Damit ist eine hohe Vergleichbarkeit der Messergebnisse untereinander und zwischen den Mess- und Simulationsergebnissen sichergestellt.

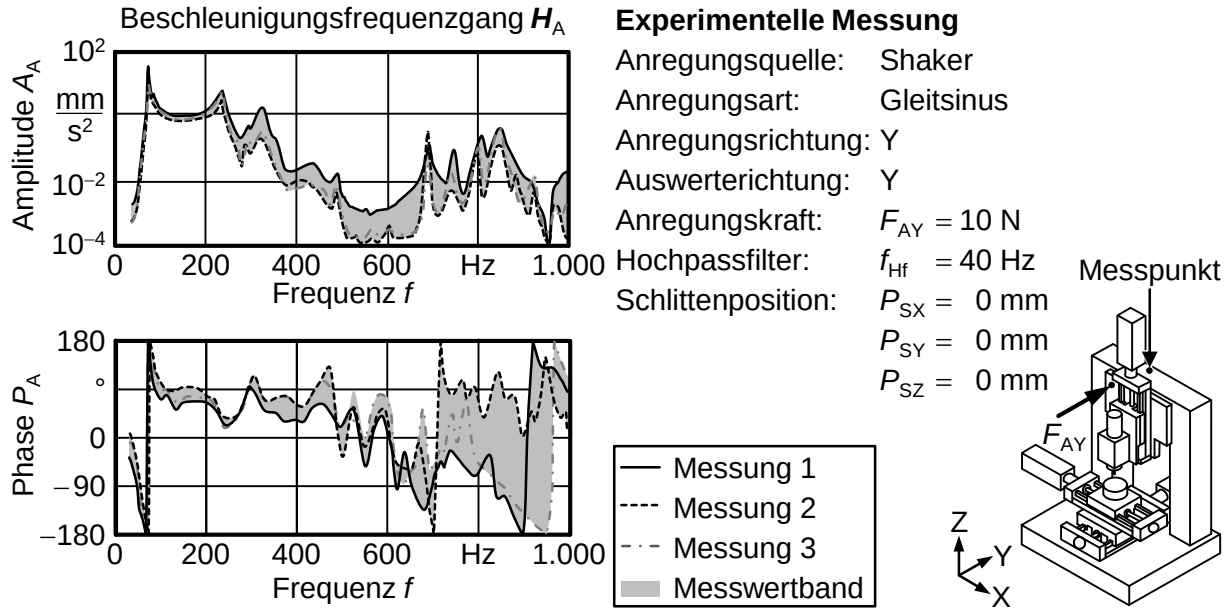


Bild 4-13: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 2 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung für die mittlere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = 0$ mm

Für die Visualisierung des Einflusses der Z-Schlittenposition auf das dynamische Maschinenverhalten werden in den folgenden Abbildungen zusätzlich die Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ von Messpunkt 8 in Y-Richtung für unterschiedliche Z-Schlittenpositionen gezeigt. In Bild 4-14 sind die Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ für die Z-Schlittenposition von $P_{SZ} = 45$ mm, in Bild 4-15 für $P_{SZ} = 0$ mm und in Bild 4-16 für $P_{SZ} = -45$ mm dargestellt. In diesen Diagrammen werden, wie schon in Bild 4-13, für die bessere Übersichtlichkeit und den späteren Vergleich mit den Simulationswerten nicht alle fünf Messergebnisse, sondern nur die einhüllenden Messkurven als Messwertband visualisiert. Auch hier wurden die Messergebnisse durch einen Hochpassfilter mit der Eckfrequenz von $f_{HF} = 40$ Hz eliminiert. Die Anregung findet im Experiment an der Adapterplatte in Y-Richtung statt. Deshalb werden die restlichen

Eigenmoden, vergleiche Bild 4-11 und Bild 4-12, deren Hauptbewegungsrichtung nicht in Y-Richtung liegt, auch nicht angeregt und können somit auch nicht identifiziert werden.

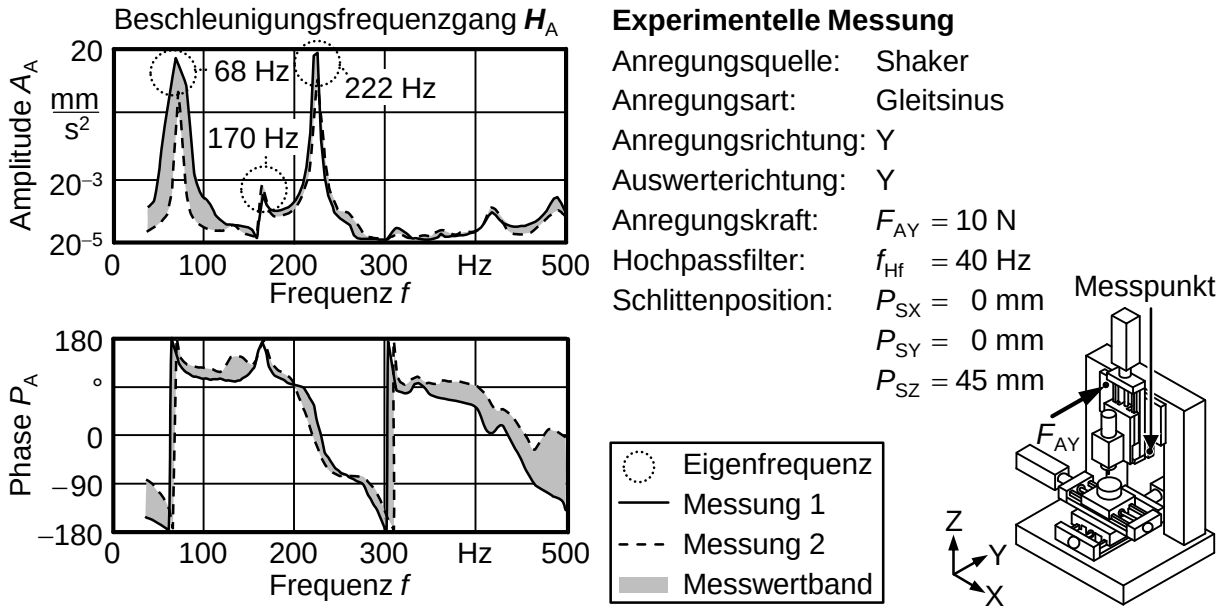


Bild 4-14: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 8 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung für die obere Z-Schlittenposition P_{SZ} = 45 mm

Wie für Messpunkt 2 sind bei den Messungen an Messpunkt 8 drei Eigenfrequenzen eindeutig identifizierbar. Allerdings lässt sich in diesen experimentellen Messungen eine leichte Verschiebung der ersten Eigenfrequenz und der Eigenfrequenz bei dem Wert f_{GS} = 220 Hz erkennen. Die erste Eigenfrequenz liegt für die obere Z-Schlittenposition von P_{SZ} = 45 mm bei f_{GS} = 68 Hz. Der Amplitudenpeak, der die zweite Eigenfrequenz kennzeichnet, befindet sich im Gegensatz zum Messpunkt 2, vgl. Bild 4-13, schon bei f_{GS} = 170 Hz. Die dritte Eigenfrequenz nimmt den Wert f_{GS} = 222 Hz ein. Weitere Eigenfrequenzen sind nicht eindeutig identifizierbar, obwohl sich teilweise Sprünge von $P_P \approx 90°$ im Phasenverlauf abzeichnen. Charakteristisch im Phasenverlauf ist für den Messpunkt 8, dass es ab der zweiten Eigenfrequenz von f_{GS} = 170 Hz zu einem Phaseneinbruch kommt.

In Bild 4-15 sind die Messergebnisse der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung für den Messpunkt 8 bei der mittleren Z-Schlittenposition P_{SZ} = 0 mm dargestellt. Die erste Amplitudenüberhöhung befindet sich bei f_{GS} = 70 Hz, die Zweite bei f_{GS} = 168 Hz und die Dritte Überhöhung liegt bei f_{GS} = 224 Hz. Im Gegensatz zur oberen Z-Schlittenposition erhöhen sich die erste und die dritte Eigenfrequenz hierbei um f_Δ = 2 Hz, die zweite Eigenfrequenz verringert sich um f_Δ = 2 Hz. Auch hier sind trotz Phasensprüngen von $P_P \approx 90°$ ab ca. $f \approx 250$ Hz an der Amplitude des Beschleunigungsfrequenzgangs $\boldsymbol{H}_A$ keine weiteren Eigenfrequenzen identifizierbar.

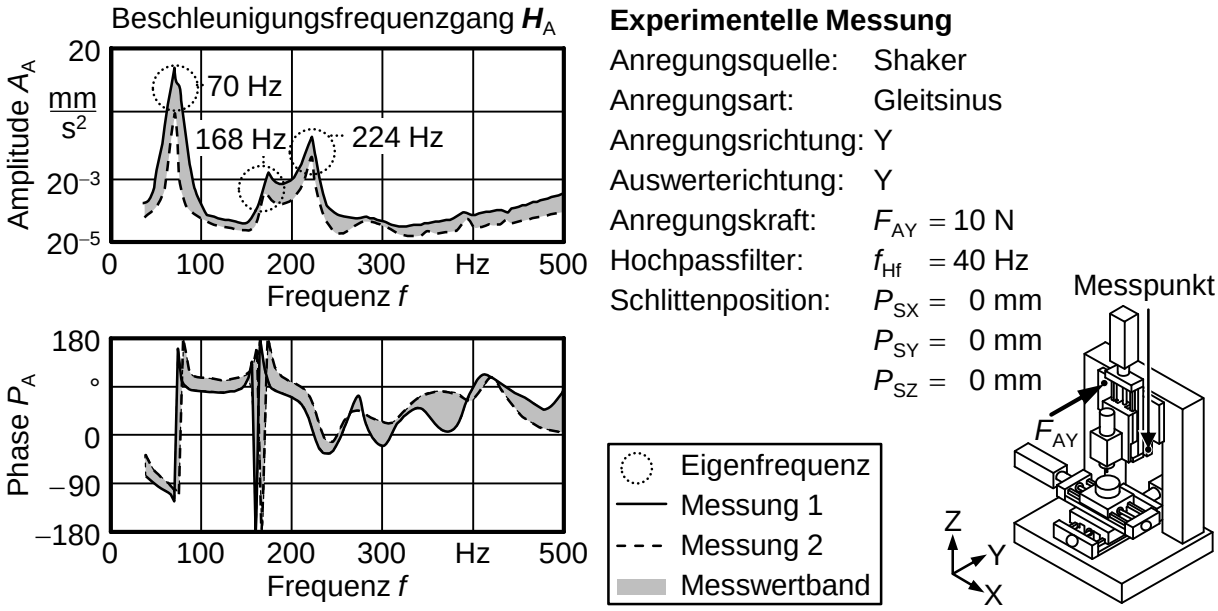


Bild 4-15: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 8 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung für die mittlere Z-Schlittenposition P_{SZ} = 0 mm

Dieser Frequenzverschiebungseffekt tritt auch in der unteren Position des Z-Schlittens $P_{SZ} = -45$ mm auf, wie in Bild 4-16 zu erkennen. Die erste identifizierte Eigenfrequenz liegt bei $f_{GS} = 72$ Hz, die zweite Eigenfrequenz bei $f_{GS} = 166$ Hz und die dritte Eigenfrequenz bei $f_{GS} = 226$ Hz. Zusätzlich zeichnen sich, anders als bei den Messungen der mittleren und oberen Z-Schlittenposition, weitere kleinere Amplitudenspitzen ab bei ca. $f_{GS} = 266$ bis $f_{GS} = 228$ Hz bzw. $f_{GS} = 258$ Hz und eine Größere von $f_{GS} = 492$ Hz bis $f_{GS} = 496$ Hz. Im Bodediagramm sind zusätzlich Phaseneinbrüche zu den Amplitudenspitzen erkennbar.

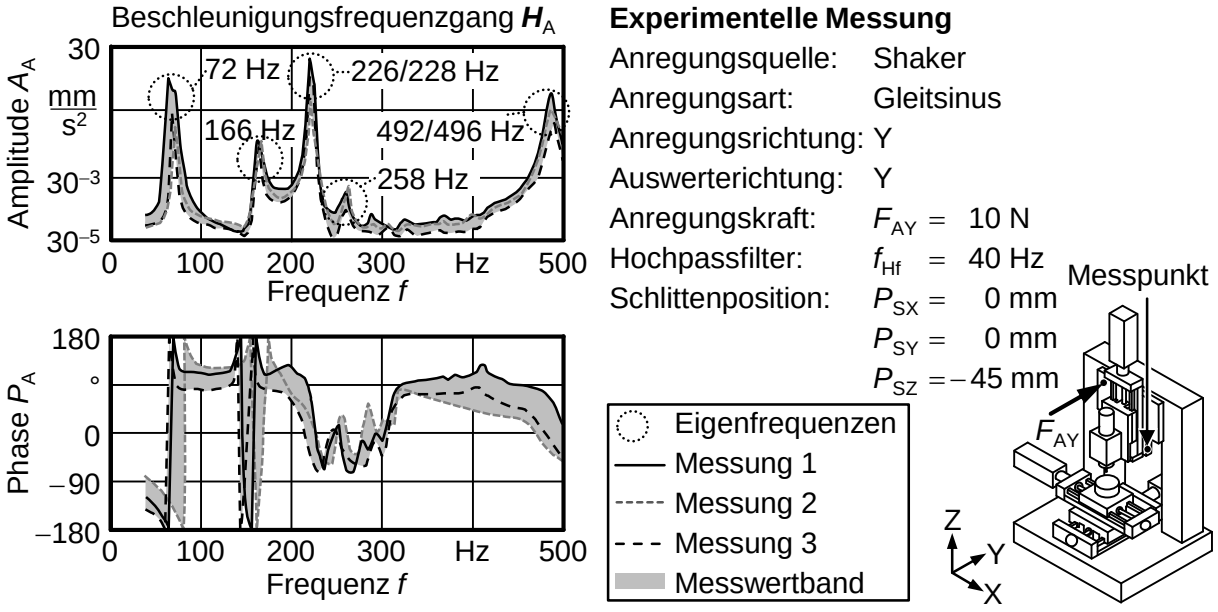


Bild 4-16: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 8 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung in Y-Richtung für die untere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = -45$ mm

Durch die experimentelle Modalanalyse bei den drei unterschiedlichen Z-Schlittenpositionen wird eine Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens von der Schlittenposition nachgewiesen.

Im nächsten Schritt wird das dynamische Verhalten in Abhängigkeit von der X-Schlittenposition dargestellt. Dazu wird durch einen Adapter im Werkstückspannsystem eine Anregung vom Shaker in Y-Richtung eingeleitet. Die Versuchsdurchführung erfolgt analog zum Nachweis der Dynamikabhängigkeit bezüglich der Z-Schlittenposition P_{SZ}.

In Bild 4-17 werden die Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung am Messpunkt 9 am Motor der X-Achse gezeigt. Der X-Schlitten befindet sich während der Messung in der Position $P_{SX} = 45$ mm. Bei allen Messungen an diesem Messpunkt sind die Schwingungsamplituden in Y-Richtung erheblich geringer als diejenigen an den Messpunkten am Portal. Hinzu kommt, dass die Messwertschwankungen an diesem Messpunkt einen höheren Einfluss haben. Die erste Eigenfrequenz ist eindeutig bei $f_{GS} = 144$ Hz zu erkennen. Die zweite Eigenfrequenz liegt bei $f_{GS} = 316$ Hz und die Dritte befindet sich bei $f_{GS} = 394$ Hz. Zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz sind weitere geringe Amplitudenspitzen festzustellen. Die Positionen dieser Amplitudenspitzen variieren von Messung zu Messung stark und können daher nicht eindeutig einer Eigenfrequenz zugeordnet werden. Hinzu kommt, dass die Position und Ausprägung der Amplituden A_P im Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ stark von der Aufhängung des Shakers abhängt.

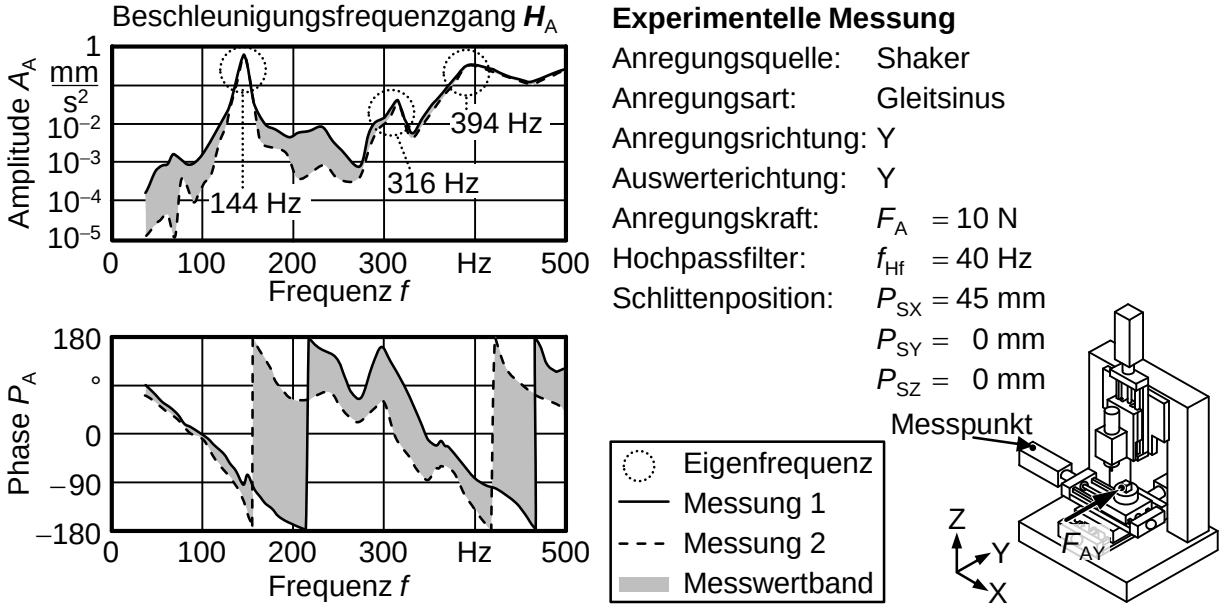


Bild 4-17: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 9 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung für die X-Schlittenposition $P_{SX} = 45$ mm

Die Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ für die mittlere X-Schlittenposition $P_{SX} = 0$ mm werden in Bild 4-18 ersichtlich. Die erste Eigenfrequenz befindet sich bei $f_{GS} = 144$ Hz, die Zweite bei $f_{GS} = 314$ Hz und die Dritte bei $f_{GS} = 400$ Hz. Es ist zu erkennen, dass sich, im Gegensatz zur vorherigen Messung, die zweite Eigenfrequenz um $f_\Delta = 2$ Hz verringert und die dritte Eigenfrequenz um $f_\Delta = 6$ Hz erhöht.

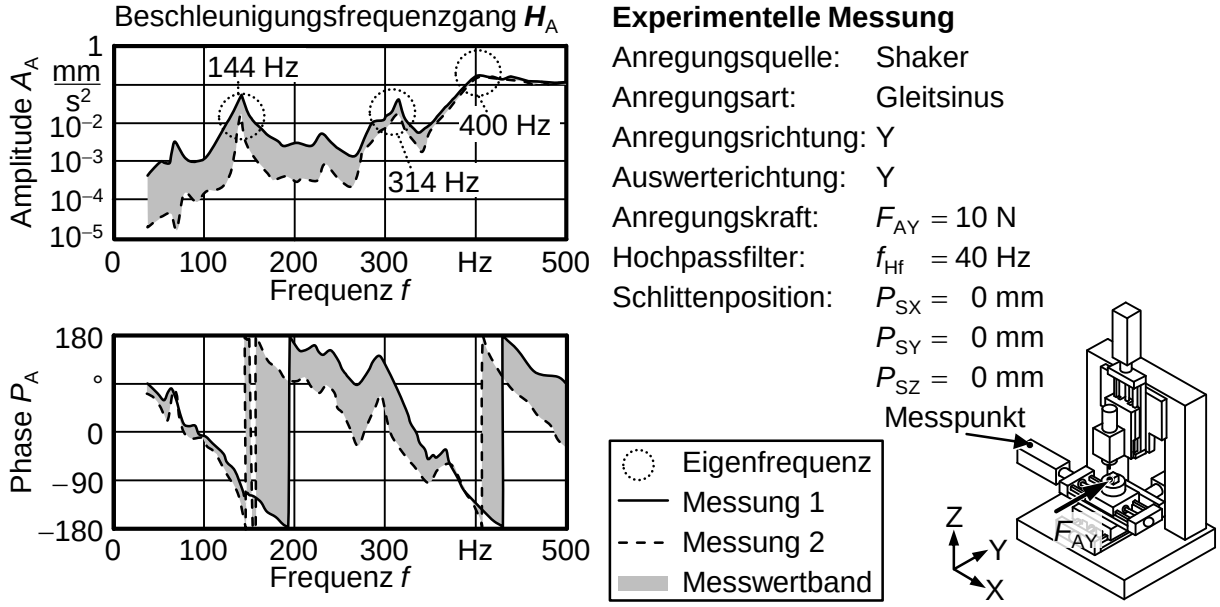


Bild 4-18: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 9 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung für die mittlere X-Schlittenposition $P_{SX} = 0$ mm

In Bild 4-19 werden die gemessenen Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ von Messpunkt 9 in Y-Richtung für die X-Schlittenposition $P_{SX} = -45$ mm abgebildet. Wie auch in den beiden zuvor gemessenen Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ befindet sich die erste Eigenfrequenz hier bei $f_{GS} = 144$ Hz. Die zweite Eigenfrequenz verringert sich dagegen um $f_\Delta = 2$ Hz auf $f_{GS} = 312$ Hz. Die dritte Eigenfrequenz steigt um $f_\Delta = 8$ Hz auf $f_{GS} = 408$ Hz.

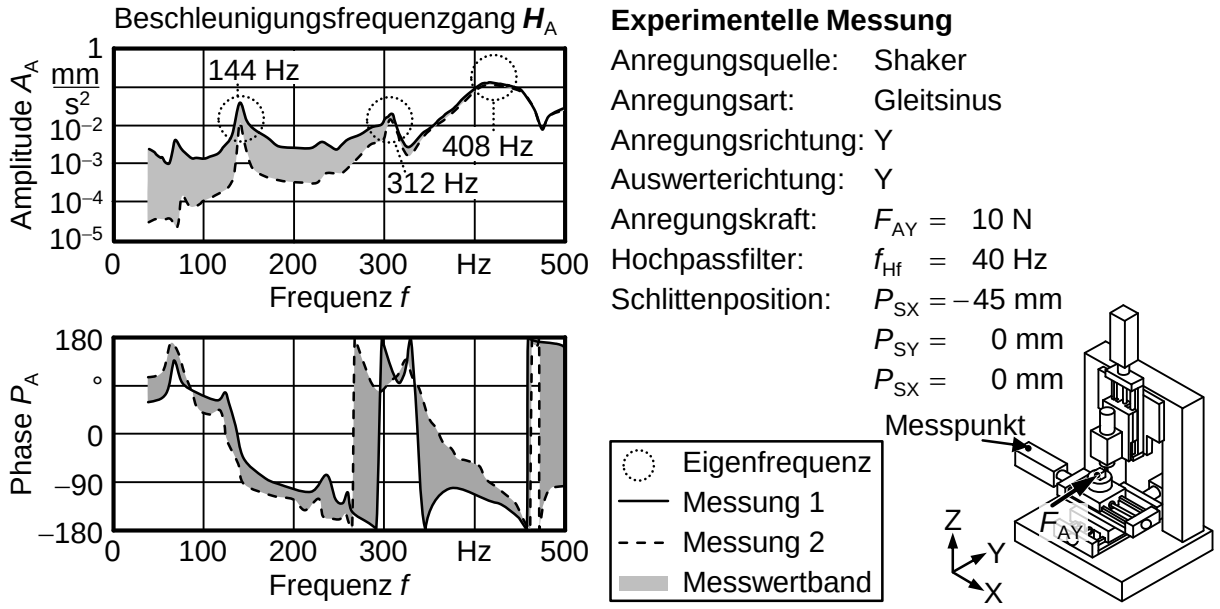


Bild 4-19: Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 9 in Y-Richtung aus der experimentellen Modalanalyse mittels Shaker-Anregung für die X-Schlittenposition $P_{SX} = -45$ mm

4.3.4 Kreisformtest und Zeitverhalten

Zur Bestimmung des mechatronischen Verhaltens bezüglich des Zusammenspiels der Dynamik und der Regelung der Mikrofräsmaschine wird der Kreisformtest nach DIN ISO 230-4 [DIN230-4] verwendet. Der Versuchsaufbau ist in Bild 4-6 dargestellt. Mit diesem Messaubau können geometrische Fehler sowie Regelungsfehler der Steuerung oder Servoantriebsfehler identifiziert werden. In Bild 4-20 ist das Ergebnis von fünf gemittelten Kreisformtests mit einem

gleichbleibenden dem Messradius von $r_K = 25$ mm dargestellt. Bei diesen Versuchen wurde der Vorschub variiert. Die Vorschübe nahmen die Werte $v_B = 100$ mm·min^{-1}, $v_B = 500$ mm·min^{-1} und $v_B = 1.000$ mm·min^{-1} ein.

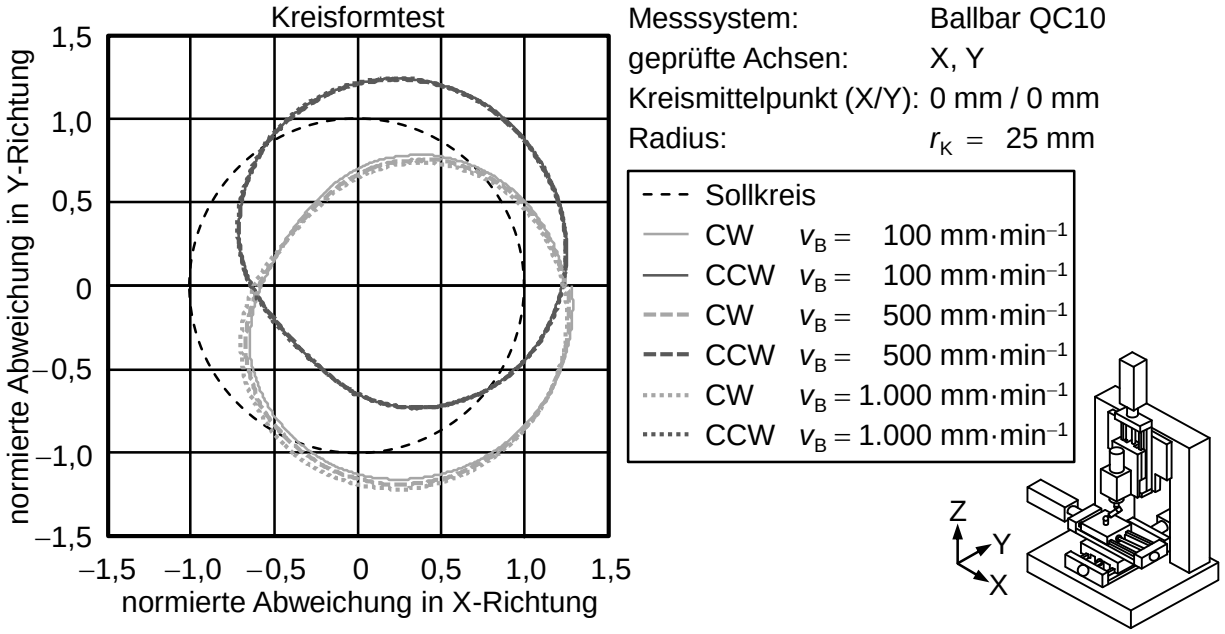


Bild 4-20: Ergebnis des Kreisformtests mit einem Messradius $r_K = 25$ mm und verschiedenen Vorschüben

Zusätzlich zur grafischen Darstellung sind die Ergebnisse in Tabelle 4-1 aufgelistet.

Tabelle 4-1: Gemittelte Werte aus dem Kreisformtest mit einem Messradius rK = 25 mm für die Vorschübe von $v_B = 100$ mm·min^{-1}, $v_B = 500$ mm·min^{-1} und $v_B = 1.000$ mm·min^{-1}

Bezeichnung	$v_B = 100$ mm·min^{-1}		$v_B = 500$ mm·min^{-1}		$v_B = 1.000$ mm·min^{-1}	
	Wert X	Wert Y	Wert X	Wert Y	Wert X	Wert Y
Umkehrspiel	1,88 µm	– 2,36 µm	4,6 µm	– 1,3 µm	0,08 µm	– 1,52 µm
Quadranten-Übergang	15,12 µm	– 2,72 µm	7,34 µm	0,48 µm	-2,68 µm	– 0,58 µm
Kippen	20,74 µm	3,72 µm	7,4 µm	0,76 µm	11,34 µm	– 11,98 µm
Zyklischer Fehler	15,52 µm	16,4 µm	10,98 µm	10,92 µm	7,16 µm	9,28 µm
Geradheit	– 22,42 µm	– 9,3 µm	– 13,46 µm	– 4,96 µm	1,8 µm	3,7 µm
Bezeichnung	Wert		Wert		Wert	
Schleppfehler	3,658 ms		0,366 ms		0,116 ms	
Rechtwinkligkeitsfehler	– 590,6 µm·m^{-1}		– 906,26 µm·m^{-1}		– 1.413,5 µm·m^{-1}	
Kreisformabweichung	96,18 µm		71,26 µm		56,82 µm	

Bei diesem Kreisformtest ist zu erkennen, dass der Rechtwinkligkeitsfehler den stärksten Einfluss hat, obwohl bei der Messung ein kleiner Radius verwendet wurde. Dies ist zum Einen an den hohen Messwerten sowie an den gemessenen Kreisen zu sehen. Denn die gemessenen Kreise sind Oval, deren Spiegelachse die Winkelhalbierende bei 45° ist. Zum Anderen ist an

der ovalen Form zu erkennen, dass die Bewegung der X-Achse zu kurz ist. Zusätzlich ist an den Messwerten ein Mittelpunktfehler zu erkennen. In der Regel lassen sich mit kleineren Kreisen die Verzögerungen und die Schleppfehler besser als geometrischen Fehler identifizieren.

Für die Bestimmung der Dämpfung wird die Impulsantwort im Zeitbereich verwendet. Mit der Antwort eines Systems auf einen Impuls als Eingang wird das logarithmische Dekrement Λ mittels der Gleichung 4-1 bestimmt [EWI84]. Dabei beschreibt A_m die Amplitude der ersten Amplitudenauslenkung und A_{m+n} ist die n-te darauffolgende Auslenkung.

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{A_m}{A_{m+n}} \tag{4-1}$$

Bei der Ermittlung des logarithmischen Dekrements Λ wird $n = 15$ gesetzt und die Messung fünffach wiederholt. Die Umrechnung vom logarithmischen Dekrement Λ zum Dämpfungsgrad ϑ nach DIN 1311-2 [DIN1311-2] erfolgt mit Hilfe der folgenden Gleichung 4-2.

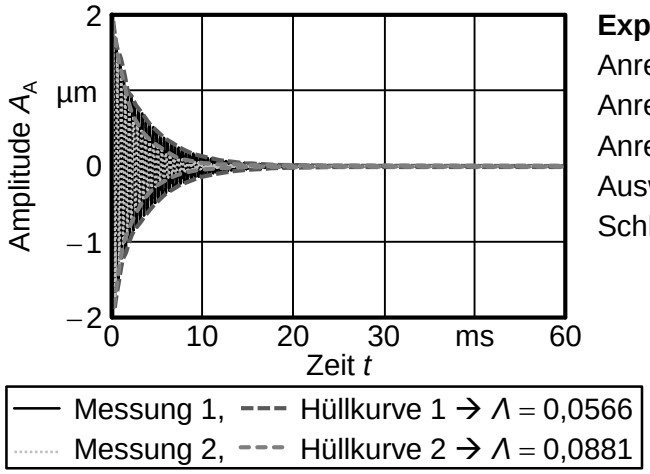
$$\vartheta = \frac{\frac{\Lambda}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}} \tag{4-2}$$

Die Werte des logarithmischen Dekrements Λ sind abhängig von den Messpositionen. Die Positionen sind in Bild 4-4 gezeigt. Die Anregung erfolgt am Spindelspannblock in Y-Richtung. Die Schwankungen der Messwerte werden durch die Standardabweichung des logarithmischen Dekrements σ_Λ beziffert. In der nachfolgenden Tabelle 4-2 werden zusätzlich der Dämpfungsgrad ϑ und die zugehörige Standardabweichung σ_ϑ mittels der Umrechnung aus Gleichung 4-2 aufgelistet. An den Messwerten ist zu erkennen, dass die Dämpfung vom Messort abhängt. Daraus resultiert, dass die Dämpfung nicht homogen im System verteilt ist.

Tabelle 4-2: Experimentell ermittelte Dämpfungswerte aus dem logarithmischen Dekrement

Pos.	log. Dekrement Λ	Standardabweichung des log. Dekrements σ_Λ	Dämpfungsgrad ϑ	Standardabweichung des Dämpfungsgrads σ_ϑ
1	0,0691	± 0,0065	0,011	± 0,001
2	0,0566	± 0,0126	0,009	± 0,002
3	0,0628	± 0,0065	0,010	± 0,001
7	0,0880	± 0,0188	0,014	± 0,003
8	0,0754	± 0,0188	0,012	± 0,003

Ein Grund für die Schwankungen der Messwerte liegt in der nicht uniformen Krafteinleitung mittels des Impulshammers. Der manuell durchgeführte Impuls variiert in der Kraftamplitude und in der Impulsdauer. Daher unterscheiden sich auch die resultierenden Impulsantworten geringfügig bei jeder Messdurchführung. Exemplarisch werden im Bild 4-21 zwei bezüglich der Kraft normierte und gefilterte Impulsantworten des Messpunkts 8 sowie die umhüllende Kurve dargestellt. Der zugehörige Messaufbau wird in Unterkapitel 4.3.1 beschrieben.



Experimentelle Messung

Anregungsquelle:	Impulshammer
Anregungsart:	Impuls
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
	$P_{SY} = 0$ mm
	$P_{SZ} = 0$ mm

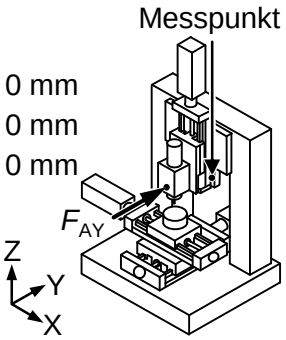
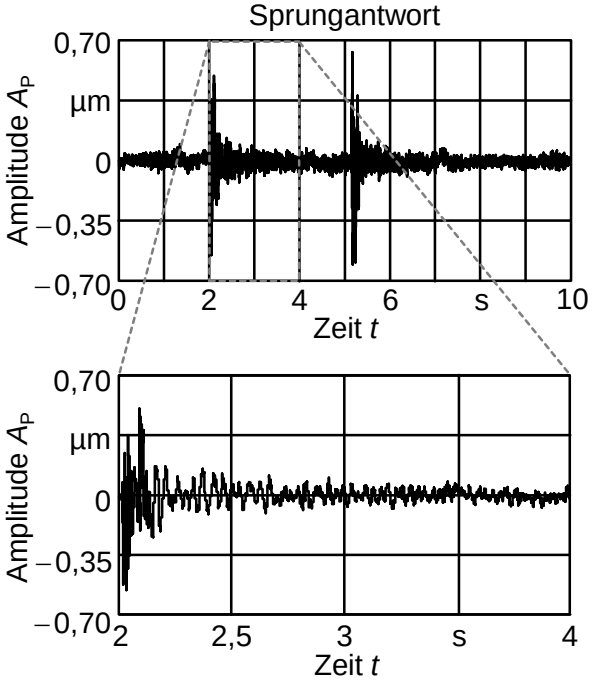


Bild 4-21: Exemplarische Impulsantworten des Messpunkts 8 zur Ermittlung der Dämpfung

Im Folgenden wird das Sprungverhalten im Zeitbereich betrachtet. Für die Charakterisierung des dynamischen Verhaltens werden zwei kleinräumige, primär dynamische Positionierungssprünge der Z-Achse um $l_\Delta = 1$ mm erst in positive dann in negative Z-Richtung, bei einem maximalen Vorschub von $v_B = 1.000$ mm·min^{-1} zur Anregung verwendet. Eine Beschleunigungsbegrenzung ist nicht wirksam. Die indirekten Sprungantworten des Gesamtsystems zeigt das Bild 4-22 am Beispiel des Messpunkts 8. Im Gegensatz zu einer direkten Sprungantwort, wird nicht in Bewegungsrichtung am TCP gemessen, sondern orthogonal zur Bewegungsrichtung am Messpunkt 8. Dieses Vorgehen wurde zur Erhöhung der Vergleichbarkeit und aufgrund der besseren Zugänglichkeit der Messstelle gewählt.



Experimentelle Messung

Anregungsquelle:	Z-Achse
Anregungsart:	Sprungsignal
Sprunghöhe:	$l_\Delta = 1.000$ µm
Vorschub:	$v_B = 1.000$ mm·min^{-1}
Anregungsrichtung:	Z
Auswerterichtung:	Y
Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
	$P_{SY} = 0$ mm

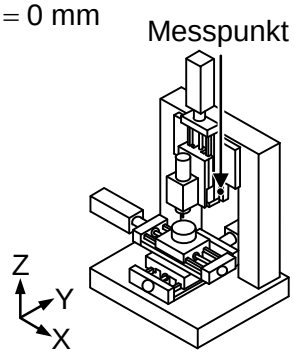


Bild 4-22: Exemplarische Sprungantworten des Messpunkts 8 aufgrund eines Z-Achsensprungs

4.3.5 Zusammenfassung der experimentell ermittelten Ergebnisse

In der Tabelle 4-3 sind die Frequenzergebnisse zusammengefasst, die mit der experimentellen Modalanalyse mittels Impulshammer für die jeweiligen Z-Schlittenpositionen P_{SZ} ermittelt

wurden. Neben den Eigenfrequenzen sind auch die zugehörigen Messwertschwankungen angegeben. Erst bei einer signifikanten Unterscheidung der identifizierten Eigenfrequenzen inklusive Messwertschwankung ist eine sichere Aussage bezüglich der Positionsabhängigkeit der dynamischen Eigenschaften möglich. Die Werte der vierten und der siebten Eigenfrequenz unterscheiden sich signifikant in Bezug auf die unterschiedlichen Schlittenpositionen. Bei diesen Eigenfrequenzen liegt somit eine Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens der Z-Schlittenposition vor.

Tabelle 4-3: Zusammenfassung der Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse mittels Impulshammer bei der Z-Schlittenpositionsvariation und konstanten Kreuztischschlittenpositionen $P_{SX} = 0$ mm und $P_{SY} = 0$ mm

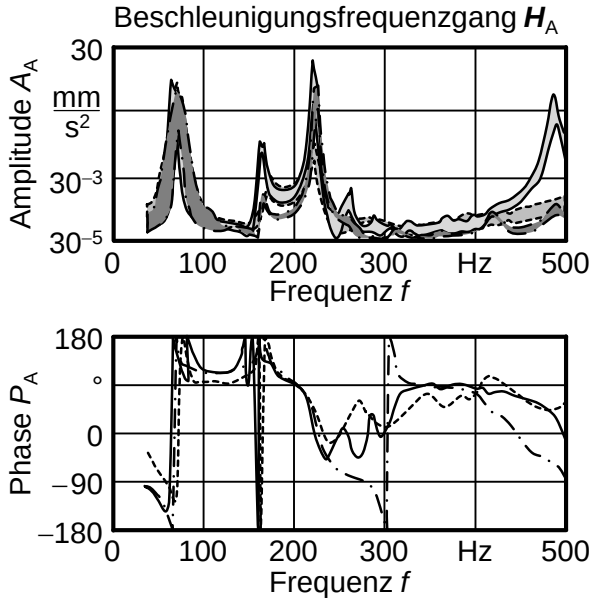
Eigen-frequenznr.	Gemessene Eigenfrequenz f_{GS} in Hz			Messwert-schwankung f_{Δ} in Hz	Positions-abhängigkeit
	$P_{SZ} = 45$ mm	$P_{SZ} = 0$ mm	$P_{SZ} = -45$ mm		
1	66	66	66	4 - 5	Nein
2	116	116	116	5 - 6	Nein
3	145	146	144	4	Nein
4	182	174	154	3	Ja
5	220	218	218	4	Nein
6	245	240	240	4	Nein
7	252	258	272	4 - 6	Ja
8	275	273	272	4 - 6	Nein
9	382	384	382	4	Nein
10	406	408	410	6 - 8	Nein
11	451	451	450	3 - 8	Nein
12	493	496	495	2 - 3	Nein

Aus der Tabelle und der zugehörigen Diskussion der Messergebnisse in Unterkapitel 4.3.3 wird ersichtlich, dass die alleinige experimentelle Modalanalyse mittels Impulshammer für eine sichere Identifikation der poseabhängigen Eigenschaften der Werkzeugmaschinendynamik nicht ausreicht. Zusätzlich ist bei diesem Messverfahren keine reproduzierbare Phasenlage bestimmbar. Deshalb ist eine experimentelle Modalanalyse mittels Anregung durch den Shaker für die unterschiedlichen Schlittenpositionen notwendig.

In Bild 4-23 sind die Messwertbänder der drei Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ des Messpunktes 8 in Y-Richtung für die drei unterschiedlichen Z-Schlittenpositionen $P_{SZ} = 45$ mm, $P_{SZ} = 0$ mm und $P_{SZ} = -45$ mm abgebildet. Für eine bessere Übersicht werden nur die Mittelwerte der Phasengänge dargestellt und nicht die Messwertbänder, wie es bei den Beschleunigungsfrequenzgängen der Fall ist. Diese Darstellung ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus Bild 4-14, Bild 4-15 und Bild 4-16. Bei einem Vergleich der überlagerten Kurven, lässt sich feststellen, dass die gemessenen Werte mit Schwankungen behaftet sind, obwohl die messtechnischen Parameter nahezu konstant gehalten werden. Dennoch ist zu erkennen, dass sich die erste Eigenfrequenz zwischen $f_{GS} = 68$ Hz und $f_{GS} = 72$ Hz bewegt und sich die

Amplitude nur minimal ändert. Markanter ist dagegen die Amplitudenänderung um eine Zehnerpotenz der zweiten Eigenfrequenz, die sich zwischen $f_{GS} = 166$ Hz und $f_{GS} = 170$ Hz befindet. Aufgrund der geringen Amplitudenhöhe und geringen Phasenänderung besitzt die zweite Eigenfrequenz bei der oberen Schlittenposition $P_{SZ} = 45$ mm einen vernachlässigbaren Einfluss. Je weiter der Z-Schlitten allerdings nach unten fährt, desto mehr gewinnt die zweite Eigenfrequenz an Bedeutung.

Die Amplitude der dritten Eigenfrequenz zwischen $f_{GS} = 222$ Hz und $f_{GS} = 228$ Hz verringert sich zwar auch um eine Zehnerpotenz, die Amplitude ist aber dennoch höher als bei der zweiten Eigenfrequenz. Dies ist insbesondere bei der Z-Schlittenposition $P_{SZ} = 0$ mm zu beobachten. In der Schlittenposition $P_{SZ} = -45$ mm werden zwei weitere Amplitudenspitzen bei $f_{GS} = 258$ Hz und ca. $f_{GS} = 494$ Hz gemessen. Diese beiden Frequenzen werden beim Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ der mittleren und oberen Schlittenposition zwar nicht identifiziert, sie sind aber im Phasenverlauf angedeutet.



Vergleich der experimentellen Messung

Anregungsquelle:	Shaker
Anregungsart:	Gleitsinus
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Anregungskraft:	$F_{AY} = 10$ N
Hochpassfilter:	$f_{Hf} = 40$ Hz
X-Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlittenposition:	$P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition:	Variation

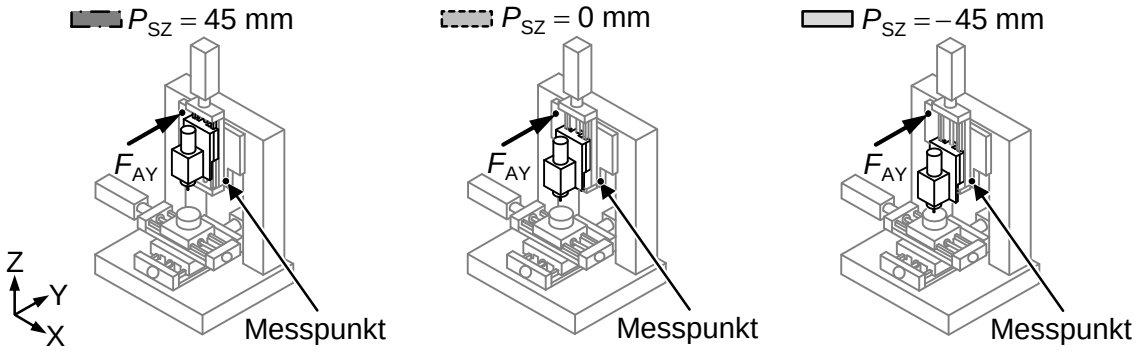


Bild 4-23: Vergleich der gemessenen Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ am Messpunkt 8 in Y-Richtung für die drei unterschiedlichen Z-Schlittenpositionen $P_{SZ} = 45$ mm, $P_{SZ} = 0$ mm und $P_{SZ} = -45$ mm

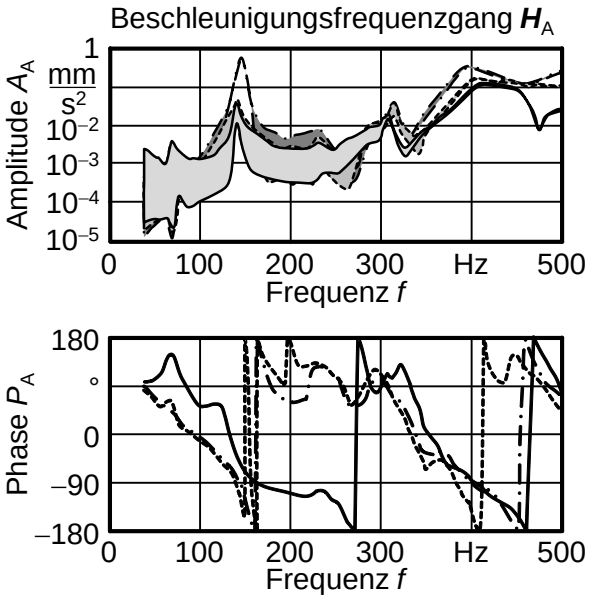
In Tabelle 4-4 sind die identifizierten Eigenfrequenzen aus den Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ von Messpunkt 8 in Y-Richtung zusammengestellt. Aus den vorherigen Ergebnissen und dieser Tabelle wird deutlich, dass sich nicht nur die Eigenfrequenz innerhalb einer Z-Schlittenpositionsänderung von lediglich $P_{S\Delta} = 90$ mm um mindestens $f_\Delta = 4$ Hz verschiebt, sondern

sich auch die Amplituden um eine Zehnerpotenz ändern und sich außerdem neue Eigenfrequenzen abzeichnen. Das zeigt, dass die klassische Betrachtung der dynamischen Eigenschaften der Werkzeugmaschine an einem Arbeitspunkt nicht ausreicht, sondern dass die unterschiedlichen Schlittenpositionen berücksichtigt werden müssen.

Tabelle 4-4: Zusammenfassung der identifizierten Eigenfrequenzen aus den Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ des Messpunkts 8 in Y-Richtung in Abhängigkeit von der Z-Schlittenposition

Z-Schlittenposition	Gemessene Eigenfrequenz f_{GS} in Hz				
P_{SZ} = 45 mm	68	170	222		
P_{SZ} = 0 mm	70	168	224		
P_{SZ} = −45 mm	72	166	226/228	258	492/496

Die drei Messwertbänder der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung des Messpunkts 9 für die unterschiedlichen X-Schlittenpositionen $P_{SX} = 45$ mm, $P_{SX} = 0$ mm und $P_{SX} = -45$ mm werden in Bild 4-24 gezeigt.



Vergleich experimentelle Messung

Anregungsquelle: Shaker
Anregungsart: Gleitsinus
Anregungsrichtung: Y
Auswerterichtung: Y
Anregungskraft: $F_{AY} = 10$ N
Hochpassfilter: $f_{Hf} = 40$ Hz
X-Schlittenposition: Variation
Y-Schlittenposition: $P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition: $P_{SZ} = 0$ mm

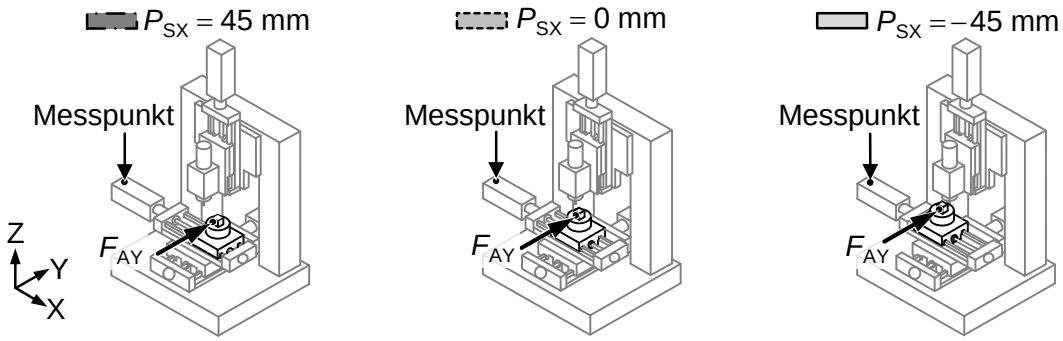


Bild 4-24: Vergleich der gemessen Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung am Messpunkt 9 für die drei unterschiedlichen X-Schlittenpositionen $P_{SX} = 45$ mm, $P_{SX} = 0$ mm und $P_{SX} = -45$ mm

Diese Abbildung stellt eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus Bild 4-17, Bild 4-18 und Bild 4-19 dar. Durch diese Darstellung ist die Amplitudenänderung der ersten Eigenfrequenz deutlich zu erkennen. Die Verschiebung der dritten Eigenfrequenz zwischen $f = 222$ Hz und $f = 228$ Hz ist in dieser überlagerten Darstellung leicht zu identifizieren.

Eine Erklärung für die Existenz der Messwertbänder wird in den Untersuchungen von UHLMANN und RASPER [UHL12b] gegeben. Aus dieser Untersuchung ist bekannt, dass die messtechnischen Parameter das Ergebnis des gemessenen Übertragungsverhaltens stark beeinflussen. Deshalb muss der messtechnische Aufbau, wie bspw. die Aufhängung des Shakers oder die unterschiedlichen X-Schlittenpositionen bei jeder Neupositionierung genau geprüft werden. Da sich mit der X-Schlittenposition auch der Ort der Krafteinleitung ändert, ist bei den durchgeführten Messungen auch die Shakerposition genau zu kontrollieren. Auch während der Messdurchführung wurde eine starke Ergebnisabhängigkeit bzgl. des Messaufbaus beobachtet.

Bei der zusammenfassenden Darstellung in Bild 4-24 ist zu erkennen, dass sich bei der ersten Eigenfrequenz von $f_{GS} = 144$ Hz nur die Amplitude A um eine Zehnerpotenz ändert und der Frequenzwert konstant bleibt. Die zweite und die dritte Eigenfrequenz sind abhängig von der X-Schlittenposition und somit auch von der Krafteinleitungsposition. Der zweite Eigenwert wechselt um $f_{\Delta} = 2$ Hz von $f_{GS} = 316$ Hz für die X-Schlittenposition $P_{SX} = 45$ mm auf $f_{GS} = 314$ Hz für die X-Schlittenposition $P_{SX} = 0$ mm und um $f_{\Delta} = 2$ Hz auf $f_{GS} = 312$ Hz für die X-Schlittenposition $P_{SX} = -45$ mm. Die Amplitudenänderung ist dagegen vernachlässigbar gering. Die dritte Eigenfrequenz für die X-Schlittenposition $P_{SX} = -45$ mm nimmt den Frequenzwert $f_{GS} = 394$ Hz ein. Dieser verschiebt sich um $f_{\Delta} = 6$ Hz auf $f_{GS} = 400$ Hz für die X-Schlittenposition $P_{SX} = 0$ mm. In der letzten X-Schlittenposition $P_{SX} = -45$ mm ändert sich die Eigenfrequenz um nochmals $f_{\Delta} = 8$ Hz auf $f_{GS} = 408$ Hz. Auch bei dieser Eigenfrequenz ist die Amplitudenänderung vernachlässigbar gering. Eine Auflistung der Eigenfrequenzen bezüglich der unterschiedlichen X-Schlittenpositionen wird in der folgenden Tabelle 4-5 geliefert:

Tabelle 4-5: Zusammenfassung der identifizierten Eigenfrequenzen aus den Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ des Messpunkts 9 in Y-Richtung in Abhängigkeit von der X-Schlittenposition

X-Schlittenposition	Gemessene Eigenfrequenz f_{GS} in Hz		
$P_{SX} = 45$ mm	144	316	394
$P_{SX} = 0$ mm	144	314	400
$P_{SX} = -45$ mm	144	312	408

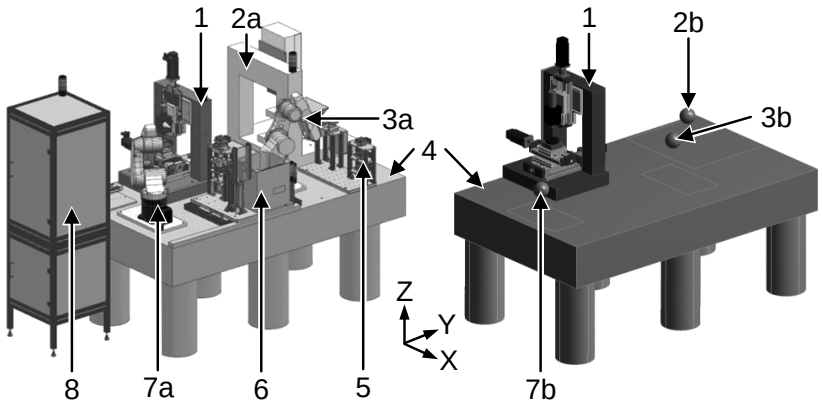
Aus der experimentellen Modalanalyse wird demzufolge ersichtlich, dass die Eigendynamik der Werkzeugmaschine im Allgemeinen von der Schlittenposition beeinflusst wird. Dieses Ergebnis deckt sich mit dem Ergebnis in [BÄN12, SEK12]. Eine globale Beurteilung der dynamischen Eigenschaften für den gesamten Arbeitsraum mit nur einer Schlittenkombination ist allerdings nicht möglich, da sich bereits bei einer kleinen Positionsänderung von nur $P_{S\Delta} = 90$ mm die Amplituden A um eine Größenordnung und die Eigenfrequenzen f_{GS} um $f_{\Delta} = 8$ Hz verschieben. Diese ermittelten Änderungen sind höher als die Schwankungen in den Messwerten. Daher kann davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei nicht um Messwertschwankungen handelt. Die Ursachen für die Amplituden- und die Frequenzänderung sind, dass zum einen bei einer Positionsänderung der Achsen es zu einer Steifigkeits- und Massenumverteilung kommt und zum anderen die Positionsänderung auch zu einer Änderung der Krafteinleitungsposition und zusätzlich zur Schwerpunktverlagerung der angrenzenden Struktur führt.

4.4 Beschreibung und Durchführung der Finite-Elemente-Analyse

4.4.1 Software und konventionelle Modellierung

Zur Modellierung der Mikrofräsmaschine aus Bild 4-1 wird die Finite-Elemente-Software ANSYS Workbench des Herstellers ANSYS INC. aus Canonsburg, Pennsylvania, USA, verwendet. Die Mikrofräsmaschine ist ein Systembestandteil einer größeren Versuchsanordnung des SFB TR 29, die schematisch in Bild 4-25 a) dargestellt ist. Für eine höhere Modellgüte müssen Bestandteile der größeren Versuchsanordnung bei der Modellierung berücksichtigt werden.

a) Versuchsanordnung des SFB TR 29 b) Ersatzmodell



Komponenten:
1 Mikrofräsmaschine
2a Senkerodiermaschine
2b Ersatzmasse der Senkerodiermaschine
3a Robotersystem 1
3b Ersatzmasse des Robotersystems 1
4 Granittisch
5 Werkstücklager
6 Reinigungsstation
7a Robotersystem 2
7b Ersatzmasse des Robotersystems 2
8 Messstation

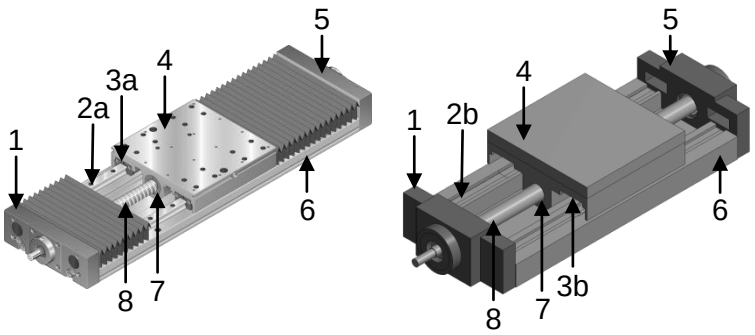
Bild 4-25: Schematischer Aufbau a) der Versuchsanordnung des SFB TR 29 Demonstrators und b) des verwendeten Ersatzmodells

Aus der Literatur ist bekannt, dass die Werkzeugmaschinenaufstellung einen hohen Einfluss auf das dynamische Verhalten im unteren Frequenzbereich besitzt [WEC06, KUN13]. Deshalb wird der Granittisch (Pos. 4) inklusive der sechs Aufstellfüße bei der Modellierung der Werkzeugmaschine berücksichtigt. Um die korrekte Massenverteilung des Gesamtsystems zu erhalten, werden zusätzlich auch die Massen der Senkerodiermaschine (Pos. 2) und der beiden Robotersysteme (Pos. 3 und Pos. 7) als Punktmassen unter Berücksichtigung der jeweiligen Schwerpunkte modelliert. Diese Punktmassen werden durch die MPC mit dem Granittisch verknüpft. Das Werkstücklager (Pos. 5), die Reinigungsstation (Pos. 6) und die Messstation (Pos. 8) besitzen in Bezug auf den dynamischen Einfluss auf die Mikrofräsmaschine (Pos. 1) aufgrund der geringen Masse und der starken Entkopplung vom Gesamtsystem keine Relevanz und werden deshalb im weiteren Verlauf vernachlässigt.

Das CAD-Modell der Versuchsmaschine wird für die FE-Analyse mit dem Programm ANSYS DesignModeler aus dem Produktportfolio des Herstellers ANSYS INC. vereinfacht, wie es exemplarisch in Bild 2-2 dargestellt ist. Bei dieser Vereinfachung ist darauf zu achten, dass die Masse, die resultierende Steifigkeit und die Schwerpunkte des Modells mit der originalen Werkzeugmaschinenstruktur übereinstimmen. Mit den Funktionen der automatischen Löschung von Löchern und kleinen Flächen sowie den Funktionen zur Erzeugung von virtueller Topologie werden die Modelle halbautomatisch vereinfacht. Für die Modellierung sind außerdem die geometrischen Größen, die Massen, die Schwerpunkte und die Werkstoffdaten der Schienenführungstische, der Spindel sowie des Granitportals bekannt. Die geometrischen Informationen und die Werkstoffdaten der Adapterplatten liegen ebenfalls vor.

In Bild 4-26 a) ist der Schienenführungstisch vom Typ TKK ohne Motor der Firma BOSCH REXROTH, Lohr am Main, abgebildet. Die drei Achsen der Mikrofräsmaschine werden aus Schienenführungstischen dieses Typs gebildet. Im Teilbild b) ist das zugehörige vereinfachte FE-Modell dargestellt. Die Mikrofräsmaschine beinhaltet einen ungebremsten Schienenführungstisch des Typs TKK 20-225 als Y-Achse und des Typs TKK 15-155 als X-Achse sowie einen gebremsten Schienenführungstisch vom Typ TKK 15-155 als Z-Achse. Alle drei Schienenführungstische besitzen je eine Gewindespindel mit dem Nenndurchmesser $d_{S0} = 20$ mm sowie der Nennsteigung $P_{h0} = 5$ mm und sind mit dem gleichen Typ von Gewindemutter ausgerüstet. Die Schienenführungstische unterscheiden sich durch ihre geometrischen Abmessungen und durch die verwendeten Linearführungssysteme. Der Schienenführungstisch des Typs TKK 15-155 ist mit Führungsschienen der Breite $b_{FS} = 15$ mm ausgestattet; der Tisch vom Typ TKK 20-225 weist eine Führungsschienenbreite von $b_{FS} = 20$ mm auf.

a) CAD-Modell b) vereinfachtes FE-Modell



Komponenten:

1 Traverse Festlager
2a Linearführung
2b Fläche der Linearführung
3a Führungswagen
3b Fläche des Führungswagens
4 Schlittentischteil
5 Traverse Loslager
6 Grundplatte
7 Kugelgewindemutter
8 Kugelgewindespindel

Bild 4-26: Schematischer Aufbau der verwendeten Schienenführungstische als a) CAD-Modell und b) vereinfachtes FE-Modell

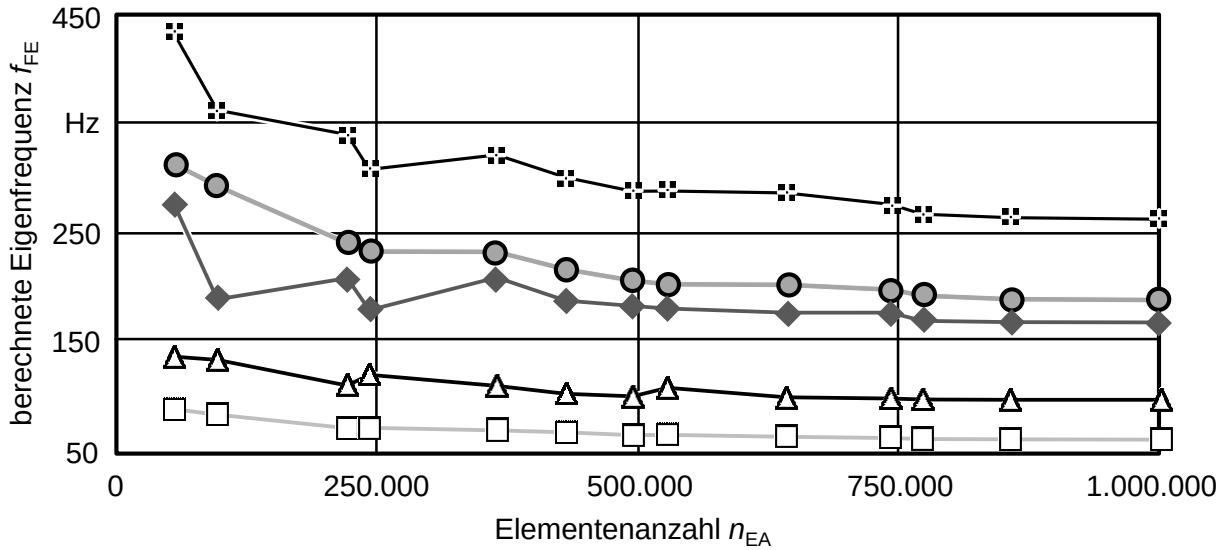
Für die Modellierung sind die Werkstoffkennwerte der einzelnen Komponenten ebenfalls bekannt. Zusätzlich werden die E-Module der Grundplatte (Pos. 6), der Traversen (Pos. 1 und 5), des Flansches und des Motors anhand der Ergebnisse aus der statischen Nachgiebigkeitsanalyse aus Unterkapitel 4.3.2 angepasst, um die Steifigkeitsänderung aufgrund der Vorspannung zu berücksichtigen. Das dynamische Verhalten des Kugelgewindetriebs wird durch die Abmessungen, den Durchmesser d_{S0} sowie durch die wirksame Länge l_{eff}, die axiale Steifigkeit k_a und die Torsionssteifigkeit k_t entscheidend bestimmt. Die Gewindespindel besitzt innerhalb des Kugelgewindeantriebssystems die geringste Steifigkeit in die axiale Richtung und beeinflusst daher im Wesentlichen die ersten beiden Eigenfrequenzen und die zugehörigen Moden des Kugelgewindetriebs [DAD10a]. Somit bestimmen diese auch die strukturellen Schwingungsmoden des gesamten Systems.

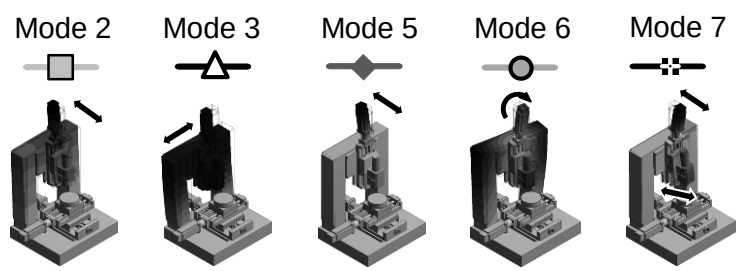
In Bild 2-7 ist der Steifigkeitsaufbau des Kugelgewindeantriebssystems schematisch gezeigt. Der Kraftfluss der Gewindespindel wird axial und radial durch das Lager mit der Grundplatte des Schienenführungstisches (Pos. 6) über die Traversen (Pos. 1 und Pos. 5) gewährleistet. Die axialen Kräfte werden hauptsächlich über das Schrägkugellager vom Typ ZKLN-1242-2RS-PE aufgenommen. Alle drei Kugelgewindeantriebssysteme der Mikrofräsmaschine enthalten diese Lager. In der Traverse (Pos. 1) besitzt das Festlager die axiale Steifigkeit $k_{FLa} = 3{,}75 \cdot 10^8\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ und die Kippsteifigkeit $k_{FLk} = 50\ \mathrm{Nm \cdot mrad^{-1}}$. Die hohe radiale Steifigkeit k_r ändert das dynamische Verhalten kaum. Die radialen Kräfte werden zusätzlich vom Rillenkugellager in der Traverse (Pos. 5) vom Typ 6201-2Z aufgenommen. Dieses Lager hat die

Funktion des Loslagers und ist in allen drei Kugelgewindeantrieben enthalten. Die Lager werden mit Zwangsbedingungen mittels räumlicher Feder-Dämpfer-Elemente modelliert, wie es in Bild 2-4 b) dargestellt wird.

Die Modellaufbereitung und die FE-Berechnung werden mit der Software ANSYS WB des Herstellers ANSYS INC. durchgeführt. Für die Berechnung werden unterschiedliche Computer eingesetzt. Zur Berechnung der Beschleunigungs- und Amplitudenfrequenzgänge wird die harmonische Analyse angewendet. Um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse aus der experimentellen Modalanalyse mit den numerisch ermittelten Beschleunigungsfrequenzgängen zu gewährleisten, wird eine Anregungskraft $F_{AY} = 10$ N in Y-Richtung modelliert. Diese numerisch ermittelten Frequenzgänge besitzen eine Auflösung von $f_I = 1$ Hz. Um später die reduzierten niedrigdimensionalen Modelle mit den hochdimensionalen Modellen vergleichen zu können, wird die numerisch aufwändigere Lösungsmethode mit vollen Matrizen durchgeführt. Außerdem wird die Bequemlichkeitshypothese aus der Gleichung 2-2 verwendet, um eine Vergleichbarkeit mit der Dämpfungsmodellierung zu gewährleisten. Dazu werden die massen- und steifigkeitsproportionalen Vorfaktoren auf $\alpha = 15$ und $\beta = 0{,}000025$ gesetzt. Dies entspricht einen Dämpfungsgrad von $\vartheta \approx 0{,}01$ im Frequenzbereich von $f_{BU} = 0$ Hz bis $f_{BO} = 500$ Hz.

Zum Aufbau des unstrukturierten FE-Netzes der einzelnen Strukturelemente mit dem Programm ANSYS Meshing des Herstellers ANSYS INC. werden die 4-Knoten-Tetraederelemente vom Typ Tet 4, die 5-Knoten-Pyramidenelemente vom Typ Pyr 5, die 6-Knoten-Keilelemente vom Typ Wed 6 und die 8-Knoten-Hexaederelemente vom Typ Hex 8 verwendet. Nur im Bereich der späteren Kopplung wird ein strukturiertes Netz erstellt. Mit einer Netzsensitivitätsanalyse wird die Mindestdichte von FE-Elementen ermittelt. Die Ergebnisse für fünf ausgesuchte Eigenmoden sind in Bild 4-27 dargestellt.





Numerische Modalanalyse

X-Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlittenposition:	$P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition:	$P_{SZ} = 0$ mm
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Elementenanzahl:	Variation

Bild 4-27: Netzsensitivitätsanalyse

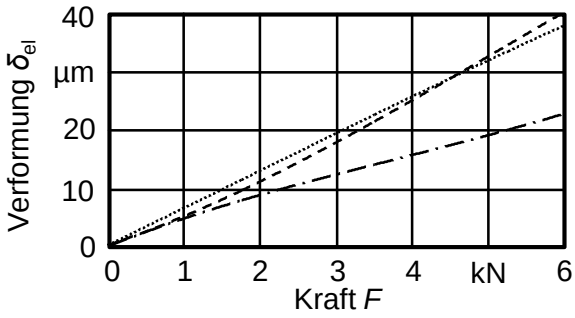
Am Bild 4-27 ist ersichtlich, dass ab einer Elementenanzahl von $n_{EA} = 500.000$ Elemente keine bedeutende Änderung der numerischen Ergebnisse bezüglich der dynamischen Eigenschaften existiert. Die Netzqualität schwankt bei einer Elementenanzahl von $n_{EA} = 20.000$ bis $n_{EA} = 500.000$ stark zwischen $n_{EQ} = 0{,}49$ und $n_{EQ} = 0{,}72$ mit einer Standardabweichung von $\sigma_E = 0{,}15$ bis $\sigma_E = 0{,}25$. Die Netzqualität eines FE-Netzes, das für eine Strukturanalyse verwendet wird, soll zwischen $n_{EQ} = 0{,}7$ und $n_{EQ} = 1$ liegen. Die Netzqualität der verwendeten Modelle mit einer Elementenanzahl von über $n_{EA} > 500.000$ Elementen schwankt zwischen $n_{EQ} = 0{,}72$ und $n_{EQ} = 0{,}84$ mit einer Standardabweichung von $\sigma_E = 0{,}09$ bis $\sigma_E = 0{,}15$. Die Netzqualität ist somit ausreichend. Die Praxis hat gezeigt, dass eine Vernetzung ohne Elementmittelknoten die numerischen Probleme bei der späteren Modellordnungsreduktion massiv verringert. Die Elementmittelknoten haben keinen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse der dynamischen Eigenschaften, sondern beeinflussen lediglich das Ergebnis einer Spannungsanalyse. Daher ist diese Einstellung legitim.

4.4.2 Modellierung der Koppel- und Schnittstellen

Aus Unterkapitel 2.3 ist bekannt, dass die Koppelstellen der Strukturelemente das dynamische Werkzeugmaschinenverhalten im hohen Maße bestimmen. Außerdem ist eine Relativbewegung der Strukturelemente nur an diesen Koppelstellen möglich. Daher hat die Modellierung der Koppelstellen hier einen hohen Stellenwert.

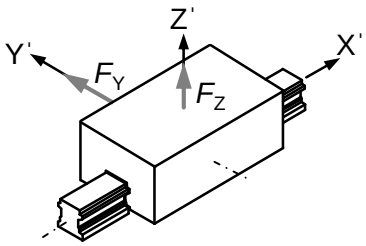
Die Kugelschienenführungen der Größe 15, die im Kugelschienenführungstisch TKK 15-155 der X-Achse und der Z-Achse verwendet werden, bestehen aus Stahl. Diese Schienenführungssysteme gehören der Genauigkeitsklasse XP und der Vorspannklasse 0,02 C an. Die Bezeichnung der Vorspannklasse gibt die prozentuale Vorspannung an. Somit hat das Schienenführungssystem eine zweiprozentige Vorspannung bezogen auf die dynamische Tragzahl C_{dyn}. Die Vorspannung beeinflusst die Steifigkeit und die Lebensdauer der Kugelschienenführung. Zur Modellierung des Kontakts zwischen Führungsschiene und Führungswagen wird eine Kopplung über die Zwangsbedingung MPC realisiert. Zwischen diesen jeweiligen Elementen wird für jede Richtung ein Feder-Dämpfer-Element verwendet, wie schematisch in Bild 2-5 e) illustriert. Im FE-Programm ANSYS kommt der Verbindungstyp „Buchse“ oder auf Englisch „bushing“ zur Anwendung, welcher ein räumliches Feder-Dämpfer-Element darstellt, um das Steifigkeits- und Dämpfungsverhalten abzubilden. Das nichtlineare Steifigkeitsverhalten stellt der Hersteller BOSCH REXROTH, Lohr am Main, als Kraft-Verformungs-Diagramm und als Approximationspolynom zur Verfügung. In Bild 4-28 werden die Verformungen in Kraftrichtung aufgrund einer äußeren Krafteinwirkung und die zugehörigen Terme des Approximationspolynoms für eine Kugelschienenführung der Größe 15 gezeigt.

Im Gegensatz zur Kugelschienenführung der Größe 20 werden für diesen Typ Seitens des Herstellers keine Informationen über die elastischen Winkelverformungen zur Verfügung gestellt. Deshalb müssen die Winkelverformungen für den Typ 15 geschätzt werden. Dazu wird die halbe elastische Winkelverformung des Typs 20, siehe Bild 4-29, zugrunde gelegt.



Legende:
- F_Y
- F_Z (Zug)
- F_Z (Druck)

Kugelschienenführung
Größe 15

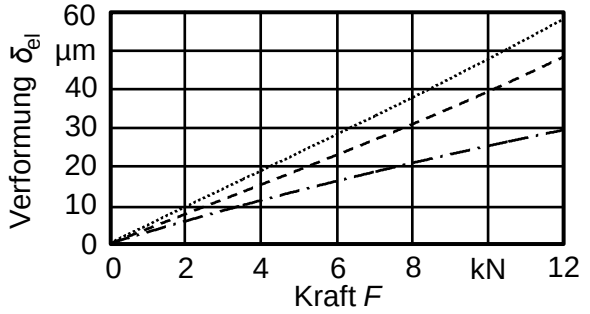


Approximationspolynom: $\delta_{el}(F) = a_i \cdot F^3 + b_i \cdot F^2 + c_i \cdot F + d_i$

	F_Y	F_Z (Zug)	F_Z (Druck)
Gültig bis	15 kN	15 kN	15 kN
Variable a_i	$-1{,}144 \cdot 10^{-11}$	$-3{,}942 \cdot 10^{-11}$	$4{,}664 \cdot 10^{-11}$
Variable b_i	$6{,}803 \cdot 10^{-8}$	$6{,}290 \cdot 10^{-7}$	$-5{,}304 \cdot 10^{-7}$
Variable c_i	$6{,}526 \cdot 10^{-3}$	$4{,}564 \cdot 10^{-3}$	$5{,}430 \cdot 10^{-3}$
Variable d_i	$-9{,}168 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}168 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}168 \cdot 10^{-2}$

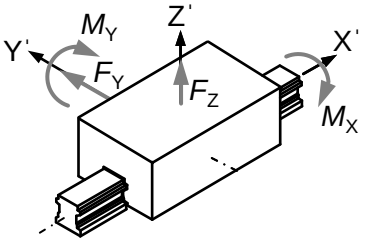
Bild 4-28: Elastische Verformung in Abhängigkeit von der Belastung des Kugelschienenführungswagens der Größe 15 mit einer Vorspannung von 2 % und der Genauigkeitsklasse XP

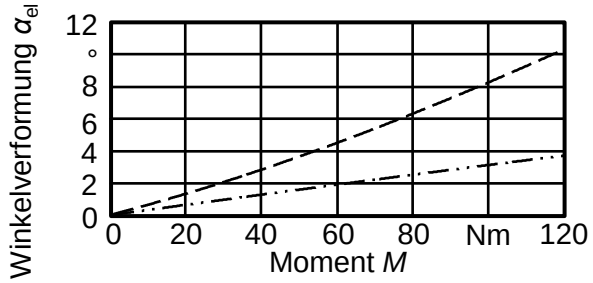
Die Y-Achse verfügt über zwei Kugelschienenführungen der Größe 20. Diese bestehen ebenfalls aus Stahl und besitzen die Genauigkeitsklasse XP sowie eine Vorspannung von 2 % von der Tragzahl C_{dyn}, wie schon die X- und Z-Achse. Die zugehörigen Kraft-Verformungs-Diagramme und Approximationspolynome sind in Bild 4-29 dargestellt.



Legende:
- F_Y
- F_Z (Zug)
- F_Z (Druck)
- M_X
- M_Y

Kugelschienenführung
Größe 20





Approximationspolynom:

$\delta_{el}(F) = a_i \cdot F^3 + b_i \cdot F^2 + c_i \cdot F$

$\alpha_{el}(M) = a_i \cdot M^3 + b_i \cdot M^2 + c_i \cdot M$

	F_Y	F_Z (Zug)	F_Z (Druck)	M_X	M_Y
Gültig bis	15 kN	15 kN	15 kN	200 Nm	220 Nm
Variable a_i	$3{,}26 \cdot 10^{-13}$	$3{,}82 \cdot 10^{-12}$	$9{,}73 \cdot 10^{-13}$	$1{,}87 \cdot 10^{-7}$	$2{,}26 \cdot 10^{-7}$
Variable b_i	$-2{,}62 \cdot 10^{-8}$	$-3{,}47 \cdot 10^{-8}$	$-5{,}84 \cdot 10^{-8}$	$3{,}87 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}04 \cdot 10^{-4}$
Variable c_i	$4{,}82 \cdot 10^{-3}$	$3{,}93 \cdot 10^{-3}$	$3{,}03 \cdot 10^{-3}$	$9{,}06 \cdot 10^{-2}$	$4{,}23 \cdot 10^{-2}$

Bild 4-29: Elastische Verformung in Abhängigkeit von der Belastung des Kugelschienenführungswagens der Größe 20 mit einer Vorspannung von 2 % und der Genauigkeitsklasse XP

Die Dämpfungseigenschaften dagegen können vom Hersteller nicht geliefert werden, weil diese Eigenschaften unter anderem durch die Montage, die Schmierbedingungen und die Vorspannung massiv beeinflusst werden [ABE95].

Wie in Bild 4-26 b) gezeigt, werden die Geometrien der Führungswagen und der Linearführungen im FE-Modell nicht berücksichtigt. Stattdessen wird die vernachlässigte Steifigkeit bei der Modellierung der Kugelschienenführungswagen mittels MPC-Elementen und mit Feder-Dämpferelementen verwirklicht, wie in Bild 2-6 c) zu sehen ist. In der Praxis werden diese Kopplungselemente in ANSYS, wie schon genannt, mit dem Verbindungstyp der sogenannten „Buchse“ realisiert. Die Steifigkeitswerte werden in ANSYS für die jeweilige Richtung eingetragen. Für die spätere Kopplung der sich relativ zueinander bewegenden Komponenten werden zusätzliche Anforderungen an das Oberflächennetz entlang der Führungsschiene gestellt. Wie im Kapitel 2 zum Stand der Technik aufgeführt, modelliert SIEDL [SIE08] die bewegte Last als Gewichtung mehrerer Knoten über eine quadratische Gewichtungsfunktion. Die zugehörige Berechnung wird deutlich vereinfacht, wenn ein äquidistantes Netz vorliegt.

Die komplexe geometrische Struktur der Kugelgewindespindel wird praxiserprobt im FE-Modell als Zylinder mit dem Nenndurchmesser $d_{S0} = 20$ mm approximiert. Die zugehörige axiale Steifigkeit der Kugelgewindespindel k_{Sa} wird vom Hersteller für die Modellierung zur Verfügung gestellt, die Torsionssteifigkeit k_{St} dagegen wird nicht geliefert. Ein parametrisches FE-Modell zur Berechnung der Axial- und Torsionssteifigkeit wurde von DADALAU [DAD10a] entwickelt. Die Werte des Modells werden verwendet und stimmen mit den Ergebnissen der analytischen Gleichung aus der Norm DIN ISO 3408-4 [DIN3408] überein. Die Gewindespindel mit dem Nenndurchmesser $d_{S0} = 20$ mm und der Nennsteigung $P_{h0} = 5$ mm besitzt bezogen auf 1 m Spindellänge die axiale Steifigkeit von $k_{Sa} = 5{,}3 \cdot 10^7$ N·m^{-1}, die Torsionssteifigkeit für diese Gewindespindel beträgt $k_{St} = 771{,}49$ Nm·rad^{-1} [DAD10a]. Die axiale Steifigkeit der Gewindemutter k_{Ma} ist abhängig von der Vorspannung. Die verwendete Gewindemutter hat eine Vorspannung von 8 % und besitzt somit nach Herstellerangaben eine axiale Steifigkeit von $k_{Ma} = 2{,}6 \cdot 10^8$ N·m^{-1}. Die zugehörige Torsionssteifigkeit k_{Mt} ist dagegen nicht angegeben. In der Praxis ist es geläufig, die Torsionssteifigkeit der Kugelgewindemutter k_{Mt} im FE-Modell sehr hoch anzusetzen, da diese äußerst geringen Einfluss auf die Dynamik des Kugelgewindetriebs hat. Diese Vereinfachung ist allerdings nur zulässig, wenn die translatorische Bewegung aufgrund der Torsion nicht berücksichtigt werden muss. Zusätzlich wird die Einschränkung getroffen, dass die radialen Kräfte von den Kugelschienenführungen und nicht von der Kugelgewindemutter aufgenommen werden.

Für die Kopplung des Kugelgewindetriebs mit der Umgebung gilt das gleiche Vorgehen wie für die Kugelschienenführung. Auch hier wird die Geometrie der Gewindemutter und der jeweiligen Lager vernachlässigt und stattdessen mit dem Verbindungstyp „Buchse“ modelliert. Zusätzlich müssen bei der Modellierung für die FE-Simulation der Kontakt zwischen der Spindelmutter und der Spindel sowie die Steifigkeit der Spindel der aktuellen Position angepasst werden. Für die spätere Verwendung der Modelle für die MOR ist hier ebenfalls die Verwendung äquidistanter Netze vorteilhaft.

4.4.3 Definition der Teilsysteme

Um die Pose der Werkzeugmaschinenachsen in der Simulation in Kapitel 6 berücksichtigen zu können, muss das mechanische System in seine beweglichen Baugruppen zerteilt werden. Dazu bieten sich eine Aufteilung anhand der Bauelemente an, in denen die Relativbewegung stattfindet. Diese Bauelemente haben in der Regel die Aufgabe, die sich relativ zueinander bewegenden Körper zu führen und die Kraftübertragung orthogonal zur Bewegungsrichtung zu gewährleisten. Zusätzlich müssen die Bauelemente berücksichtigt werden, deren Aufgabe die Kraftübertragung in Bewegungsrichtung ist. Am Beispiel der Mikrofräsmaschine erfüllen die Bauelemente der Führungsschienen und der Kugelgewindespindeln die oben genannte Aufgabe. Das System wird in vier Teilsysteme unterteilt, wie es in Bild 4-30 schematisch dargestellt ist.

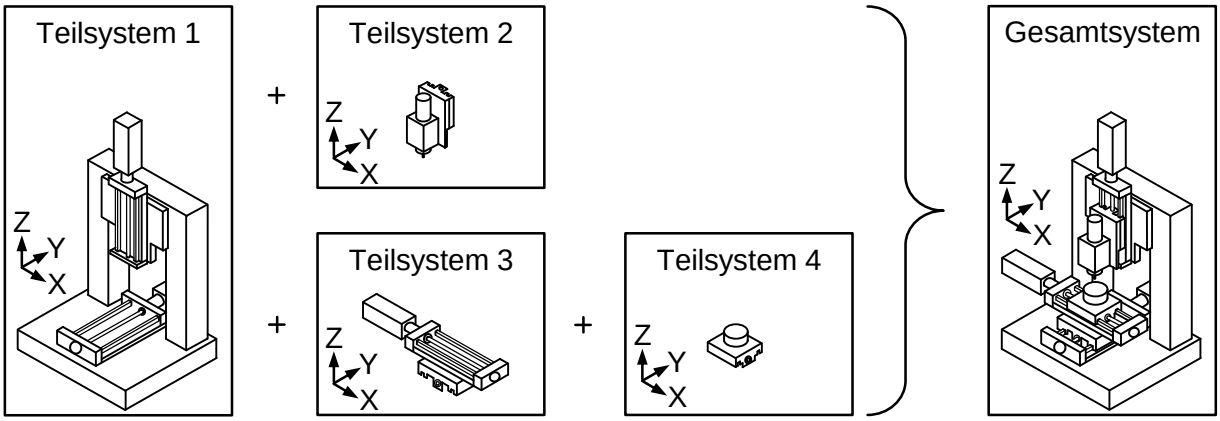


Bild 4-30: Prinzipdarstellung des mechanischen Gesamtmodells der Mikrofräsmaschine

Das erste Teilsystem besteht aus dem Granittisch mit den zugehörigen sechs Aufstellelementen, wie es in Unterkapitel 4.2 beschrieben wird, wobei diese in Bild 4-30 nicht abgebildet werden. Zusätzlich besteht das Teilsystem 1 aus dem Granitportal, dem Schienenführungsbett der Y-Achsen inklusive Kugelgewindespindel und der Antriebseinheit. Außerdem sind das Schienenführungsbett der Z-Achse inklusive Kugelgewindespindel, die Antriebseinheit sowie die Adapterplatte zwischen Z-Achse und Granitportal im Teilsystem 1 inbegriffen. Das Teilsystem 2 besteht aus dem Schlitten der Z-Achse, der Adapterplatte zwischen Z-Schlitten und Frässpindel sowie der Frässpindel selbst. Das Teilsystem 3 beinhaltet den Schlitten der Y-Achse sowie das Schienenführungsbett der X-Achse inklusive deren Antriebseinheit. Der Schlitten der X-Achse bildet inklusive Werkstückspannsystem das Teilsystem 4. Die Teilsysteme 2 und 4 sind stark vereinfacht. Beim Werkstückspannsystem wird lediglich die Masse korrekt berücksichtigt, die Steifigkeit wurde an die Messungen angepasst. Die Spindel im Teilsystem 2 bildet nur die Masse und das Steifigkeitsverhalten in den translatorischen Richtungen korrekt ab. Die rotationsdynamischen Eigenschaften werden nicht berücksichtigt.

Die zugehörigen numerischen Kennwerte und Eigenschaften der FE-Modelle sind in Tabelle 4-6 aufgelistet. Durch die Zerteilung des Gesamtsystems sind die Teilsysteme 2, 3 und 4 nicht mehr gefesselt. Deshalb besitzen diese Teilsysteme im Gegensatz zum Teilsystem 1 zusätzlich sechs Starrkörpermoden. Die Netzqualität aller vier Teilsysteme liegt zwischen $n_{EQ} = 0{,}7$ und $n_{EQ} = 1$, so wie es für die Strukturanalyse empfohlen und in Unterkapitel 4.4.1 untersucht wird. Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass mit der Anzahl der Dimension N die Konditionszahl K_Z der Matrizen ansteigt. Hinter dem Begriff „Kondition einer Matrix“ verbirgt sich die Matrixeigenschaft, dass sie nahezu singulär ist oder dass sich die Matrixeinträge um mehrere Größenordnungen voneinander unterscheiden. Die Gleichungssysteme mit schlecht

konditionierten Matrizen reagieren empfindlich auf geringe Änderungen auf der rechten Seite der Gleichung [SCW09]. Somit beschreibt die Konditionszahl K_Z die Sensitivität der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn dafür Systemmatrizen invertiert werden müssen.

Tabelle 4-6: Eigenschaften der FE-Modelle der jeweiligen Teilsysteme

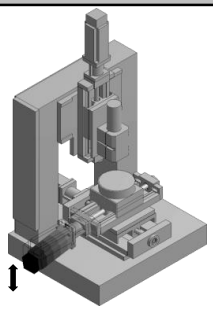
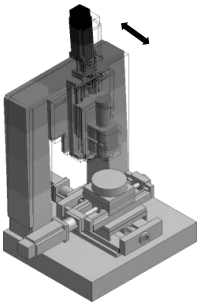
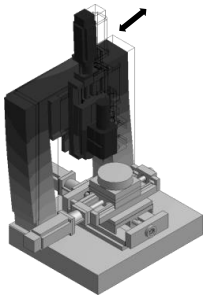
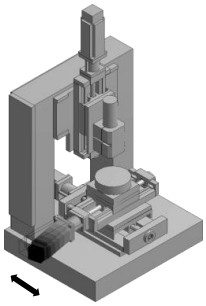
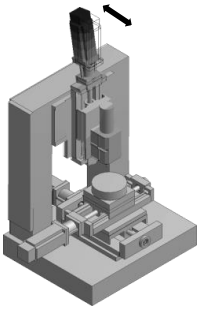
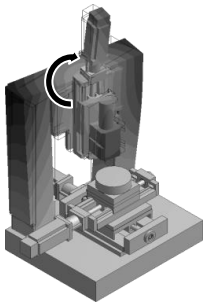
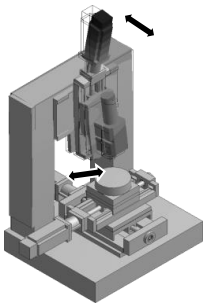
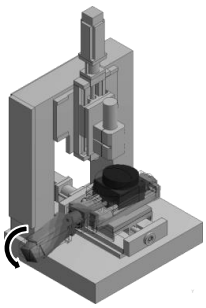
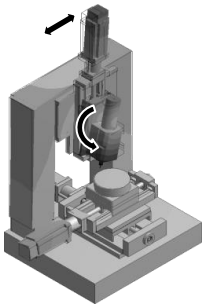
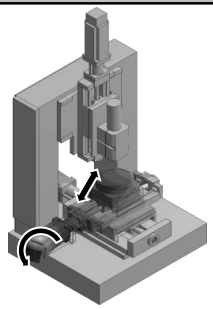
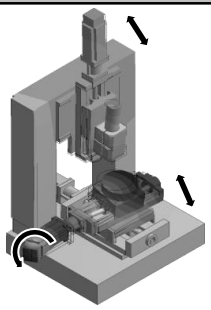
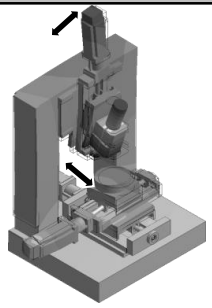
Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4
Knotenanzahl N_{KA}	60.662	7.236	25.089	4.413
Elementenanzahl n_{EA}	180.414	30.963	107.863	20.101
Dimension N_{FHG}	1.243.265	21.708	70.669	13.062
Gefesselt	Ja	Nein	Nein	Nein
Mittelwert der Elementenqualität $\bar{n}_{EQ}$	0,759	0,801	0,797	0,795
Standardabweichung der Netzqualität σ_E	0,173	0,127	0,121	0,131
Einträge der Massenmatrix $N_{ME,M}$	5.276.538	177.399	1.408.932	93.050
Einträge der Dämpfungsmatrix $N_{ME,E}$	18.215.989	444.548	2.340.923	263.256
Einträge der Steifigkeitsmatrix $N_{ME,K}$	18.217.080	445.261	2.343.668	263.534
Konditionszahl der Massenmatrix $K_{Z,M}$	∞	$3{,}098 \cdot 10^{7}$	∞	$6{,}219 \cdot 10^{4}$
Konditionszahl der Dämpfungsmatrix $K_{Z,E}$	$6{,}057 \cdot 10^{24}$	$8{,}495 \cdot 10^{15}$	$3{,}344 \cdot 10^{28}$	$6{,}049 \cdot 10^{8}$
Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix $K_{Z,K}$	$4{,}181 \cdot 10^{28}$	$5{,}567 \cdot 10^{18}$	$3{,}339 \cdot 10^{28}$	$1{,}701 \cdot 10^{22}$
Spektralnorm der Massenmatrix $N_{2,M}$	1,404	0,021	0,175	0,049
Spektralnorm der Dämpfungsmatrix $N_{2,K}$	$4{,}384 \cdot 10^{17}$	$5{,}241 \cdot 10^{7}$	$2{,}5 \cdot 10^{15}$	$5{,}288 \cdot 10^{6}$
Spektralnorm der Steifigkeitsmatrix $N_{2,K}$	$1 \cdot 10^{20}$	$3{,}043 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{20}$	$2{,}115 \cdot 10^{11}$
Bandbreite der Massenmatrix $B_{W,M}$	66.623	12.687	95.333	26.123
Bandbreite der Dämpfungsmatrix $B_{W,K}$	66.623	12.687	95.333	26.123
Bandbreite der Steifigkeitsmatrix $B_{W,K}$	66.623	12.687	95.333	26.123

Obwohl die Teilsysteme 2 und 4 ungefesselt sind und damit die Matrizen singulär werden, ist die Konditionszahl K_Z nicht unendlich. Der Grund dafür ist, dass das Modell in ANSYS im Hintergrund mit schwachen Federn ausstattet, um das System numerisch lösen zu können. Die Bandbreite der Systemmatrizen ist nicht abhängig von der Systemgröße, sondern von der geometrischen Struktur und vom Kopplungszustand des Systems. Daher ist die Bandbreite B_W des Teilsystems 3 höher als die des Teilsystems 1, obwohl dieses System 17-mal mehr Freiheitsgrade besitzt. Die Bandbreite B_W wird nach Gleichung 5-25 berechnet. Der Aufwand der numerischen Untersuchungen ist abhängig von der Bandbreite B_W, der Spektralnorm N_2 und der Konditionszahl K_Z des Systems. Daher kann im Vorfeld nicht genau vorhergesagt werden, welchen zeitlichen Aufwand diese hochdimensionalen Systeme für die numerische Untersuchung benötigt. Diese Tatsache gilt auch für den Reduktionsvorgang selbst.

4.4.4 Positionsabhängige dynamische Eigenschaften

In Tabelle 4-7 sind die numerischen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenmoden der Versuchsmaschine dargestellt. Aufgrund des Rangabfalls bei der Determinantenbildung der Gleichung 2-6 sind nur Verformungsinformationen und keine absoluten Verlagerungen bekannt. Für eine bessere Übersichtlichkeit wird hier auf die Darstellung des Granittisches mit den zugehörigen Füßen verzichtet.

Tabelle 4-7: Ergebnisse der numerischen Modalanalyse der Fräsmaschine mit den Schlittenpositionen des Kreuztisches P_{SX} = 0 mm, P_{SY} = 0 mm und der Z-Schlittenposition P_{SZ} = 0 mm

Mode	Eigenform	Mode	Eigenform	Mode	Eigenform
Mode 1 66,93 Hz		Mode 2 70 Hz		Mode 3 115,67 Hz	
Mode	Eigenform	Mode	Eigenform	Mode	Eigenform
Mode 4 143,78 Hz		Mode 5 163,31 Hz		Mode 6 211,65 Hz	
Mode	Eigenform	Mode	Eigenform	Mode	Eigenform
Mode 7 264,87 Hz		Mode 8 308,26 Hz		Mode 9 399,59 Hz	
Mode	Eigenform	Mode	Eigenform	Mode	Eigenform
Mode 11 449,58 Hz		Mode 11 492,81 Hz		Mode 12 494,72 Hz	
keine Verformung					hohe Verformung

Das FE-Modell besteht aus n_{EA} = 771.032 Elementen. Die jeweiligen Schlitten sind in der Nullstellung. Dieses FE-Modell wird auch für die folgende harmonische Analyse verwendet, deren Ergebnisse in Bild 4-32 und Bild 4-35 dargestellt werden.

Zur Visualisierung der Modellgenauigkeit des gesamten Maschinenmodells werden die Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ für den Vergleich der für die Messung relevanten Auswertepunkte dargestellt. Daher werden zusätzlich zu den numerisch ermittelten Beschleunigungsfrequenzgängen die messtechnisch ermittelten Frequenzgänge in Form von Messwertbändern aus dem Unterkapitel 4.3.3 dargestellt. Für die unterschiedlichen Schlittenpositionen der Achsen ist eine Neukontaktierung und Neuvernetzung notwendig. Deshalb unterscheiden sich die Elementenanzahlen der einzelnen FE-Modelle geringfügig voneinander. Die dargestellten Amplitudenfrequenzgänge wurden mit 500 Stützpunkten berechnet. Dies entspricht einem Frequenzinkrement von f_I = 1 Hz. Somit wird die Gleichung 2-12 500-mal für jeweils einen Frequenzstützpunkt zur Berechnung des Frequenzgangs durchgeführt. Demzufolge ist die Ermittlung von Frequenzgängen mit einem höheren numerischen und zeitlichen Aufwand verbunden.

Zunächst wird die Modellgenauigkeit des FE-Modells demonstriert und die Positionsabhängigkeit des dynamischen Verhaltens der Mikrofräsmaschine für die unterschiedlichen Schlittenpositionen gezeigt. Zuerst wird die Schlittenpositionsabhängigkeit der Z-Achse und nachfolgend der X-Achse präsentiert. In Bild 4-31 ist der Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ vom Auswertepunkt 8 in Y-Richtung zu sehen. Für diesen Frequenzgang befindet sich der Z-Schlitten in der oberen Position P_{SZ} = 45 mm. Die Anregungskraft beträgt auch hier F_{AY} = 10 N und wirkt ebenfalls in die Y-Richtung, wie im Experiment. Das zugehörige FE-Modell besitzt n_{EA} = 771.014 Elemente.

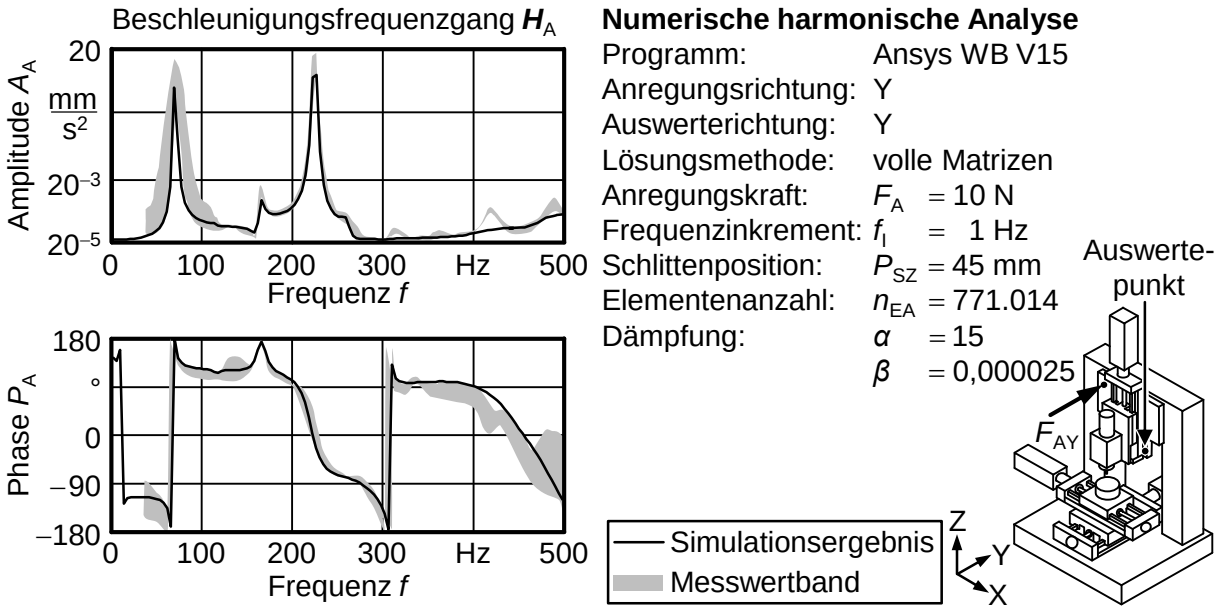


Bild 4-31: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 8 in Y-Richtung für die obere Z-Schlittenposition P_{SZ} = 45 mm

Am Frequenzgang ist zu erkennen, dass die volle Höhe der ersten Amplitudenspitze bei der ersten Eigenfrequenz von f_{FE} = 68 Hz hier nicht vollständig erreicht wird. Stattdessen werden die Amplituden der zweiten Eigenfrequenz bei f_{FE} = 170 Hz und der dritten Eigenfrequenz bei

$f_{FE} = 222$ Hz gut wiedergegeben. Der globale Verlauf des numerischen Phasengangs entspricht dem gemessenen Phasenverlauf. Diese hohe Übereinstimmung ist dadurch begründet, dass die modellierte Dämpfung an den Dämpfungsmesswerten von den unterschiedlichen Messpositionen am Portal anpasst sind, wie in Unterkapitel 4.3.4 dargestellt.

In Bild 4-32 ist der Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ des Auswertepunkts 8 in Y-Richtung für die mittlere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = 0$ mm dargestellt. Das verwendete Modell hat $n_{EA} = 771.032$ Elemente. Für das hier gezeigte Bodediagramm sowie die Bodediagramme in Bild 4-35 wird das gleiche FE-Modell verwendet. Die Eigenfrequenzen werden mit den lokalen Maxima bestimmt. Die ermittelten Eigenfrequenzen stimmen in Ihrer Position zwar mit den gemessenen überein, aber die Amplitudenhöhen werden vom numerischen Modell unterschätzt. Die erste Eigenfrequenz befindet sich bei $f_{FE} = 70$ Hz, die zweite Eigenfrequenz liegt um $f_\Delta = 1$ Hz niedriger als die gemessene Eigenfrequenz bei $f_{FE} = 167$ Hz, die dritte Eigenfrequenz nimmt den Wert $f_{FE} = 224$ Hz an. Der berechnete Phasenverlauf bis ca. $f_{FE} \approx 250$ Hz entspricht dem gemessenen Phasenverlauf. Die Schwankungen ab $f_{FE} = 250$ Hz des gemessenen Phasengangs werden vom numerischen Ersatzmodell ungenügend abgebildet, wobei jedoch die Tendenz des Phasengangs sichtbar ist.

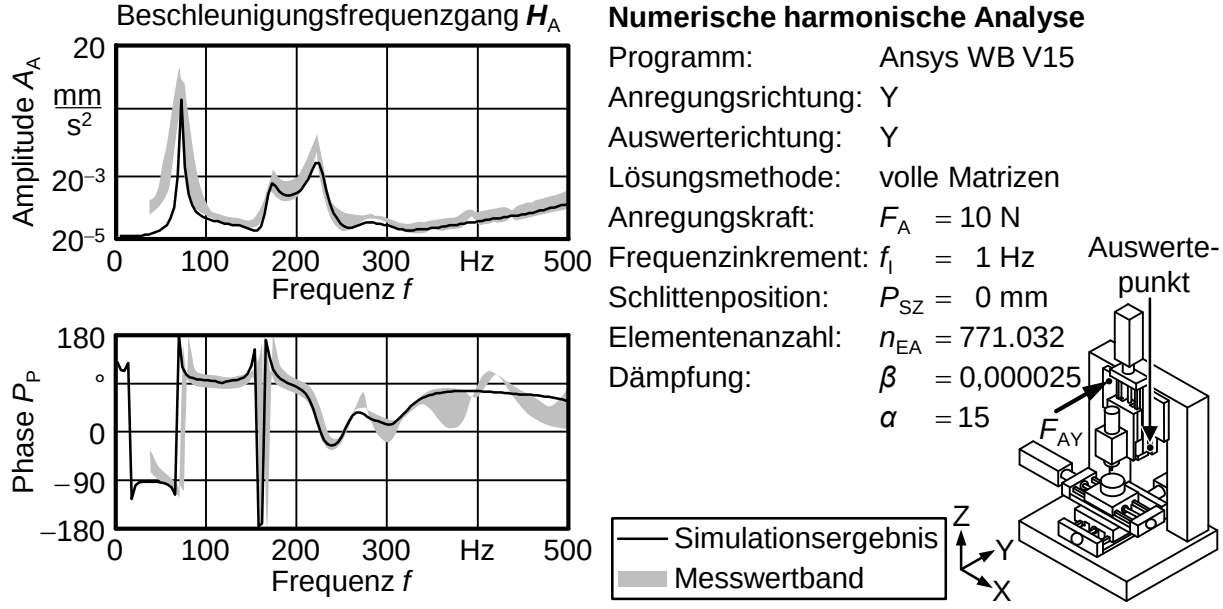
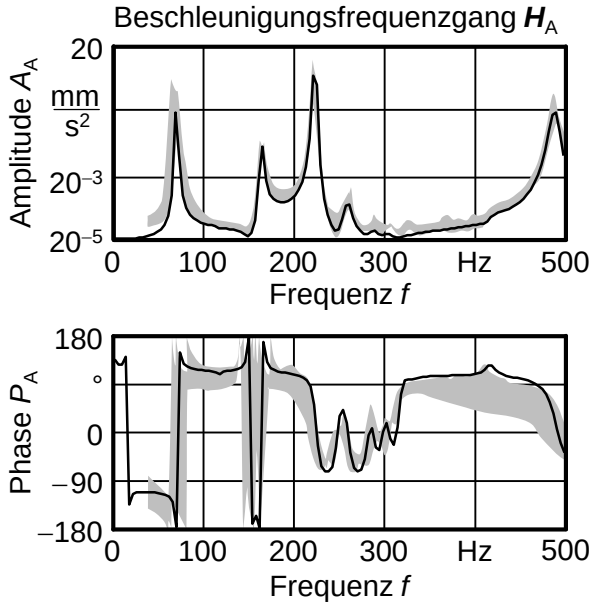


Bild 4-32: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 8 in Y-Richtung für die mittlere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = 0$ mm

Das Bodediagramm für Auswertepunkt 8 in Y-Richtung für die untere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = -45$ mm wird in Bild 4-33 gezeigt. Zur Berechnung des Beschleunigungsfrequenzgangs $\boldsymbol{H}_A$ wird ein FE-Modell mit $n_{EA} = 770.992$ Elementen verwendet, die Anregungskraft $F_{AY} = 10$ N wirkt in Y-Richtung. Die Position der ersten berechneten Eigenfrequenz von $f_{FE} = 71$ Hz entspricht mit einer Abweichung von $f_\Delta = 1$ Hz der gemessenen, wobei die Amplitudenhöhe geringer ist. Die zweite Eigenfrequenz von $f_{FE} = 166$ Hz und die dritte Eigenfrequenz von $f_{FE} = 226$ Hz werden in ihrer Amplitudenhöhe und Position passend wiedergegeben. Im Gegensatz zu den zwei vorherigen Z-Schlittenpositionen entstehen hier eine vierte Eigenfrequenz von $f_{FE} = 259$ Hz und eine fünfte Eigenfrequenz von $f_{FE} = 494$ Hz. Die gemessenen Amplitudenüberhöhungen zwischen $f_{FE} = 290$ Hz und $f_{FE} = 400$ Hz werden vom numerischen Modell nicht wiedergegeben, obwohl der Phasenverlauf eine sehr hohe Übereinstimmung mit

dem gemessenen besitzt. In diesem Frequenzgang wird die Positionsabhängigkeit des Z-Schlittens durch das Auftauchen der zusätzlichen Amplitudenspitzen deutlich.



Numerische harmonische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	F_A = 10 N
Frequenzinkrement:	f_I = 1 Hz
Schlittenposition:	$P_{SZ} = -45$ mm
Elementenanzahl:	$n_{EA} = 770.992$
Dämpfung:	β = 0,000025
	α = 15

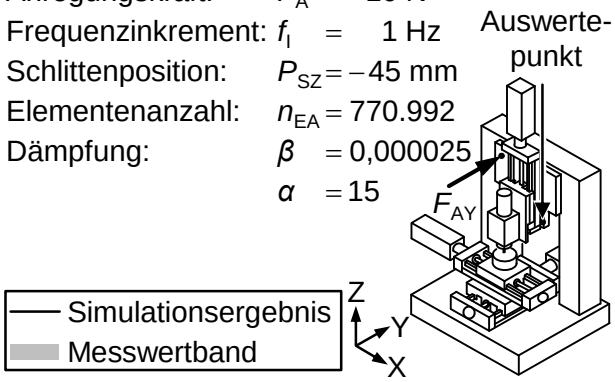
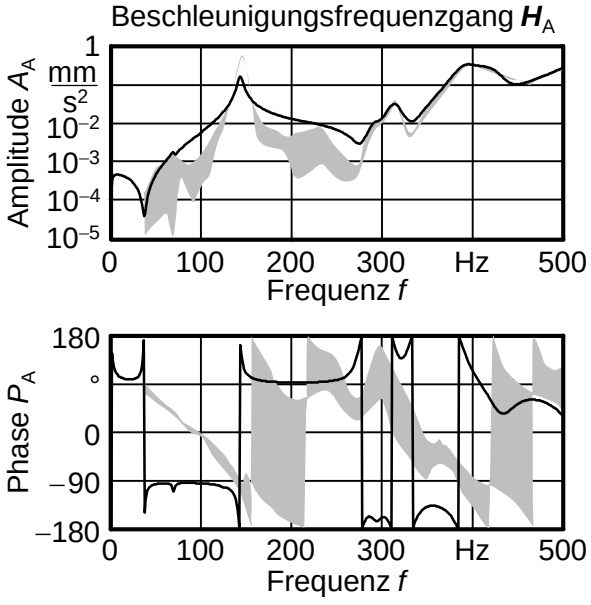


Bild 4-33: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 8 in Y-Richtung für die untere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = -45$ mm

Im Folgenden wird die Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens bezüglich der X-Schlittenpositionsänderungen am numerischen Modell dargestellt. Zusätzlich ändert sich die Position der Krafteinleitung in Bezug auf das Gesamtsystem, da die Kraft am bewegten Werkstückspannsystem auf dem X-Schlitten eingeleitet wird. Die Bodediagramme werden am Auswertepunkt 9 ermittelt; dieser Punkt befindet sich am Motor der X-Achse. An diesem Auswertepunkt sind die Amplitudenauslenkungen erheblich geringer als am Auswertepunkt 8. Deshalb besitzen, wie schon genannt, die Messwertschwankungen hier einen höheren Einfluss.

Der Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ von Auswertepunkt 8 in Y-Richtung für die X-Schlittenposition $P_{SX} = 45$ mm wird in Bild 4-34 gezeigt. Die erste Amplitudenspitze befindet sich bei $f_{FE} = 143$ Hz und entspricht $f_\Delta = 1$ Hz Abweichung von der gemessenen Amplitudenspitzenposition. Die Amplitudenhöhe wird vom FE-Modell geringer wiedergegeben. Die zweite Amplitudenspitze befindet sich bei $f_{FE} = 314$ Hz und die dritte befindet sich bei $f_{FE} = 397$ Hz. Die Amplitudenhöhe wird mit hoher Genauigkeit abgebildet. Der berechnete Phasenverlauf entspricht nicht dem gemessenen Phasenverlauf. Der Phasenverlauf wird maßgeblich durch die Modellierung der Dämpfung beeinflusst. Die Dämpfung wurde messtechnisch am Portal ermittelt und im Modell dementsprechend angepasst. Dadurch ergeben sich an den anderen Auswertepunkten höhere Abweichungen aufgrund der inhomogenen Dämpfungsverteilung im System. Mit der Modellierung von diskreten Dämpfungselementen, kann der numerische Phasenverlauf an den gemessenen angepasst werden. Insbesondere bis ca. $f \approx 150$ Hz ist zu erkennen, dass die Dämpfung zu gering ist. In diesem Frequenzbereich und an diesem Auswertepunkt haben die Kugelschienenführungssysteme einen hohen Einfluss auf die Dämpfung. Aus der Literatur ist bekannt, dass alleine die Kugelschienenführungssysteme einen Dämpfungsgrad von $\vartheta = 0{,}01$ bis $\vartheta = 2$ aufweisen können [ALB95, KUN13]. Für eine höhere Approximation des Modells im Phasenverlauf müsste also die Dämpfung angepasst werden. Da aber

der spätere Vergleich des FE-Modells mit dem reduzierten Modell im Fokus steht, wird hier darauf verzichtet und nicht mit zusätzlichen diskreten Dämpfungselementen gearbeitet.



Numerische harmonische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	$F_A = 10$ N
Frequenzinkrement:	$f_I = 1$ Hz
Schlittenposition:	$P_{SX} = 45$ mm
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$
Elementenanzahl:	$n_{EA} = 772.001$

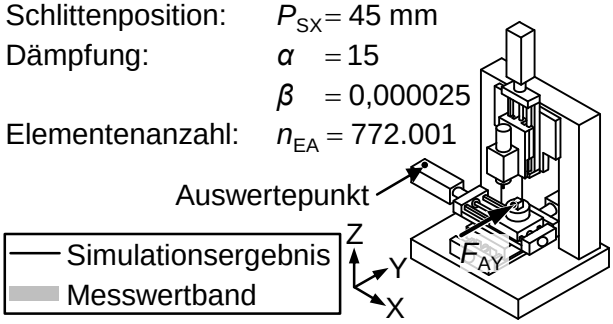
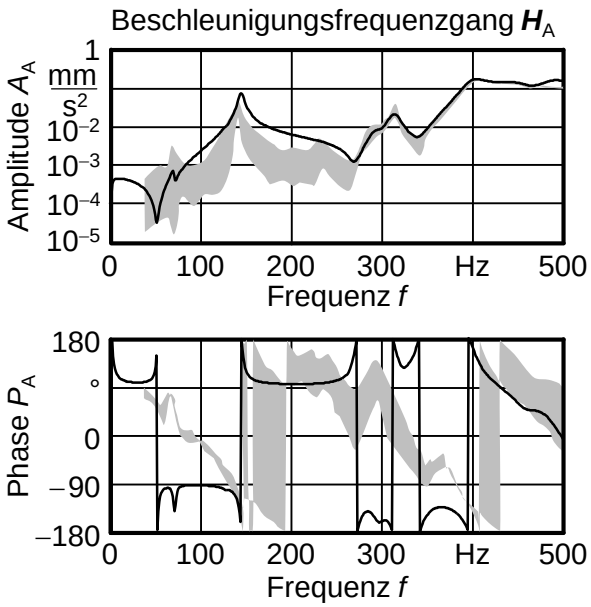


Bild 4-34: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 9 in Y-Richtung für die X-Schlittenposition $P_{SX} = 45$ mm

In Bild 4-35 wird der Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung für die mittlere X-Schlittenposition $P_{SX} = 0$ mm bei einer Anregungskraft $F_{AY} = 10$ N in Y-Richtung abgebildet. Die Eigenfrequenz bei $f_{FE} = 146$ Hz besitzt eine Abweichung gegenüber der gemessenen Eigenfrequenz von $f_\Delta = 2$ Hz und wird in der Amplitude zu hoch abgebildet. Die dritte Eigenfrequenz liegt bei $f_{FE} = 314$ Hz und die vierte Eigenfrequenz von $f_{FE} = 404$ Hz ist um $f_\Delta = 11$ Hz erhöht gegenüber dem Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ an der X-Schlittenposition $P_{SX} = 45$ mm. Auch hier wird der Phasenverlauf durch das numerische Modell nicht korrekt wiedergegeben.



Numerische harmonische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	$F_A = 10$ N
Frequenzinkrement:	$f_I = 1$ Hz
Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$
Elementenanzahl:	$n_{EA} = 771.032$

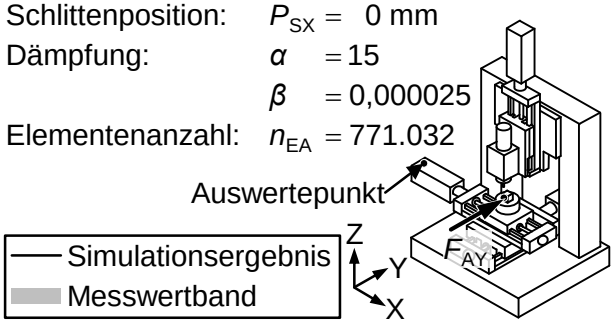


Bild 4-35: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 9 in Y-Richtung für die mittlere X-Schlittenposition von $P_{SX} = 0$ mm

Der Beschleunigungsfrequenzgang $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung für die X-Schlittenposition $P_{SX} = -45$ mm wird in Bild 4-36 dargestellt. Das zugehörige FE-Modell besitzt $n_{EA} = 771.342$ Elemente. Auch hier ist die Anregungskraft in Y-Richtung $F_{AY} = 10$ N.

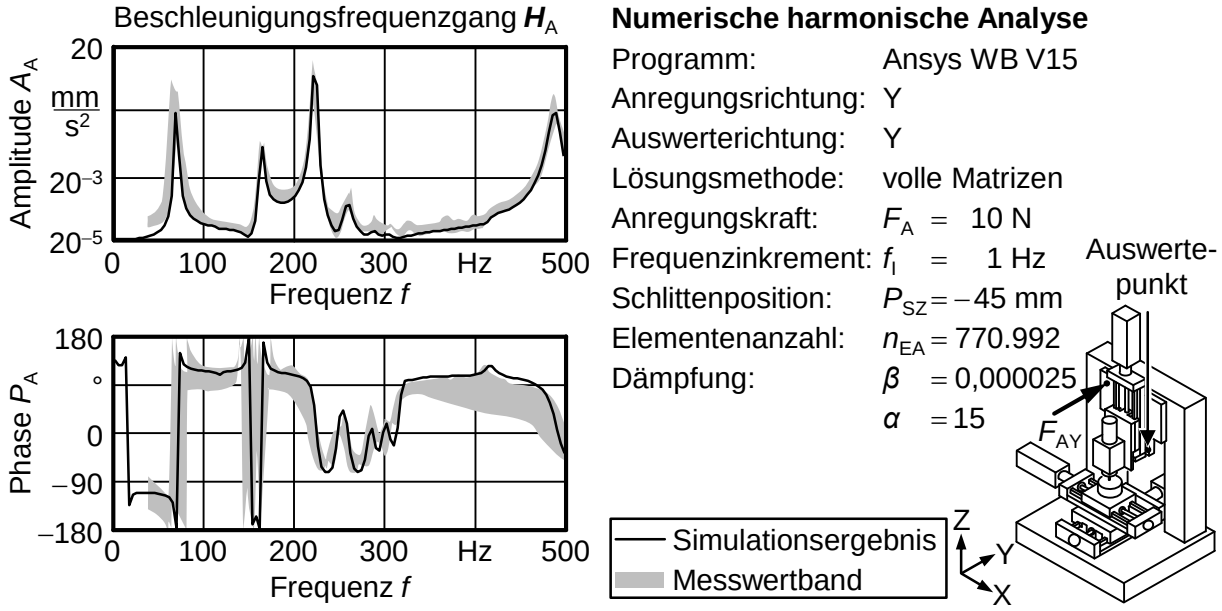


Bild 4-36: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 9 in Y-Richtung für die X-Schlittenposition von $P_{SX} = -45$ mm

Die erste Eigenfrequenz liegt bei $f_{FE} = 70$ Hz und die Zweite bei $f_{FE} = 144$ Hz. Die dritte Eigenfrequenz verringert sich um $f_\Delta = 5$ Hz auf $f_{FE} = 309$ Hz, die vierte Eigenfrequenz erhöht sich um $f_\Delta = 10$ Hz auf $f_{FE} = 414$ Hz. Der globale berechnete Phasenverlauf entspricht dem gemessenen Phasenverlauf für die Position $P_{SX} = -45$ mm eher als bei den beiden anderen Positionen des X-Schlittens von $P_{SX} = 45$ mm und $P_{SX} = 0$ mm. Gründe dafür sind die geringere effektive Wirklänge l_{eff} der Kugelgewindespindel, vergleiche Bild 2-7, sowie die geänderte Massenverteilung. Mit der kürzeren effektiven Wirklänge l_{eff} nimmt der Einfluss der Kugelgewindespindel ab und der umgebenden Strukturelemente zu. Die Versteifung aufgrund der geringeren effektiven Gewindespindellänge führt zu einer Verringerung der Relativbewegung in den Schienenführungssystemen. Deshalb ist die Dämpfungswirkung der Kugelschienenführungssysteme geringer und der Phasenverlauf verändert seinen charakteristischen Verlauf gegenüber den gemessenen Phasenverläufen in Bild 4-34 und Bild 4-35.

In Bild 4-37 ist das Ergebnis des numerisch berechneten Beschleunigungsfrequenzgangs $\boldsymbol{H}_A$ an Auswertepunkt 2 in Y-Richtung für die mittlere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = 0$ mm bis $f = 1.000$ Hz dargestellt. Das Modell besitzt $n_{EA} = 771.032$ Elemente. Die Anregungskraft $F_{AY} = 10$ N wirkt ebenfalls in Y-Richtung, entsprechend der experimentellen Modalanalyse. In diesem Bild wird das Modell mit zwei unterschiedlichen Dämpfungsvarianten dargestellt, nämlich einmal mit einer über die Frequenz konstanten Dämpfung und im anderen Fall mit einer Dämpfung nach der Bequemlichkeitshypothese. Mit der Gleichung 2-4 wird die über die Frequenz konstante Dämpfung berechnet. Die Gleichung 2-2 beschreibt die Dämpfung nach der Bequemlichkeitshypothese.

Für die Situation, dass die Anregung am Portal stattfindet und sich der Auswertepunkt 2 örtlich in der Nähe der Anregungsposition befindet, ist die Dämpfungsapproximation über die kon-

stante Dämpfung von $\vartheta = 0{,}0925$ bis ca. $f \approx 370$ Hz gut geeignet. Die Bequemlichkeitshypothese liefert in diesem Fall keine ausreichende Dämpfungsapproximation. Für die anderen Auswertepunkte wird jedoch, wie mit den Auswertepunkt 8 beispielhaft in Bild 4-32 oder den Auswertepunkt 9 beispielhaft in Bild 4-35 dargestellt, mit der Bequemlichkeitshypothese eine gute Dämpfungsapproximation im Frequenzbereich von $f_u = 0$ Hz bis $f_o = 500$ Hz erreicht. An diesen Beispielen ist zu erkennen, dass eine globale Beschreibung der Dämpfung für die komplette Werkzeugmaschine ungeeignet ist. Bessere Ergebnisse liefert daher eine komponentenspezifische und lokale diskrete Dämpfung.

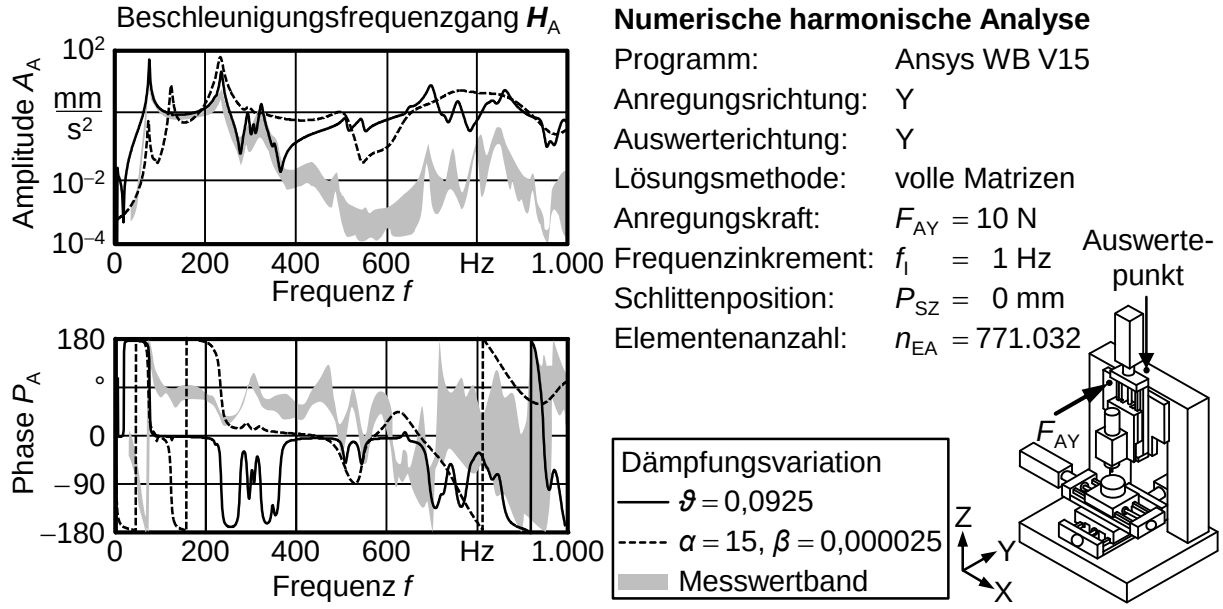


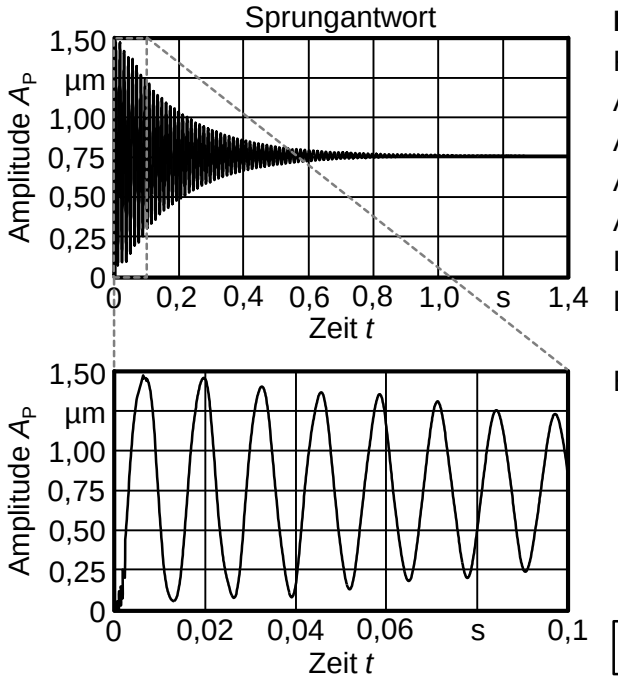
Bild 4-37: Vergleich der Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ aus der harmonischen Analyse und der experimentellen Modalanalyse am Auswertepunkt 2 in Y-Richtung für die mittlere Z-Schlittenposition $P_{SZ} = 0$ mm bis $f = 1.000$ Hz bei unterschiedlicher Dämpfung

4.4.5 Zeitverhalten

Um das reduzierte Modell aus Kapitel 5 mit dem FE-Modell im Zeitbereich vergleichen zu können, wird eine transiente FE-Simulation durchgeführt. Aufgrund der leichteren numerischen Umsetzbarkeit wird ein Einheitssprung als Heaviside-Funktion verwendet. Die Heaviside-Funktion ist in der Gleichung 4-3 dargestellt.

$$F(t) = \begin{cases} 0: & t < 0 \\ 1: & t \geq 0 \end{cases} \tag{4-3}$$

Um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu schaffen, werden die Schwingungen im Zeitraum von $t = 0$ s bis $t = 1{,}4$ s betrachtet. In diesem Zeitraum wird die Berechnung mit der festen Rechenschrittweite $\Delta t = 0{,}0001$ s durchgeführt. Außerdem wird anstelle des gesamten Systems das Ergebnis des in Unterkapitel 0 definierten Teilsystems 1 in Bild 4-38 dargestellt, da dieses einfachere Teilsystem 1 in den späteren Kapiteln verwendet wird. In den ersten Rechenschrittweiten konvergiert das FE-Ergebnis nicht. Dies ist an den Schwankungen am Anfang des vergrößerten zeitlichen Verlagerungsverlaufs der Amplitude A_P am Auswertepunkt 8 zu erkennen. Schon nach der ersten Periode konvergiert das FE-Ergebnis. Die Berechnung der indirekten Sprungantwort benötigt, bei einem 4-Kern Computer mit einer CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher, ca. $t_R \approx 29$ Stunden.



Numerische transiente Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Anregungsart:	Heaviside-Funktion
Anregungskraft:	$F_{AY} = 1$ N
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Dämpfung:	$\alpha = 7{,}5$
	$\beta = 0{,}0000125$
Elementenanzahl:	$n_{EA} = 771.032$

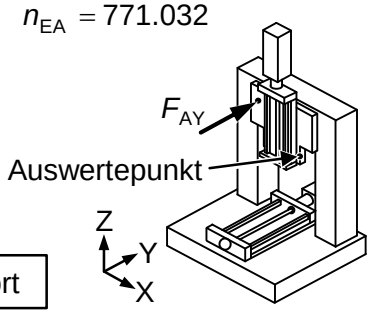
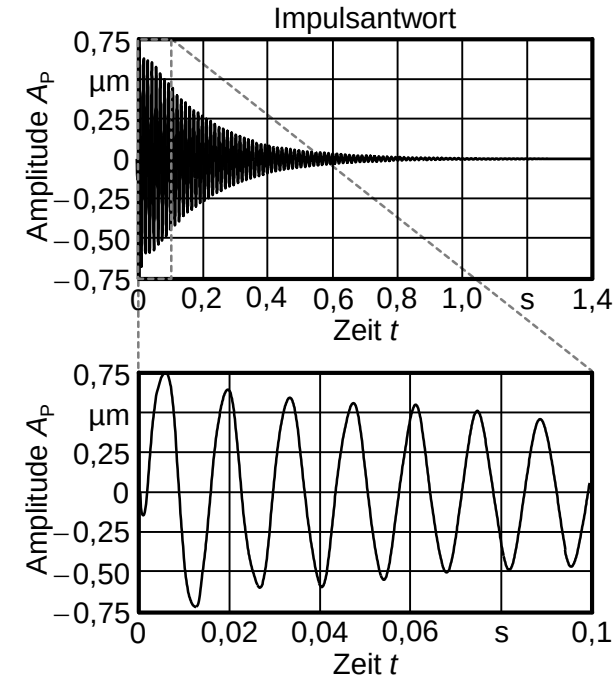


Bild 4-38: Zeitverhalten am Auswertepunkt 8 bezüglich einer Sprungantwort des FE-Modells vom Teilsystem 1

Zusätzlich wird für den Vergleich des gekoppelten und reduzierten Systems im Kapitel 6 das Zeitverhalten des Gesamtsystems aufgrund einer Impulsanregung benötigt. Dazu wird das Gesamtsystem mit den Schlittenpositionen $P_{SX} = P_{SY} = P_{SZ} = 0$ mm am Auswertepunkt 9 mit einer Impulsanregung am Werkstück angeregt. Die Schwingungen werden im Zeitraum von $t = 0$ s bis $t = 1{,}4$ s betrachtet. Die Berechnung wird mit der festen Rechenschrittweite von $\Delta t = 0{,}0001$ s durchgeführt und das Ergebnis in Bild 4-39 dargestellt.



Numerische transiente Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Anregungsart:	Impuls
Anregungskraft:	$\hat{F} = 10$ N
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
	$P_{SY} = 0$ mm
	$P_{SZ} = 0$ mm
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$
Elementenanzahl:	$n_{EA} = 771.032$

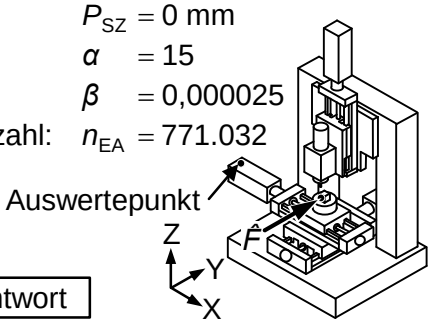


Bild 4-39: Zeitverhalten am Auswertepunkt 9 bezüglich einer Impulsantwort des FE-Modells vom Gesamtsystem

Der Impuls wird mittels der Delta-Distribution modelliert, wie es in Gleichung 4-4 dargestellt ist.

$$F_{\text{Impuls}}(t) = \hat{F}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\cdot e^{-t^2/a^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\cdot e^{-2\cdot t^2/a^2}\right) \tag{4-4}$$

Im Vergleich von Bild 4-38 und Bild 4-39 ist zu erkennen, dass das globale Schwingungsverhalten insbesondere das Abklingverhalten ähnlich ist. Lediglich der Anfang sowie die Amplitudenhöhe unterscheiden sich. Der Grund dafür ist, dass dieses Verhalten im Wesentlichen von der Dämpfung beeinflusst wird. Bei beiden Anregungsarten und Systemen liegt die gleiche Dämpfungsmodellierung zugrunde.

4.4.6 Zusammenfassung der numerisch ermittelten Ergebnisse

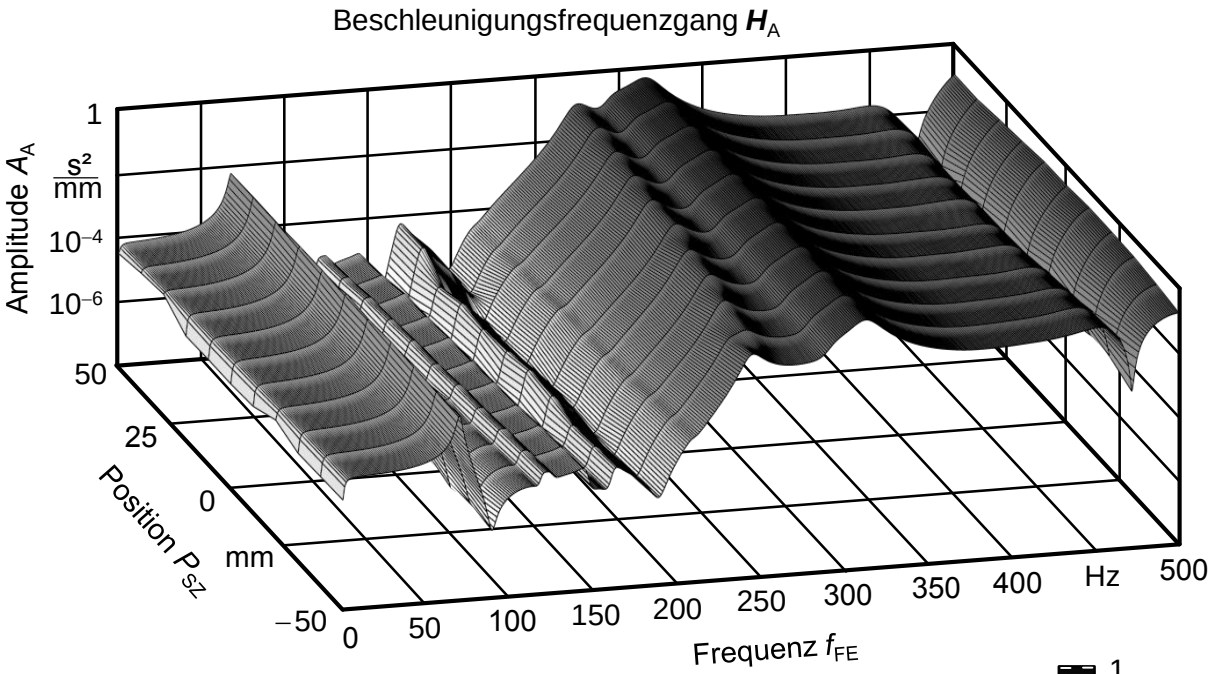
In Tabelle 4-8 sind die berechneten charakteristischen Frequenzen und die zugehörigen Amplituden A_A von Auswertepunkt 8 in Y-Richtung für die drei unterschiedlichen Z-Schlittenpositionen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich die Position der ersten Eigenfrequenz kaum ändert.

Tabelle 4-8: Zusammenfassung der charakteristischen Frequenzen f_{FE} und Amplituden A_A aus den berechneten Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ am Auswertepunkt 8 in Y-Richtung bei unterschiedlichen Z-Schlittenpositionen P_{SZ}

$P_{SZ} = 45$ mm		$P_{SZ} = 0$ mm		$P_{SZ} = -45$ mm	
Frequenz f_{FE} in Hz	Amplitude A_A in mm·s^{-2}	Frequenz f_{FE} in Hz	Amplitude A_A in mm·s^{-2}	Frequenz f_{FE} in Hz	Amplitude A_A in mm·s^{-2}
68	13,19	70	9,51	71	14,46
170	$5{,}18\cdot10^{-3}$	168	4,79	166	10,61
222	16,43	224	7,08	224	18,71
				260	3,94
				492	14,47

Zur besseren Visualisierung der Schlittenpositionsabhängigkeit werden in Bild 4-40 die berechneten Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ des Auswertepunkts 8 in Y-Richtung für die Z-Schlittenpositionen von $P_{SZ} = -45$ mm bis $P_{SZ} = 45$ mm in den Schlittenpositionsinkrementen $l_\Delta = 10$ mm dargestellt. In dieser Illustration entspricht zusätzlich die Farbe der Amplitudenhöhe. Das heißt, je dunkler die Farbe ist, desto höher ist die Amplitude A_A. Im Bild ist zu sehen, dass die Positionsabhängigkeit in der ersten Eigenfrequenz kaum zu erkennen ist. Das bedeutet, dass die Schlittenposition im Frequenzbereich von bis zu $f = 500$ Hz einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Schwingungen besitzt, die im Wesentlichen vom Portal hervorgerufen werden. Jedoch weisen Amplitudenüberhöhungen, die über der Frequenz von $f = 220$ Hz liegen, eine sichtbare Abhängigkeit bezüglich der Schlittenposition P_{SZ} auf.

Die Berechnung für diese neun Beschleunigungs- bzw. Amplitudenfrequenzgänge der unterschiedlichen Schlittenpositionen, um die nachfolgenden Abbildungen zu erstellen, benötigt auf einem 4-Kern Computer mit einer CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher, ca. $t_R \approx 5$ Tage.



Numerische harmonische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	$F_A = 1$ N
Frequenzinkrement:	$f_I = 1$ Hz
X-Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlittenposition:	$P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition:	P_{SZ} = variiert
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$

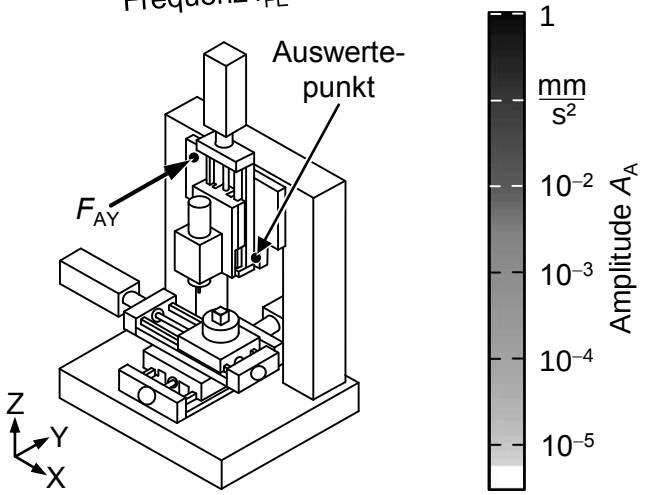


Bild 4-40: Berechnete Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ des Auswertepunkts 8 in Y-Richtung für unterschiedliche Z-Schlittenpositionen zwischen $P_{SZ} = -45$ mm und $P_{SZ} = 45$ mm

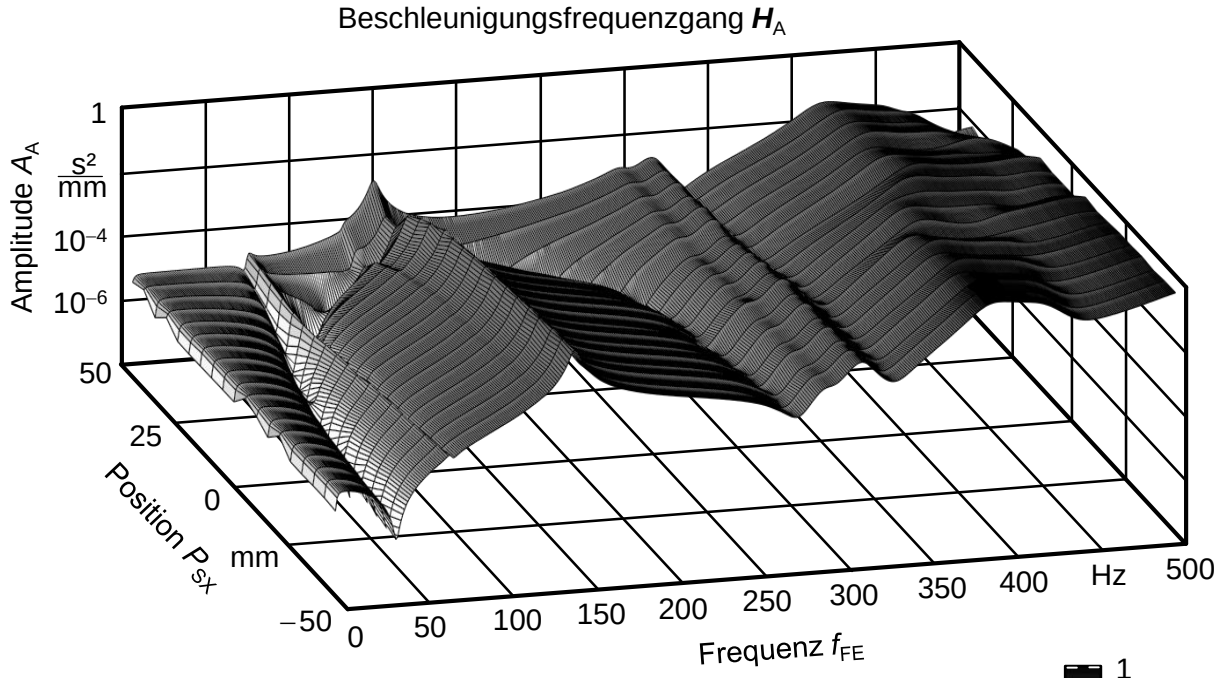
In Tabelle 4-9 werden die markantesten Frequenzen f_{FE} mit ihren zugehörigen Amplituden A_A von Auswertepunkt 9 in Y-Richtung für drei unterschiedliche X-Schlittenpositionen zusammengefasst. In Bild 4-41 sind die zugehörigen berechneten Beschleunigungsfrequenzgänge für die unterschiedlichen X-Schlittenpositionen von $P_{SX} = -45$ mm bis $P_{SX} = 45$ mm in $l_\Delta = 5$ mm dargestellt. Auch hier entspricht die Farbe der Amplitudenhöhe.

Wie im Bild 4-40 und in der Tabelle 4-9 zu sehen ist, verschieben sich die Eigenfrequenzwerte und die Amplitudenhöhe. Merklich ist die Verschiebung der ersten Antiresonanz und die Verminderung der Amplituden A_A bei der Eigenfrequenz von $f_{EA} = 144$ Hz von $P_{SX} = -45$ mm bis $P_{SX} = 45$ mm. Außerdem ist die Verschiebung der letzten dargestellten Eigenfrequenz von $f_{EA} = 397$ Hz bis $f_{EA} = 414$ Hz deutlich zu erkennen.

Tabelle 4-9: Zusammenfassung der charakteristischen Frequenzen f_{FE} und Amplituden A_A aus den berechneten Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ am Auswertepunkt 9 in Y-Richtung bei unterschiedlichen X-Schlittenpositionen P_{SX}

$P_{SX} = 45$ mm		$P_{SX} = 0$ mm		$P_{SX} = -45$ mm	
Frequenz f_{FE} in Hz	Amplitude A_A in mm·s^{-2}	Frequenz f_{FE} in Hz	Amplitude A_A in mm·s^{-2}	Frequenz f_{FE} in Hz	Amplitude A_A in mm·s^{-2}
-	-	69	0,0007	70	0,0007
143	0,1634	144	0,0764	144	0,0157
314	0,0313	314	0,0212	309	0,0172
397	0,3408	404	0,1730	414	0,1301

In Bild 4-41 ist zu sehen, dass sich die Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ in Abhängigkeit von der Schlittenposition ändern.



Numerische harmonische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	$F_A = 1$ N
Frequenzinkrement:	$f_I = 1$ Hz
X-Schlittenposition:	P_{SX} = variiert
Y-Schlittenposition:	$P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition:	$P_{SZ} = 0$ mm
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$

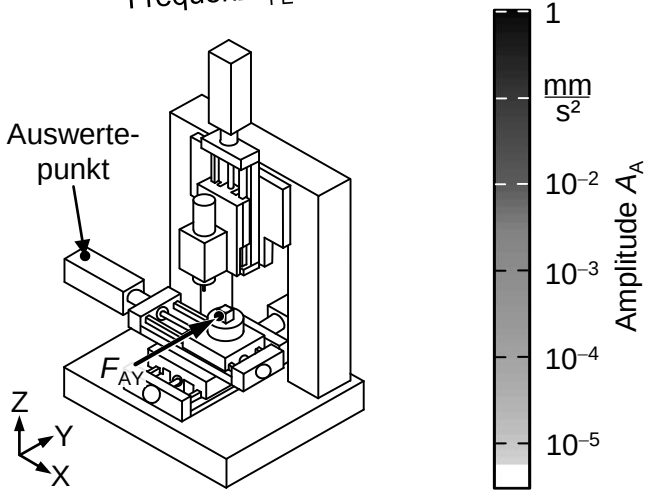


Bild 4-41: Berechnete Beschleunigungsfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_A$ des Auswertepunkts 9 in Y-Richtung für unterschiedliche X-Schlittenpositionen zwischen $P_{SX} = -45$ mm und $P_{SX} = 45$ mm

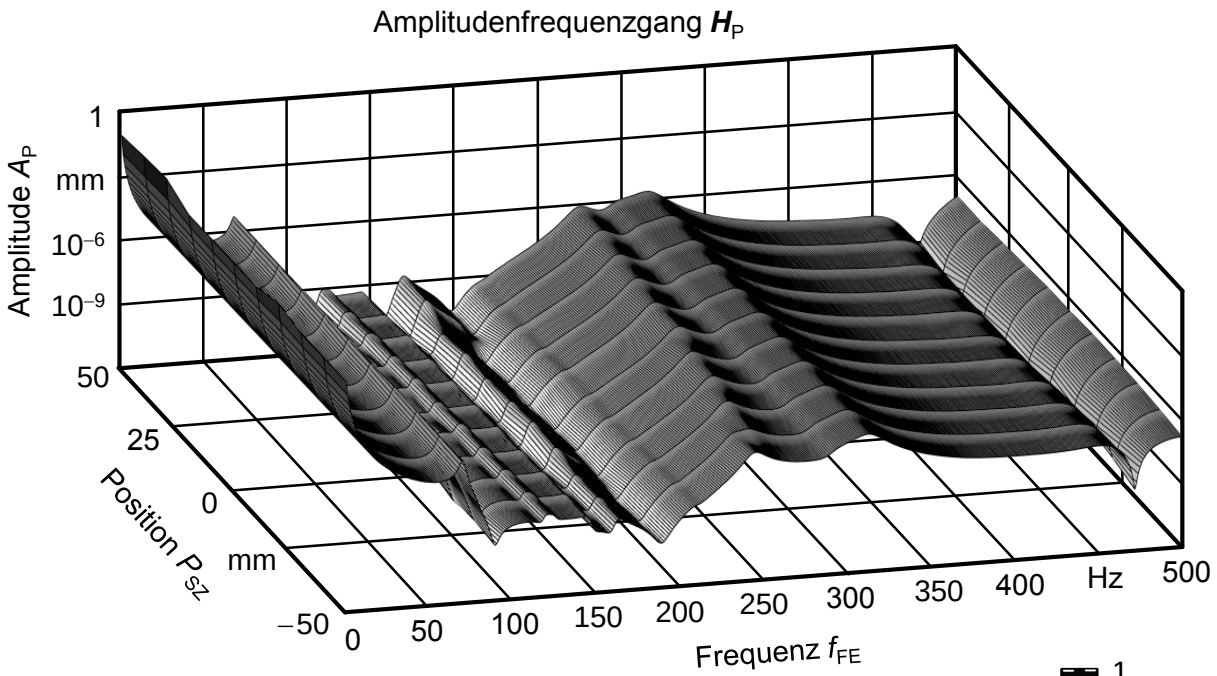
Die berechneten Eigenschaften bezüglich der Positionsänderung besitzen einen nichtlinearen Charakter. Dies kann mit der FEM berechnet werden, obwohl die FEM eine lineare Methode ist. Es ist aber mit der FEM berechenbar, da es sich hierbei um eine geometrische Nichtlinearität handelt. Durch die jeweilige Berechnung an den diskreten Positionen wird eine linearisierte Lösung der geometrischen Nichtlinearität mit der FEM ermittelt.

Tabelle 4-10: Gegenüberstellung der berechneten und experimentell ermittelten charakteristischen Frequenzen aus den Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$ in Y-Richtung an den Auswertepunkten 8 und 9 bei unterschiedlichen X- und Z-Schlittenpositionen

Messpunkt bzw. Auswertepunkt	Schlittenposition in mm	numerische Analyse f_{FE} in Hz	experimentelle Analyse f_{GS} in Hz	Differenz f_Δ in Hz
9	$P_{SX} = -45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	70	-	*
9	$P_{SX} = -45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	145	144	1
9	$P_{SX} = -45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	311	312	1
9	$P_{SX} = -45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	406	408	2
9	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	69	-	*
9	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	146	144	2
9	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	314	314	0
9	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	399	400	1
9	$P_{SX} = 45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	143	144	1
9	$P_{SX} = 45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	314	316	2
9	$P_{SX} = 45$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	397	394	2
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 45$	68	68	0
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 45$	170	170	0
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 45$	222	222	0
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	70	70	0
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	167	168	1
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = 0$	224	224	0
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = -45$	71	72	1
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = -45$	166	166	0
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = -45$	226	226/228	*
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = -45$	259	258	1
8	$P_{SX} = 0$, $P_{SY} = 0$, $P_{SZ} = -45$	494	492/496	*

*: Aufgrund der hohen Messwertschwankung ist keine Differenzangabe möglich.

Zusätzlich zu den Beschleunigungsfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_A$, aufgetragen über die Schlittenpositionen, werden die Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ angegeben, da diese für den Vergleich mit den reduzierten Systemen aus Kapitel 5 verwendet werden.



Numerische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	$F_A = 1$ N
Frequenzinkrement:	$f_I = 1$ Hz
X-Schlittenposition:	$P_{SX} = 0$ mm
Y-Schlittenposition:	$P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition:	P_{SZ} = variiert
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$

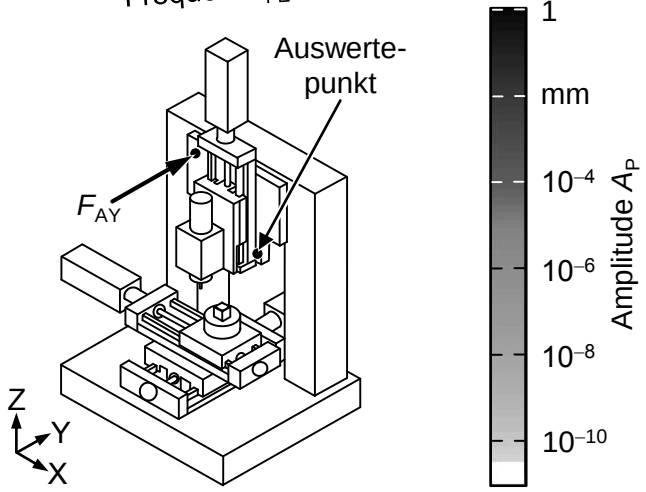
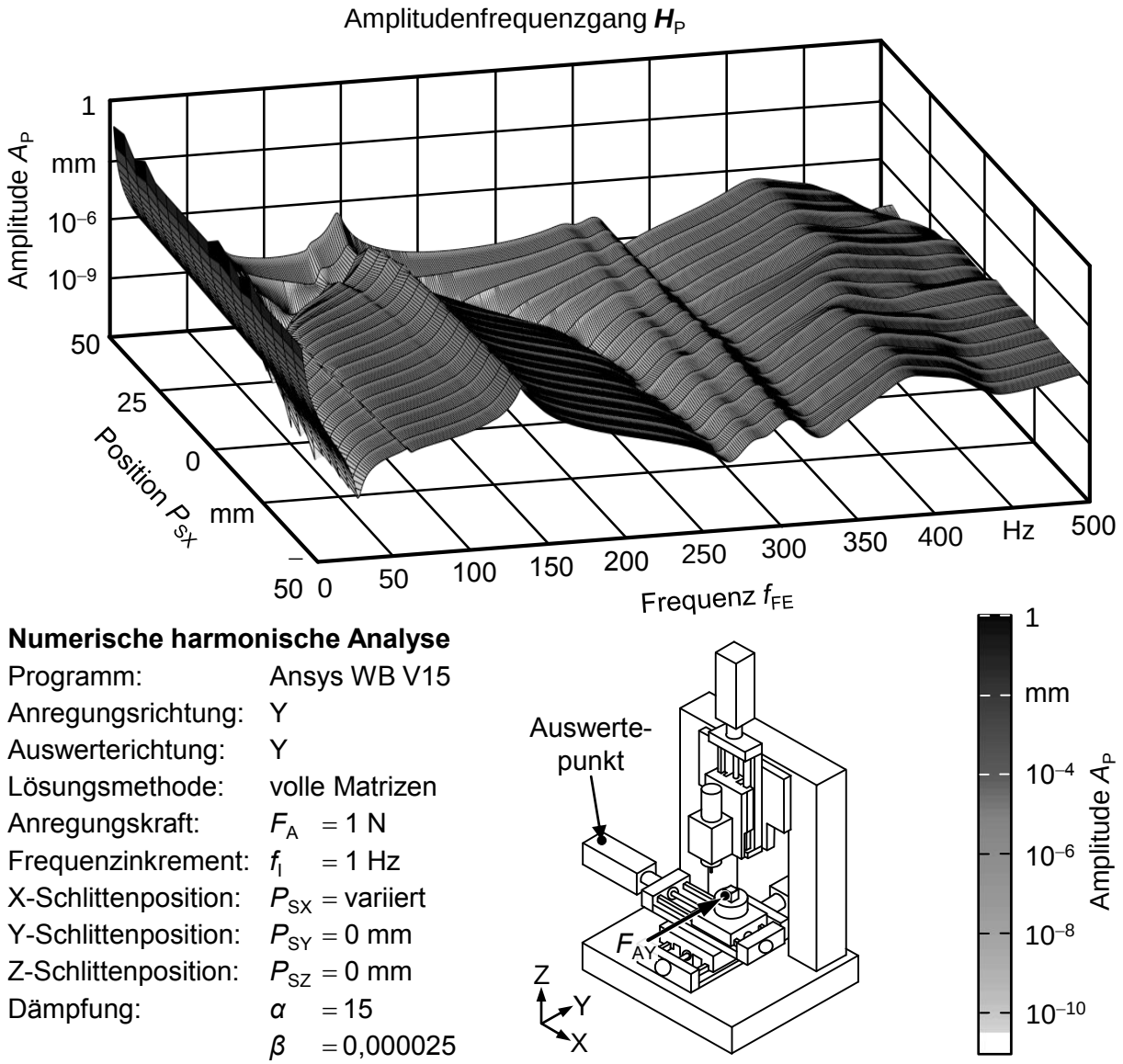


Bild 4-42: Berechnete Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ des Auswertepunkts 8 in Y-Richtung für unterschiedliche Z-Schlittenpositionen zwischen $P_{SZ} = -45$ mm und $P_{SZ} = 45$ mm

In Bild 4-42 ist der Amplitudenfrequenzgang $\boldsymbol{H}_P$ in Abhängigkeit von der Z-Schlittenposition dargestellt. Auch hier ist zu erkennen, dass die Amplitudenüberhöhungen über $f = 220$ Hz eine Positionsabhängigkeit aufweisen. Für diese Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ ändert sich hierbei nur die Z-Schlittenposition und nicht die Anregungsposition.

Im Gegensatz dazu werden in Bild 4-43 die Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ in Abhängigkeit von der X-Schlittenposition dargestellt, bei der sich gleichzeitig die Anregungsposition ändert, da diese sich mit dem X-Schlitten bewegt. Daher wirkt sich die X-Schlittenpositionsabhängigkeit stärker aus. Je nach Anwendungs- und Untersuchungsfall können entweder nur einer der beiden Fälle oder beide Fälle beziehungsweise eine Mischung aus beiden Fällen auftreten. Diese positionsabhängigen dynamischen Eigenschaften müssen bei der gekoppelten Simulation der virtuellen Werkzeugmaschine unter Berücksichtigung der Fertigungsprozesskräfte berücksichtigt werden.



Numerische harmonische Analyse

Programm:	Ansys WB V15
Anregungsrichtung:	Y
Auswerterichtung:	Y
Lösungsmethode:	volle Matrizen
Anregungskraft:	$F_A = 1$ N
Frequenzinkrement:	$f_I = 1$ Hz
X-Schlittenposition:	P_{SX} = variiert
Y-Schlittenposition:	$P_{SY} = 0$ mm
Z-Schlittenposition:	$P_{SZ} = 0$ mm
Dämpfung:	$\alpha = 15$
	$\beta = 0{,}000025$

Bild 4-43: Berechnete Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ des Auswertepunkts 9 in Y-Richtung für unterschiedliche X-Schlittenpositionen zwischen $P_{SX} = -45$ mm und $P_{SX} = 45$ mm

Wie an den Ergebnissen zu erkennen ist, ist der Demonstrator ein nichtlineares System, da die effektive Steifigkeit des Kugelgewindetriebs von der Schlittenposition abhängig ist. Eine zusätzliche nichtlineare Eigenschaft wird durch die Änderung der Massenverteilung beziehungsweise des Trägheitsverhaltens hervorgerufen. In der Literatur wird dieses nichtlineare Verhalten zu den strukturellen Nichtlinearitäten gezählt [RUD12], da die Eigenschaft von der Position abhängt. Die strukturellen Nichtlinearitäten haben direkten Einfluss auf die Modellstruktur.

Werkzeugmaschinen besitzen eine hohe Anzahl an Betriebspositionen. Das dynamische Verhalten, das durch die Eigenfrequenzen und Eigenformen beschrieben wird, ändert sich mit der Änderung der Betriebskonfiguration. Eine globale Beurteilung der Eigendynamik für den gesamten Arbeitsraum ist mit den konventionellen Methoden aufgrund der hochdimensionalen Modelle sehr aufwändig. Mit dem nachfolgenden neuartigen Reduktionsverfahren wird eine numerisch günstige Methode zur Beurteilung der Eigendynamik im gesamten Maschinenraum ermöglicht.

5 Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren für Werkzeugmaschinen

5.1 Einführung und Übersicht

Modellordnungsreduktionsverfahren werden zur Minimierung des numerischen und speichertechnischen Aufwands benötigt und helfen bei der Erzeugung niedrigdimensionaler Verhaltensmodelle. Im Bereich von Werkzeugmaschinen werden die modernen MOR-Verfahren in der Forschung erst seit einigen Jahren angewendet, untersucht und weiterentwickelt [BEN09, MAG10, FAS11, BEN13, SUL14]. Da sie neue Möglichkeiten eröffnen, finden diese Verfahren im wachsenden Maße Verbreitung in der Werkzeugmaschinenindustrie [ROS10, RON14]. Durch Verwendung von reduzierten Modellen ergeben sich wesentlich kürzere Rechenzeiten und damit werden Simulationen umsetzbar, die sonst zu aufwendig und zeitintensiv wären. So können beispielsweise mehr Konstruktionsvarianten in einem festen Zeitrahmen numerisch untersucht und bewertet werden als ohne MOR-Verfahren. Neben der Minimierung des Zeit- und Speicherbedarfs durch die MOR verringert sich auch der Modellierungsaufwand der Simulationen für die Regelung und die numerische Steuerung, da die Modelle aus der vorherigen Entwurfsphase wiederverwertbar sind. In Bild 5-1 werden symbolisch die unterschiedlichen Simulationsausprägungen in der Werkzeugmaschinenentwicklung dargestellt. Dieses Bild zeigt den Zusammenhang zwischen den jeweiligen Konstruktionsvarianten und der Komplexität der Simulationsmodelle sowie deren Zeitbedarf zur Lösung der Simulationen. Es ist zu sehen, dass die MOR-Verfahren nicht nur in der Dynamiksimulation einen Mehrwert schaffen, sondern auch in der Regelungssimulation bis hin zur Optimierung und dem Testen der numerischen Steuerung. In diesen Bereichen ist man üblicherweise nur am Systemverhalten an spezifischen gewählten Punkten interessiert.

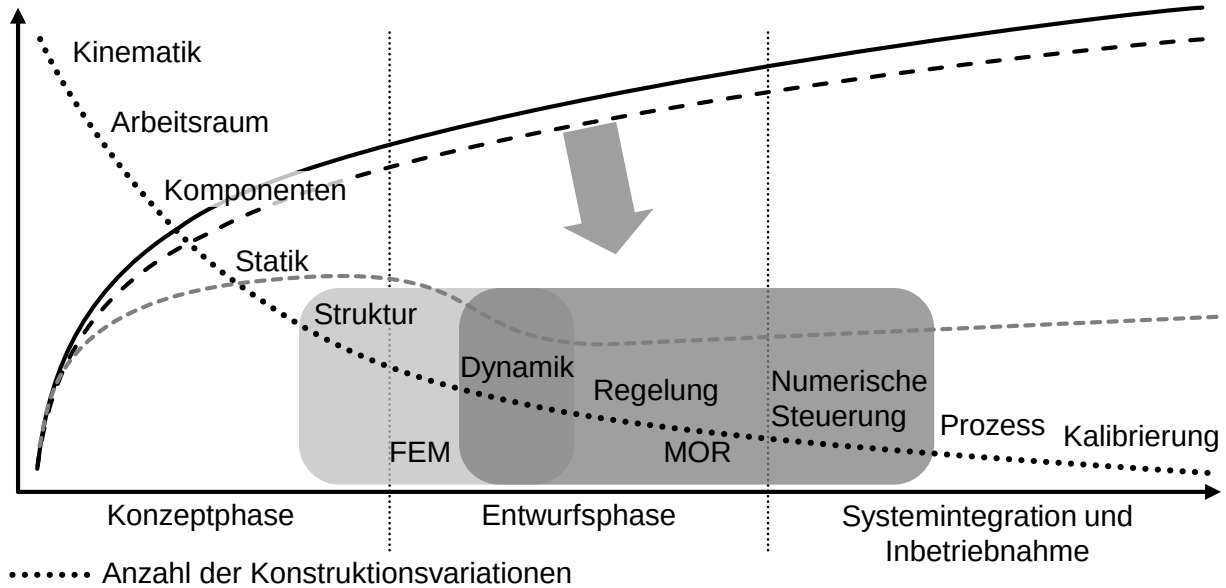


Bild 5-1: Herkömmliche Verwendung der Simulationsausprägungen und der Auswirkung von der Modellordnungsreduktion in den verschiedenen Entwicklungsphasen in Anlehnung an MAGLIE [MAG12]

Zur Beurteilung der Qualität des einzelnen MOR-Verfahrens müssen Reduktionsziele aufgestellt werden, wie von LOHMANN und SALIMBAHRAMI [LOH04] dargelegt. Ein typisches Ziel besteht beispielsweise darin, dass die Systemantwort des reduzierten Modells der Systemantwort des Referenzsystems entsprechen soll. Das Referenzsystem ist in dieser Arbeit das Originalmodell. Ein weiteres Ziel ist häufig, dass die größten Frequenzgangspitzen des Originals mit den Frequenzgangspitzen des reduzierten Systems übereinstimmen. Zusätzlich muss jedes MOR-Verfahren bezüglich unterschiedlicher Darstellungsformen des Referenzmodells invariant sein. Das heißt, jede bereits vorgenommene Zustandstransformation darf keine Wirkung auf das Ergebnis haben. Zusätzlich gilt, dass aus einem stabilen Referenzmodell stets ein stabiles reduziertes Modell folgen muss und dem Referenzmodell stationär gleicht. Zur Angabe der Qualität bieten sich die Größen des Approximationsfehlers oder die absolute Abweichung und die relative Abweichung an, wie in Unterkapitel 5.3 definiert.

Grundsätzlich existieren unterschiedliche Ansätze zur Reduktion hochdimensionaler Systeme. In Unterkapitel 2.5 und in Bild 2-11 wird eine Übersicht über die klassischen MOR-Verfahren sowie über die modernen MOR-Verfahren gegeben. Zu den klassischen Verfahren gehören die statische, die modale und die gemischte Reduktion. Diese Verfahren haben gemeinsam, dass sie im physikalischen Raum operieren. Die modernen Verfahren arbeiten stattdessen hauptsächlich im Frequenzraum. Für die modernen Verfahren existieren unterschiedliche Ansätze zur Erzeugung der gesuchten Projektionsmatrizen. Hierbei können zwei unterschiedliche Typen von MOR-Verfahren identifiziert werden. Der erste Ansatz wird als Padé-Approximation bezeichnet, die auf der Methode der Unterräume von Krylov basiert. Der zweite Ansatz gehört zu den singulärwertzerlegenden Methoden. Ein typischer Vertreter der Singulärwertzerlegung (engl.: Singular Value Decomposition, kurz: SVD) ist beispielsweise das balancierte Abschneiden [ANT05].

In Tabelle 5-1 ist eine Übersicht der allgemeinen Eigenschaften beziehungsweise der Vor- und Nachteile ausgewählter klassischer und moderner MOR-Verfahren dargestellt. Die aufgelisteten Eigenschaften sind abhängig vom gewählten Algorithmus zur Realisierung der MOR-Verfahren. Daher genügt die alleinige Angabe des MOR-Verfahrens nicht. Dazu ist ebenfalls die Angabe über den verwendeten Reduktionsalgorithmus notwendig. Die Qualität des MOR-Verfahrens hängt neben dem verwendeten Reduktionsalgorithmus auch vom Matrizenzustand des Referenzsystems ab. Bei schlecht konditionierten oder singulären Matrizen ist mit numerischen Problemen beim Reduktionsvorgang zu rechnen. Diese beiden Umstände werden in der Tabelle nicht berücksichtigt. Aufgrund der genannten abhängigen Eigenschaften werden unterschiedliche Reduktionsalgorithmen in diesem Kapitel verglichen. Zur Reduktion kommt die kommerzielle Software MOR for ANSYS zum Einsatz, die von ANSYS INC. aus Canonsburg, Pennsylvania, USA vertrieben wird. In dieser Software ist das implizite Momentenabgleichsverfahren über den in Unterkapitel 5.3.1 dargestellten Arnoldi-Algorithmus implementiert [BEC07]. Die selbst hergestellten Programme mit den integrierten verschiedenen Algorithmen wurden mittels der Software MATLAB des Herstellers THE MATHWORKS, Inc. aus Natick, Massachusetts, USA realisiert. Diese Software hat den Vorteil, dass damit auf einfache Art und Weise die Eigenschaften der unterschiedlichen Algorithmen überprüft werden können. Zusätzlich sind die Ersatzsysteme selbst in dieser Software überprüfbar und weiterführende Simulationen durchführbar. Der Nachteil der Software ist ihre geringe Recheneffizienz und der höhere Zeit- und Speicherbedarf gegenüber den Programmen, die beispielsweise direkt in C oder Python erstellt werden.

Tabelle 5-1: Übersicht über die Vor- und Nachteile ausgewählter Modellordnungsreduktionsverfahren unter Berücksichtigung der Referenzen [ANT05, BEN05, BEC07, LEH07, EID09, FAS11]

Verfahren	Vorteile	Nachteile
modale Reduktion bzw. Guyan-Reduktion	+ stabilitätserhaltend + im Allgemeinen hohe physikalische Interpretierbarkeit + einfache Berechnung für große Systeme mit definiten Matrizen + in kommerziellen FE-Programmen standardmäßig implementiert + natürlicher Ansatz im Zusammenhang mit den Gebietszerlegungsmethoden	− hoher manueller Aufwand, daher schwierige Identifizierung der dominanten Moden − ignoriert in der Regel teilweise die Dynamik des Systems − Ersatzmodelle beinhalten hohe Frequenzanteile − kein Fehlerschätzer, daher nur heuristische Abschätzung möglich − Systemgröße abhängig von der Ein- und Ausgangsdimension − erfordert große Ersatzmodelle für eine hohe Genauigkeit
gemischte Reduktion	+ stabilitätserhaltend + im Allgemeinen hohe physikalische Interpretierbarkeit + in kommerziellen FE-Programmen standardmäßig implementiert	− generell hoher manueller Aufwand − Ersatzmodelle beinhalten hohe Frequenzanteile − Systemgröße abhängig von der Ein- und Ausgangsdimension − in der Regel erfordert große Ersatzmodelle für eine hohe Genauigkeit
Padé-Approximation via Krylov-Unterraummethode	+ erhält Passivität + häufig numerisch sehr robust + iterative, einfache Implementierung + numerisch günstig: Rechenaufwand beläuft sich auf $\mathcal{O}(L^2N)$ + im Allgemeinen gute lokale Approximation + geeignet für große lineare Systeme	− keine Stabilitätsgarantie − besitzt keine Fehlerschranke, daher manuelle Vorgabe des Reduktionsgrads L − Frage des idealen Entwicklungspunktes s_0 − Systemgröße L abhängig von der Ein- und Ausgangsdimension
singulärwert-zerlegende Methode	+ stabilitätserhaltend + Existenz globaler Fehlergrenzen, daher Automatisierung möglich + im Allgemeinen eine gute globale Approximation + Systemgröße häufig unabhängig von der Ein- und Ausgangsdimension + besitzt hohe Adaptivität	− numerisch teuer: Rechenaufwand beläuft sich auf $\mathcal{O}(N^3)$ − hoher Speicherbedarf von $\mathcal{O}(N^2)$ − erhält im Allgemeinen nicht den stationären Zustand − hoher Aufwand bei der Strukturerhaltung der Gleichungen
hybrides Reduktionsverfahren	+ stabilitätserhaltend + im Allgemeinen gute globale Approximation + Systemgröße häufig unabhängig von der Ein- und Ausgangsdimension	− numerisch teuer: Rechenaufwand beläuft sich auf $\mathcal{O}(N^3)$ − besitzt keine globale Fehlerschranke

Um die Daten aus ANSYS zu verwenden, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Schnittstelle zwischen den Softwareprogrammen ANSYS und MATLAB des Herstellers THE MATHWORKS INC. aus Natick, Massachusetts, USA, programmiert. Mithilfe dieser Schnittstelle lassen sich die von ANSYS WB abgespeicherten Informationen einlesen. Danach werden diese Informationen in ein Format umgewandelt, das von MATLAB verwendbar ist. Durch diese Vorgehensweise ändert sich der bekannte Prozessablauf in der Entwicklung minimal. Der Entwickler kann weiterhin die bekannten Programme zur Modellierung und Simulation verwenden. Dies spielt insbesondere in der industriellen Anwendung eine große Rolle, da so keine Softwareumstellung notwendig ist und somit nur ein geringfügiger Eingriff in den bekannten Entwicklungsablauf erfolgt.

5.2 Padé-Approximation mittels Krylov-Unterraummethode

Als Padé-Approximation wird das Abschneiden der Taylorreihenentwicklungsglieder der Übertragungsfunktion $\boldsymbol{H}(s)$, der Laplace-transformierte der Impulsantwort, bezeichnet. Je nach Anwendungsfall werden für die Reihenentwicklung unterschiedliche Entwicklungspunkte verwendet. Bei der Wahl des Entwicklungspunkts $s_0 = \infty\ \mathrm{s}^{-1}$ werden die Reihenentwicklungsglieder Markov-Parameter genannt. Im Falle des Entwicklungspunkts $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ werden die negativen Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung als Momente betitelt [ANT05]. Häufig werden diese Entwicklungsglieder auch für $s_0 \neq 0\ \mathrm{s}^{-1}$ als Momente bezeichnet, so wie in dieser vorliegenden Arbeit. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Momentenabgleichsverfahren, die auch häufig als „Moment-Matching-Verfahren“ betitelt werden, als Vertreter der Padé-Approximation betrachtet.

Die Krylov-Unterraummethode ist ein Verfahren, mit dem die Reduktion der internen Zustände großer linearer Modelle ermöglicht wird. Ursprünglich diente die Krylov-Unterraummethode zur Bestimmung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms [MEA08]. Die Grundlage der Krylov-Unterraummethode basiert auf einer Approximation im Frequenzbereich. Bei dieser Methode wird die geeignete Projektionsmatrix so gewählt, dass der Funktionswert und die erste Ableitung der Übertragungsfunktion des Referenzsystems und des reduzierten Systems an definierten Frequenzstellen der komplexen Ebene übereinstimmen [VIL87]. Die Definition der Projektionsmatrizen wird im Folgenden vorgestellt.

Für das bessere Verständnis von diesem MOR-Verfahren wird im ersten Schritt das reduzierte System analog zu den Gleichungen 2-37 im Zustandsraum erstellt, mit $\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}$ als $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$ und der Transponierten von $\boldsymbol{P}_{\mathrm{PG}}$ als $\boldsymbol{V}$. Zusätzlich werden die Argumente wieder eingeführt, um die Zugehörigkeit im Frequenzbereich oder Zeitbereich stärker hervorzuheben. Durch den Reduktionsvorgang entsteht ein Informationsverlust, der durch den Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ausgedrückt wird. Mit diesem Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ wird die Genauigkeit des MOR-Verfahrens angezeigt [ANT05].

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,red}}(t) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}} \tag{5-1}$$

Im Unterschied zu den klassischen Projektionsverfahren aus Unterkapitel 2.5.3 werden hier zwei unterschiedliche Projektionsmatrizen verwendet. Die Projektionsmatrix $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$ wird als linker Krylov-Unterraum und $\boldsymbol{V}$ als rechter Krylov-Unterraum bezeichnet. Die Konstruktion der beiden Räume wird im Folgenden skizziert. Die allgemeine Definition des Krylov-Unterraums lautet:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{r}}_0) = \mathrm{span}\{(\tilde{\boldsymbol{r}}_0), (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{r}}_0), \cdots, (\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{L}-1}\tilde{\boldsymbol{r}}_0)\}. \tag{5-2}$$

Mit dieser Definition wird der Krylov-Unterraum $\mathcal{K}$ durch die linear unabhängigen L-Spaltenvektoren $\{(\tilde{\boldsymbol{r}}_0), (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{r}}_0), \cdots, (\tilde{\boldsymbol{A}}^{L-1}\tilde{\boldsymbol{r}}_0)\}$ aufgespannt. Diese Vektoren werden auch als Basisvektoren bezeichnet. Der Krylov-Unterraum ist somit eine Projektionsmatrix in den L-dimensionalen Raum. Die Anzahl der Vektoren bestimmt die spätere Dimension des reduzierten Systems. Die benötigten Projektionsmatrizen $\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{V}$ werden gewöhnlich aus den Spaltenvektoren des Referenzsystems in der Zustandsraumdarstellung gewonnen [ANT05, UHL12a].

Der rechte Krylov-Unterraum $\mathcal{K}_{\mathrm{Re}}$ wird mit der Dynamikmatrix und der Eingangsmatrix erzeugt, weshalb diese auch unter der Bezeichnung Eingangs-Krylov-Unterraum bekannt ist und der Projektionsmatrix $\boldsymbol{V}$ entspricht [GRI97].

$$\mathcal{K}_{\mathrm{Re}} = \mathcal{K}_{\mathrm{Re}}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\right) = \mathrm{span}\left\{\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\right), \cdots, \left(\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\right)^{L_1-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\right)\right\} \tag{5-3}$$

In ähnlicher Art und Weise lässt sich nun die Projektionsmatrix $\boldsymbol{W}$ als linker Krylov-Unterraum $\mathcal{K}_{\mathrm{Li}}$ erstellen. Hierbei werden aber die Ausgangsmatrix und die Dynamikmatrix als Basis verwendet, weshalb diese auch als Ausgangs-Krylov-Unterraum bekannt ist [GRI97].

$$\mathcal{K}_{\mathrm{Li}} = \mathcal{K}_{\mathrm{Li}}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\right) = \mathrm{span}\left\{\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\right), \cdots, \left(\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\right)^{L_2-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\right)\right\} \tag{5-4}$$

Werden beide Krylov-Unterräume $\mathcal{K}_{\mathrm{Re}}$ und $\mathcal{K}_{\mathrm{Li}}$ für die Projektion verwendet, handelt es sich hierbei um ein sogenanntes zweiseitiges Verfahren, da sowohl die Beziehungen aus dem Eingang als auch aus dem Ausgang des Modells in die Projektionsmatrizen einfließen.

Dieses MOR-Verfahren hat den Vorteil, dass die Eigenschaften aus dem Referenzmodell in der Regel erhalten bleiben. Diese Systemeigenschaften sind die matrixwertigen Momente, die durch die Taylorreihenentwicklung der Übertragungsfunktion um einen Entwicklungspunkt der Laplace-Variable $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ entstehen, wie in der nachfolgenden Gleichung dargestellt ist [ANT05, BEC07]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{ZR}}(s_0) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\left(s_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}} = &\underbrace{-\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}}_{\boldsymbol{m}_0} \underbrace{-\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\left(s_0\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}\right)\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}}_{\boldsymbol{m}_1} - \cdots \\ &\cdots \underbrace{-\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\left(s_0\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}\right)^{k}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}}_{\boldsymbol{m}_k} - \cdots\end{aligned} \tag{5-5}$$

Für einen frei wählbaren Entwicklungspunkt s mit $s_0 \neq 0\ \mathrm{s}^{-1}$ wird die Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}$ durch den nachfolgenden Ausdruck ersetzt:

$$(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}} - s\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}}) \tag{5-6}$$

Die ersten Zwei-L-Momente werden für die Basenberechnung zugrunde gelegt, um den Unterraum für das zweiseitige Krylov-Verfahren aufzuspannen. Bei einem einseitigen Verfahren kommen die ersten L-Momente zur Anwendung. Häufig wird $\boldsymbol{V}$ gewählt und $\boldsymbol{W}$ nicht explizit berechnet, sondern durch die Transponierte von $\boldsymbol{V}$ ersetzt. Dies ist zulässig, wenn es sich hier um eine Kongruenztransformation handelt [LIE07]. Die Bezeichnung Kongruenztransformation wird für eine affine orthogonale Transformation verwendet.

Gleichung 5-5 beschreibt die Übertragungsfunktion von einem Eingangspunkt zu einem Ausgangspunkt. Daher stellen die reduzierten Systeme, die mittels Momentenabgleichsverfahren erstellt werden, eine genaue Approximation des SISO-Systems dar. Bei der Approximation eines MIMO-Systems mit einem niedrigdimensionalen System sind jeweils Übertragungsfunktionen für alle möglichen Eingangs-Ausgangs-Paare notwendig. Diese werden dann anschließend durch das Superpositionsprinzip in einer Matrix zusammengefasst. Deshalb steigt der Rechenaufwand mit der Anzahl der Ein- und Ausgänge quadratisch an.

Als nächstes wird dargestellt, wie ein reduziertes Modell für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung erstellt wird. Bei der Reduktion der Differentialgleichung zweiter Ordnung werden im Gegensatz zu Gleichung 5-5 ausgehend von der Übertragungsfunktion aus Gleichung 2-12 mit $\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}}} = 0$ und $\boldsymbol{D} = 0$ wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{H}(s) = (s\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}) \cdot (s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})^{-1} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{5-7}$$

Für eine bessere Übersichtlichkeit führt der Verfasser die nachfolgenden Abkürzungen der geshifteten Matrizen, wie in den Referenzen [FAS11, BEN11], ein:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}_{\mathrm{pv}}(s) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}} + s\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}; && \boldsymbol{h}_0(s) = \boldsymbol{G}_0^{-1}\boldsymbol{B}; \\ &\boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}(s) = 2s\boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}; && \boldsymbol{h}_1(s) = \boldsymbol{G}_0^{-1}\left(-\boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}\boldsymbol{h}_0\right); \\ &\boldsymbol{G}_0(s) = s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}; && \boldsymbol{h}_k(s) = \boldsymbol{G}_0^{-1}\left(-\boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}\boldsymbol{h}_{k-1} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{h}_{k-2}\right); \quad \text{für } k = 2, 3, \ldots, L \end{aligned} \tag{5-8}$$

Die Momente für die Differentialgleichung zweiter Ordnung werden für $s = s_0 = 0$ folgendermaßen gebildet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(s_0) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{pv}}(s_0)\boldsymbol{G}_0^{-1}(s_0)\boldsymbol{B} = \underbrace{\boldsymbol{C}_{\mathrm{pv}}(s_0)\boldsymbol{h}_0(s_0)}_{\boldsymbol{m}_0} + \\ \underbrace{\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{h}_0(s_0) + \boldsymbol{C}_{\mathrm{pv}}(s_0)\boldsymbol{G}_0^{-1}(s_0)\boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}(s_0)\boldsymbol{h}_0(s_0)\right)}_{\boldsymbol{m}_1} + \cdots + \underbrace{\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{h}_{k-1}(s_0) + \boldsymbol{C}_{\mathrm{pv}}(s_0)\boldsymbol{h}_k(s_0)\right)}_{\boldsymbol{m}_k} + \cdots . \end{aligned} \tag{5-9}$$

Diese Momente lassen sich zum Aufspannen der Unterräume und somit für die Reduktion nutzen. Durch die Anwendung dieser Projektionsmatrizen auf die Gleichung 2-5 entsteht das folgende reduzierte System zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{M}_{\mathrm{red}}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{red}}(t) + \underbrace{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{E}_{\mathrm{red}}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{red}}(t) + \underbrace{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{K}_{\mathrm{red}}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{red}}(t) = \underbrace{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}_{\mathrm{red}}}p(t) \\ &\boldsymbol{y}(t) = \underbrace{\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}}}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}},\mathrm{red}}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{red}}(t) + \underbrace{\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}}}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}},\mathrm{red}}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{red}}(t) + \underbrace{\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{C}_{\mathrm{q},\mathrm{red}}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{red}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{p}(t) \end{aligned} \tag{5-10}$$

mit $\boldsymbol{M}_{\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L\times L}$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L\times L}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L\times L}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L\times P}$, $\boldsymbol{C}_{\mathrm{q,red}} \in \mathbb{R}^{L\times Q}$, $\boldsymbol{C}_{\dot{\mathrm{q}},\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L\times Q}$, $\boldsymbol{C}_{\ddot{\mathrm{q}},\mathrm{red}} \in \mathbb{R}^{L\times Q}$ und $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{Q\times P}$. Für die bessere Übersichtlichkeit werden auf die Argumente in den Gleichungen verzichtet. Unter Verwendung der Substitution der Gleichung 2-13 wird eine numerisch günstigere Zustandsraumdarstellung, wie in Gleichung 5-1, für einen variablen Entwicklungspunkt s_0 erstellt.

$$\boldsymbol{H}(s_0) = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{\mathrm{pv}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\left(\boldsymbol{I} - (s - s_0)\underbrace{\begin{pmatrix}-\boldsymbol{G}_0^{-1}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{G}_0^{-1}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_0^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \tag{5-11}$$

Bei der Verwendung ungeeigneter Algorithmen zur Erzeugung der Krylov-Basen wird die Gleichungsstruktur zerstört. Damit kann das reduzierte System nicht ohne weiteres in ein System zweiter Ordnung transformierbar werden. Bleibt aber die Gleichungsstruktur erhalten, ist auch eine Zuordnung der Positions- und Geschwindigkeitsausgänge möglich. In Gleichung 5-11 ist zu erkennen, dass die Positions- und Geschwindigkeitsinformationen als einzelne Schur-Komplemente zusammengesetzt sind und diese feste Positionen innerhalb dieser Darstellung besitzen. Durch die Wahl eines zur Erzeugung der Krylov-Base geeigneten Algorithmus bleibt diese Struktur erhalten. Somit ist eine Zuordnung der Positions-, Geschwindigkeits- und gegebenenfalls Beschleunigungsinformationen auch im niedrigdimensionalen Modell möglich sowie die Rücktransformation in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung umsetzbar. Diese Eigenschaften sind für die mechatronische bzw. gekoppelte Simulation wichtig. In Unterkapitel 5.3.1 wird eine Auswahl an Algorithmen vorgestellt und deren Einfluss auf die Reduktionsqualität untersucht.

5.3 Einflussgrößen zur Erstellung des reduzierten Systems

Aufgrund der Tatsache, dass für die Krylov-Unterraummethode keine Fehlerschranke existiert, kann die Güte des reduzierten Systems während des Reduktionsvorgangs nicht angegeben werden. Dies macht die Wahl geeigneter Reduktionsparameter, wie bspw. den Reduktionsgrad L, den Entwicklungspunkt s_0 und die Deflationsgrenze δ, problematisch. Daher werden diese Parameter hinsichtlich auf die Reduktionsqualität untersucht und Empfehlungen für die Praxis formuliert. Zusätzlich werden die unterschiedlichen Algorithmen betrachtet, mit denen sich die reduzierten Systeme erzeugen lassen, da diese das Approximationsverhalten mitbestimmen. Die reduzierten Systeme werden im Frequenzbereich sowie im Zeitbereich betrachtet.

Aus Unterkapitel 5.1 ist bekannt, dass unterschiedliche Kriterien zur Beurteilung der Qualität der reduzierten Systeme existieren. Neben der Übereinstimmung des reduzierten Systems mit dem Referenzsystem in Bezug auf den Frequenzbereich ist für die numerische Untersuchung der Werkzeugmaschine auch die Übereinstimmung im Zeitbereich notwendig. Daher werden in diesem Unterkapitel Kriterien erarbeitet, mit denen eine effiziente Beurteilung der Modellordnungsreduktionsqualität möglich ist.

Gleichung 5-1 beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Originalzustandsvektor $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}}$ und dem reduzierten Zustandsvektor $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,red}}$. Der Unterschied zwischen dem Referenzsystem und dem reduzierten System wird durch den Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ ausgedrückt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,red}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} \tag{5-12}$$

Mit dem Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ können aber keine direkten Aussagen über die Qualität des reduzierten Gesamtsystems im Zeit- oder Frequenzbereich getroffen werden. Somit steht mit diesem Fehler auch keine Kennzahl zur Verfügung, die als Abbruchkriterium für die maximale Dimension L dienen könnte. Deshalb wird ein anderes Kriterium benötigt.

Zur Beurteilung der Modellqualität des reduzierten Systems werden daher die frequenzabhängige absolute Abweichung $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}(f)$ in Gleichung 5-13 und der frequenzabhängige relative Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{rel}}(f)$ in Gleichung 5-14 verwendet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}(f) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{P,ref}}(f) - \boldsymbol{H}_{\mathrm{P,red}}(f) \tag{5-13}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{rel}}(f) = \left| \frac{\left| \boldsymbol{H}_{\mathrm{P,ref}}(f) - \boldsymbol{H}_{\mathrm{P,red}}(f) \right|}{\boldsymbol{H}_{\mathrm{P,ref}}(f)} \right| \tag{5-14}$$

Für die Beurteilung der reduzierten Systeme besitzt eine Kennzahl eine höhere praktische Relevanz als eine frequenzabhängige Funktion. Daher werden der Mittelwert der absoluten Abweichung $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}$ in Gleichung 5-15 und die zugehörige Standardabweichung der absoluten Abweichung σ_{ε} in Gleichung 5-16 für einen festgelegten Frequenzbereich definiert. Dabei beschreibt n die Anzahl der Frequenzstützpunkte des festgelegten Frequenzbereichs f_{B}.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}(f_i) \tag{5-15}$$

$$\sigma_{\varepsilon} = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}(f_i) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{abs}} \right)^2} \tag{5-16}$$

Aufgrund der direkten Interpretation der hieraus resultierenden Amplitudenabweichung im Zeitbereich wurden die Mittelwerte und die Standardabweichungen der absoluten Abweichung statt der relativen Abweichung gewählt. Die Umrechnung in Gleichung 5-17 gibt die Änderung des linearen Betrags von A_1 zu A_2 an, mittels der logarithmischen Amplitude A_{dB}

$$A_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right). \tag{5-17}$$

Der Vergleich der reduzierten Systeme im Zeitbereich wird mit der Sprungantwort des Systems im Zustandsraum statt mit der Impulsantwort in Form einer Dirac-Funktion durchgeführt, obwohl die Vergleichbarkeit durch die Dirac-Distribution mit den Messergebnissen aus der Modalanalyse gegeben wäre. Aufgrund der besseren und genaueren numerischen Umsetzbarkeit wird hier die Sprungfunktion als Heaviside-Funktion verwendet. Die miteinander zu vergleichenden Systeme werden mit einem Einheitssprung aus Gleichung 4-3 nach SHAMPINE und GAHINET [SHA06] belastet.

Um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu garantieren, werden die Schwingungen im Zeitraum von $t = 0$ s bis $t = 1{,}4$ s betrachtet. Außerdem wird für die Berechnung die feste Rechenschrittweite $h = 0{,}0001$ s verwendet. Bei einer sich einstellenden Phasenverschiebung der Systemantwort sind der absolute Fehler und die zugehörige Standardabweichung nicht zielführend. Um aber einen Eindruck der Modellgenauigkeit im Zeitbereich zu erhalten, wird zusätzlich eine zeitliche Vergrößerung der Systemantwort für den Zeitbereich von $t = 0$ s bis $t = 0{,}1$ s dargestellt. Die Systemantwort der reduzierten Systeme bezüglich der Heaviside-Funktion wird mit der MATLAB-Funktion „step“ berechnet.

5.3.1 Algorithmen und ihren numerischen Varianten

In Gleichung 5-2 ist die allgemeine Definition des Krylov-Unterraums dargestellt, der durch die Vektorentrajektorie $\{(\tilde{\boldsymbol{r}}_0), (\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{r}}_0), \cdots, (\tilde{\boldsymbol{A}}^{L-1}\tilde{\boldsymbol{r}}_0)\}$ aufgespannt wird. Der Startvektor ist $\tilde{\boldsymbol{r}}_0$ und die folgenden Krylov-Vektoren werden fortlaufend nach dem Muster

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_1 = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{r}}_0, \quad \tilde{\boldsymbol{r}}_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{r}}_1, \quad \ldots, \quad \tilde{\boldsymbol{r}}_i = \tilde{\boldsymbol{A}}^{i-1}\tilde{\boldsymbol{r}}_1 \tag{5-18}$$

durchnummeriert. Für die Ermittlung der Momente zum Aufspannen des Krylov-Unterraums existieren unterschiedliche numerische Algorithmen. Bei der direkten Berechnung der Momente treten neben der Herausforderung der zu großen Matrizen noch zusätzliche numerische Probleme auf, die durch Rundungsfehler oder schlecht konditionierte Matrizen hervorgerufen werden. Solche schlecht konditionierten Matrizen können bspw. dann entstehen, wenn im FE-Modell mit masselosen Feder-Dämpfer-Elementen oder mit MPCs gearbeitet wird. Die Struktur, der Zustand und die Kondition des FE-Modells werden in Unterkapitel 4.3.5 dargestellt und in Bild 5-17 visualisiert. Aufgrund dieser numerischen Problemstellung werden die Momente durch die iterative Methode mittels Arnoldi-Algorithmen berechnet [GRI97, ANT05]. Auf die detaillierte Beschreibung und Herleitung der Algorithmen wird hier verzichtet. Stattdessen sei der interessierte Leser an die Referenzen MEIER [MEA08] und SAAD [SAA03] verwiesen.

Für das bessere Verständnis der verwendeten Algorithmen soll hier als erstes der einfache Arnoldi-Algorithmus ohne Deflation für ein SISO-System gezeigt werden, wie in Bild 5-2 als Pseudoalgorithmus dargestellt. Dieser Algorithmus benötigt die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ und einen Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$. Der Arnoldi-Algorithmus liefert bei einem gegebenen Abbruchkriterium L die Matrix $\boldsymbol{V}$ mit den Krylov-Basen $\boldsymbol{v}_i$ als Spaltenvektoren. Der hier betrachtete Arnoldi-Algorithmus berechnet iterativ die orthogonalen Basisvektoren. Jeder neu berechnete und dann hinzugefügte Spaltenvektor ist ebenfalls ein Element des entsprechenden Krylov-Unterraums. Es existieren unterschiedliche Ausprägungen, wie der Algorithmus aufgebaut ist bzw. wie die zu berechnenden Vektoren orthogonalisiert und normalisiert werden [SAA03, WAT05, TAN07, MEA08]. Dieser Algorithmus ist als Standardalgorithmus im Programm MOR for ANSYS implementiert.

Pseudoalgorithmus: Arnoldi

Eingang: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, L

Ausgang: $\boldsymbol{V}$ als Matrix der Krylov-Basen

1	$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|_2}$	Normalisierung des Eingangsvektors als Startvektor
2	for $j = 1, \ldots, L$	äußere Schleife zur Berechnung der Vektoren
3	$\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}_j$	Berechnung des nächsten Vektors
4	for $i = 1, \ldots, j$	innere Schleife zur Orthogonalisierung
5	$\boldsymbol{h}_{i,j} = \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w}_j$	
6	$\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{h}_{i,j} \cdot \boldsymbol{v}_i$	Gram-Schmidt-Orthogonalisierung
7	end for	
8	if $\boldsymbol{w}_i = 0$	
9	Abbruch	
10	else	
11	$\boldsymbol{v}_{j+1} = \frac{\boldsymbol{w}_j}{\|\boldsymbol{w}_j\|_2}$	Normalisierung der berechneten Krylov-Basenvektoren
12	end if	
13	$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_j]$	Hinzufügung der Basen der Spaltenvektoren
14	end for	

Bild 5-2: Einfacher Arnoldi-Algorithmus mit modifizierter Gram-Schmidt-Orthogonalisierung nach GRIMME [GRI97]

Als nächstes wird das Arnoldi-Verfahren zweiter Ordnung (engl.: Second Order Arnoldi, kurz: SOAR) betrachtet [SAL05]. Im SOAR-Algorithmus in Bild 5-3 wird das verallgemeinerte Verfahren für ein MIMO-System gezeigt. Das SOAR-Verfahren unterscheidet sich vom klassischen Arnoldi-Verfahren dadurch, dass die Krylov-Vektoren durch die Rekursionsbeziehung aufgebaut werden [BAI05]. Dies wird in der folgenden Gleichung dargestellt:

$$\begin{aligned}
\breve{\boldsymbol{r}}_0 = \breve{\boldsymbol{B}} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_0^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \boldsymbol{h}_0 \end{pmatrix} \\
\breve{\boldsymbol{r}}_1 = \breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{B}} = \breve{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{h}_0 &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_0^{-1}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{h}_0 + \boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}\boldsymbol{h}_1\right) \\ \boldsymbol{h}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_2 \\ \boldsymbol{h}_1 \end{pmatrix} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\breve{\boldsymbol{r}}_i = \breve{\boldsymbol{A}}^i\breve{\boldsymbol{B}} = \breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{r}}_{i-1} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_0^{-1}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{h}_{i-1} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}\boldsymbol{h}_i\right) \\ \boldsymbol{h}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_{i+1} \\ \boldsymbol{h}_i \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5-19}$$

Diese Rekursionsbeziehung kann nun in Gleichung 5-2 eingesetzt werden, um die zugehörige Matrix-Struktur des Block-Krylovs zu erhalten. Diese Beziehung wird in Zeile 3, 5 und 7 des Algorithmus in Bild 5-3 berücksichtigt und genutzt, um orthonormale Basen des Krylov-Unterraums zu erzeugen. Mit diesem Algorithmus lassen sich Systeme zweiter Ordnung reduzieren. Somit kann für Systeme zweiter Ordnung die Dämpfung bei Reduktionsvorgang berücksichtigt werden, im Gegensatz zur klassischen Krylov-Unterraummethode.

Der SOAR-Algorithmus in Bild 5-3 benötigt die Matrizen $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{G}_0^{-1}$ und $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{E}_{\mathrm{ME}}$ sowie die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}$. Zusätzlich werden zur Berechnung der Blöcke das Abbruchkriterium als Dimensionsgrad L und die Deflationstoleranzgrenze δ benötigt.

Pseudoalgorithmus: SOAR mit Deflation

Eingang: $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{B}$, L und δ

Ausgang: $\boldsymbol{V}$ als Matrix der Krylov-Basen

1	for $j = 1, \ldots, L$	Schleife zur Berechnung der Blöcke
2	if ($j == 1$)	Fallunterscheidung für den ersten Basenvektor
3	$\boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{0}$	Startblöcke mit $\boldsymbol{r}_o$ als oberem und $\boldsymbol{r}_u$ als unterem Block
4	else if ($j == 2$)	Fallunterscheidung für den zweiten Basenvektor
5	$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_o$; $\boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{r}_o$	Berechnung der Blöcke im zweiten Durchlauf
6	else	Fallunterscheidung für die restlichen Basenvektoren
7	$\boldsymbol{r}_{alt} = \boldsymbol{r}_o$ $\boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{r}_u$; $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_{alt}$	Berechnung der weiteren Blöcke
8	end if	
9	for $i = 1$, …, Spaltenanzahl von $\boldsymbol{r}_o$	
10	for $j = 1$, …, Spaltenanzahl von $\boldsymbol{V}_o$	
11	$\boldsymbol{h}_{i,j} = \boldsymbol{r}_{o,i}^{*} \cdot \boldsymbol{V}_{o,j}$	
12	$\boldsymbol{r}_{o,i} = \boldsymbol{r}_{o,i} - \boldsymbol{h}_{i,j} \cdot \boldsymbol{V}_{o,j}$	Orthogonalisierung des oberen Blocks
13	$\boldsymbol{r}_{u,i} = \boldsymbol{r}_{u,i} - \boldsymbol{h}_{i,j} \cdot \boldsymbol{V}_{u,j}$	Orthogonalisierung des unteren Blocks
14	end for	
15	$h_o = \|\boldsymbol{r}_{o,i}\|_2$	Normalisierung
16	$h_u = \|\boldsymbol{r}_{u,i}\|_2$	Normalisierung
17	if ($h_o > \delta$)	Überprüfung bzgl. der Deflationsgrenze
18	$\boldsymbol{v}_o = h_o^{-1} \cdot \boldsymbol{r}_{o,i}$; $\boldsymbol{v}_u = h_u^{-1} \cdot \boldsymbol{r}_{u,i}$	
19	$\boldsymbol{V}_o = [\boldsymbol{V}_o \; \boldsymbol{v}_o]$; $\boldsymbol{V}_u = [\boldsymbol{V}_u \; \boldsymbol{v}_u]$	Hinzufügung des Vektors
20	else if ($h_u > \delta$)	Überprüfung bzgl. der Deflationsgrenze
21	$\boldsymbol{v}_o = 0$; $\boldsymbol{v}_u = \boldsymbol{r}_{u,i}$	
22	$\boldsymbol{V}_o = [\boldsymbol{V}_o \; \boldsymbol{v}_o]$; $\boldsymbol{V}_u = [\boldsymbol{V}_u \; \boldsymbol{v}_u]$	Hinzufügung des Vektors
23	else	
24	Inexakte Deflation zur Löschung der linearabhängigen Basenvektoren	
25	end if	
26	end for	
27	end for	
28	Löschen der Nullspalten von $\boldsymbol{V}_o$	
29	$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_o$	

Bild 5-3: Arnoldi-Verfahren zweiter Ordnung nach SALIMBAHRAMI und LOHMANN [SAL05] inklusive Deflation

Als Ausgang liefert dieser Algorithmus die Krylov-Basen als Spaltenvektoren der Projektionsmatrix $\boldsymbol{V}$. Mit der Deflationstoleranzgrenze δ in Zeile 17 - 25 wird bestimmt, ab wann die annähernd linear unabhängigen Spaltenvektoren gelöscht werden.

Nun wird eine Variante des Block-Arnoldi-Algorithmus vorgestellt, der Block-Arnoldi nach PRIMA. Der Algorithmus ist in Bild 5-4 abgebildet. Das Akronym PRIMA steht für: Passive-Reduced-Order-Interconnect-Macromodelling-Algorithm [ODA98].

Pseudoalgorithmus: Block-Arnoldi mit Deflation

Eingang: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, L und δ

Ausgang: $\boldsymbol{V}$ als Matrix der Krylov-Basen

1	$c = 0;\ q = m$	Index für die Deflation und die Kandidatenvektoren
2	for $j = 1, \ldots, m$	m als Spaltenvektorenanzahl
3	$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{R}_0(:,j)$	$\boldsymbol{R}_0$ mit linearunabhängigen Spaltenvektoren
4	for $i = 1, \ldots, L$	
5	while $\|\boldsymbol{v}_j\|_2 \le \delta$	Überprüfung, ob Deflationsgrenze erreicht
6	$c = c + 1;\ q = q_{-1} - 1$	Indexverschiebung bei Erreichung der Deflation
7	if ($m_c == 0$)	
8	$L = j - 1$; Abbruch	Abbruch, wenn keine Kandidatenvektoren vorliegen
9	end if	
10	for $i = j, \ldots, j + q$	
11	$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i+1}$	Auswahl des nächsten Kandidatenvektors
12	end for	
13	end while	
14	$\boldsymbol{h}_{j,j-q} = \|\boldsymbol{v}_j\|_2$	
15	$\boldsymbol{v}_j = \dfrac{\boldsymbol{v}_j}{\boldsymbol{h}_{j,j-q}}$	Normierung
16	$\boldsymbol{v}_{j+q} = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_j$	Berechnung des nächsten Basenvektors
17	for $i = 1, \ldots, j$	
18	$\boldsymbol{h}_{i,j} = \hat{\boldsymbol{v}}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_{j+q}$	Produkt für die Orthogonalisierung
19	$\boldsymbol{v}_{j+q} = \boldsymbol{v}_{j+q} - \boldsymbol{h}_{i,j} \hat{\boldsymbol{v}}_j$	Orthogonalisierung
20	end for	
21	for $i = j - q + 1, \ldots, j - 1$	
22	$\boldsymbol{h}_{j,i} = \hat{\boldsymbol{v}}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_{i+q}$	Produkt für die Orthogonalisierung
23	$\boldsymbol{v}_{i+q} = \boldsymbol{v}_{i+q} - \boldsymbol{h}_{j,i} \hat{\boldsymbol{v}}_j$	Orthogonalisierung
24	end for	
25	end for	
26	$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_j]$	Hinzufügung der Basen der Spaltenvektoren
27	end for	

Bild 5-4: Block-Arnoldi als PRIMA-Algorithmusvariante nach ODABASIOGLU ET AL. [ODA98] inklusive Deflation

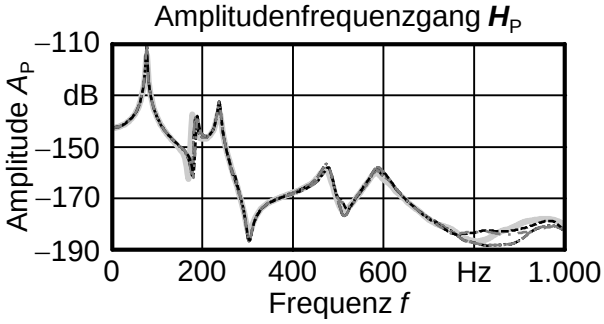
Hierbei handelt es sich um einen Arnoldi-Algorithmus, der ebenfalls das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren in den Zeile 18 - 25 zum Orthogonalisieren verwendet. Dieses Verfahren ist generell für MIMO-Systeme geeignet [LIE07] und kommt häufig für die Erzeugung reduzierter passiver Modelle zur Anwendung [TAN07]. Der Block-Arnoldi-Algorithmus ist neben dem

SOAR-Algorithmus auch im Programm MOR for ANSYS implementiert, dass im Rahmen der Arbeit verwendet wird. Ein großer Vorteil dieses Algorithmus besteht darin, dass die reduzierten Modelle eine blockdiagonale Struktur erhalten, wie in Bild 5-27 dargestellt. Durch diese Eigenschaft wird die Simulationszeit mit den reduzierten Modellen nochmals verringert. Durch die Orthogonalisierung weisen die Verfahren allerdings einen von der Ein- und Ausgangsdimension abhängigen numerischen Aufwand auf. Daher sind diese Verfahren für hochdimensionale Ein- und Ausgangsräume nicht geeignet, wie auch von TAN [TAN07] bestätigt. Aufgrund der großen Nachfrage in der Simulationstechnik wird die Krylov-Unterraummethode ständig weiterentwickelt, um Effizienz, Geschwindigkeit und Robustheit der iterativen Gleichungslösungsalgorithmen zu erhöhen. Dadurch steht eine Vielzahl an Varianten der Algorithmen zur Verfügung, um die Basisvektoren iterativ zu ermitteln [MEA08]. Der Vergleich wird in dieser Arbeit folglich nur mit ausgesuchten Algorithmen durchgeführt. In Bild 5-5 ist der Vergleich im Frequenzbereich und in Bild 5-6 im Zeitbereich dargestellt.

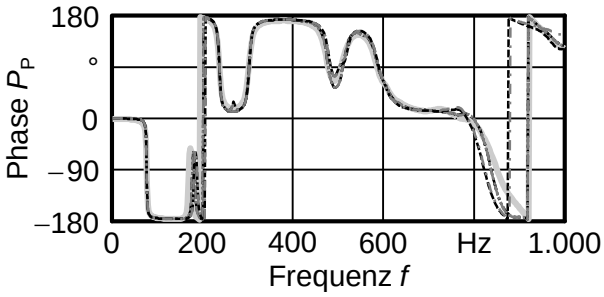
Für die bessere Visualisierung der zu untersuchenden Eigenschaften und die Minimierung der Störeinflüsse wird anstelle des komplexeren Gesamtsystems das einfache FE-Modell des Teilsystems 1 als Referenzsystem verwendet. Die Beschreibung und Definition des Teilsystems 1 wird in Unterkapitel 0 durchgeführt. Der Amplitudenfrequenzgang $\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ wird auch hier bis $f_{\mathrm{Bo}} = 1.000$ Hz von Auswertepunkt 8 von mehreren reduzierten Systemen dargestellt. Die Anregung findet am Portal mit der Anregungskraft $F_{\mathrm{AY}} = 10$ N statt. Die reduzierten Systeme wurden mit unterschiedlichen Reduktionsalgorithmen erstellt. Für den Vergleich wird zusätzlich der Amplitudenfrequenzgang $\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ des Referenzsystems abgebildet.

In Bild 5-5 ist zu erkennen, dass die Approximationsqualität im Frequenzbereich des reduzierten Systems vom Reduktionsalgorithmus abhängt. Da die Ergebnisse auch von der Dämpfungsmodellierung beeinflusst werden, sind die reduzierten Systeme mit zwei unterschiedlichen Realisierungen der Dämpfungsmatrix dargestellt. Die Abkürzung $\mathrm{E}_{\mathrm{ref}}$ bezeichnet das reduzierte System, dessen Dämpfung aus der Reduktion der Referenzdämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ref}}$ besteht. Dagegen beschreibt die Abkürzung $\mathrm{E}_{\mathrm{red}}$ das reduzierte System, dessen Dämpfung mittels der Bequemlichkeitshypothese aus Gleichung 2-2 mit der reduzierten Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{\mathrm{red}}$ und der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{red}}$ erstellt worden ist.

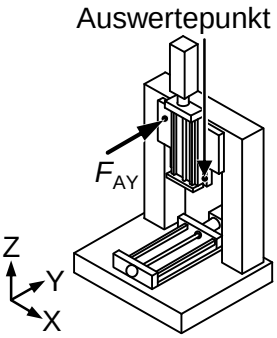
Hierbei lässt sich nicht eindeutig feststellen, welcher Reduktionsalgorithmus das reduzierte System mit der geringsten Abweichung im Frequenzbereich liefert. Daher werden die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}$ aus Gleichung 5-15 und die zugehörigen Standardabweichungen σ_{ε} aus Gleichung 5-16 herangezogen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5-2 aufgelistet. Zusätzlich wird die Anzahl der instabilen Pole im Zustandsraum dargestellt. Die Eigenwerte dieser instabilen Pole, die mit der Zustandsraummatrix $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}$ berechnet werden, befinden sich auf der positiven Hälfte der imaginären Ebene, folglich ist das reduzierte System instabil. Dies ist der größte Nachteil der Krylov-Unterraummethode, denn dieses Verfahren garantiert kein stabiles Ersatzsystem, obwohl das Referenzsystem stabil ist. Durch unterschiedliche Techniken, die in Unterkapitel 6.2 Anwendung finden, werden die Systeme stabilisiert, um sie dennoch für die Berechnung zu verwenden.



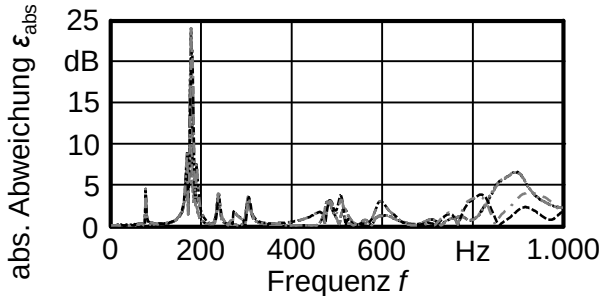
System:	Teilsystem 1	
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum	
Referenzsystem:	N_{FHG}	= 1.243.265
Dimension:	L	= 40
Entwicklungspunkt:	s_0	= 0
Deflationsgrenze:	δ	= 10^{-12}
Dämpfung:	α	= 7,5
	β	= 0,0000125



Algorithmenvariation
- Arnoldi E_{ref}
- Arnoldi E_{red}
- Block-Arnoldi E_{ref}
- Block-Arnoldi E_{red}
- SOAR E_{ref}
- SOAR E_{red}
- Referenzsystem



E_{ref}: Dämpfungsmatrix ist die reduzierte Dämpfungsmatrix des Referenzsystems
E_{red}: Dämpfungsmatrix nach der Bequemlichkeitshypothese mit den reduzierten Matrizen



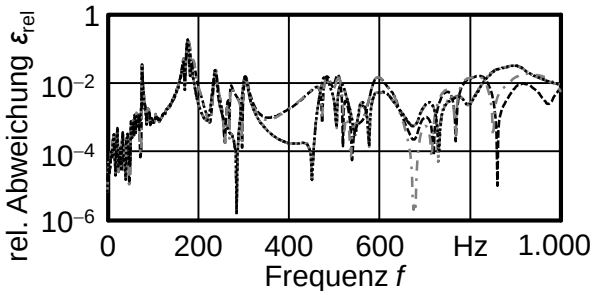


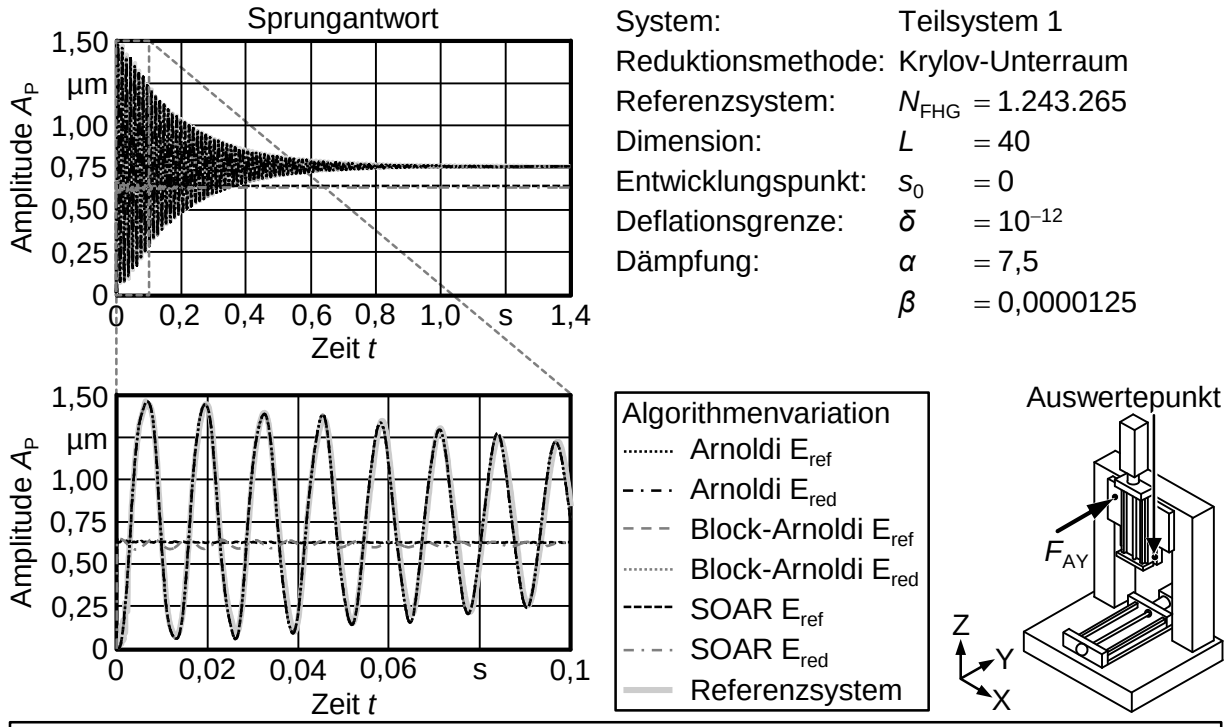
Bild 5-5: Einfluss der Reduktionsalgorithmen des reduzierten Systems auf die Approximationsgüte im Frequenzbereich

Tabelle 5-2: Übersicht der Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε sowie die Anzahl der instabilen Pole

Bezeichnung	Arnoldi E_{ref}	Arnoldi E_{red}	Block-Arnoldi E_{ref}	Block-Arnoldi E_{red}	SOAR E_{ref}	SOAR E_{red}
Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$	1,445 dB	1,454 dB	1,447 dB	1,456 dB	1,319 dB	1,529 dB
Standardabweichung σ_ε	2,231 dB	2,237 dB	2,232 dB	2,237 dB	2,077 dB	2,186 dB
Anzahl instabiler Pole im Zustandsraum	0	6	0	4	5	5

Der SOAR-Algorithmus aus Bild 5-3 liefert das reduzierte System mit der geringsten Abweichung im Frequenzbereich zum Referenzsystem. Für beide Realisierungsvarianten der Dämpfungsmatrizen entstehen instabile Eigenwerte λ_{ins} des reduzierten Systems. Es wurde beobachtet, dass die Anzahl der instabilen Pole von der Entwicklungsgliederanzahl L abhängt. Beispielsweise entsteht für das reduzierte System mit der Dimension $L = 39$, das mit dem

SOAR-Algorithmus erstellt wurde, ein System mit 7 instabilen Eigenwerten λ_{ins}. In Bild 5-6 dagegen ist zu erkennen, dass das reduzierte System nicht dem Referenzsystem im Zeitbereich folgt. Daher ist für dieses Teilsystem der SOAR-Algorithmus nicht geeignet. In dieser Darstellung wird die Sprungantwort aufgrund eines Einheitssprungs dargestellt. Es lässt sich feststellen, dass die reduzierten Systeme, die mittels Arnoldi-Algorithmus und Block-Arnoldi-Algorithmus erstellt wurden, bezüglich der Amplitude A_P und der Phase P im Zeitbereich eine hohe Übereinstimmung mit dem Referenzsystem aufweisen. Da der Block-Arnoldi-Algorithmus ein stabiles reduziertes System liefert, wird dieser für die weiteren Untersuchungen verwendet.



E_{ref}: Dämpfungsmatrix ist die reduzierte Dämpfungsmatrix des Referenzsystems
E_{red}: Dämpfungsmatrix nach der Bequemlichkeitshypothese mit den reduzierten Matrizen

Bild 5-6: Zeitverhalten bezüglich einer Einheitssprungantwort der reduzierten Systeme in Abhängigkeit von unterschiedlichen Reduktionsalgorithmen

Die Berechnungszeit der Sprungantwort liegt bei einem 4-Kern Computer mit einer CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher zwischen $t_R = 2$ min und $t_R = 3$ min.

5.3.2 Entwicklungsgliederanzahl

Die Anzahl der Entwicklungsglieder L beeinflusst den Approximationsbereich und bestimmt die Dimension L des reduzierten Systems. In Bild 5-7 wird dieser Einfluss der Entwicklungsgliederanzahl L auf das Approximationsverhalten des Amplitudenfrequenzgangs $\boldsymbol{H}_A$ visualisiert und in Bild 5-9 das jeweilige Verhalten im Zeitbereich demonstriert. Auch hier wird das einfache FE-Modell des Teilsystems 1 als Referenzsystem verwendet.

In Bild 5-7 ist der Amplitudenfrequenzgang $\boldsymbol{H}_P$ bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz von Auswertepunkt 8 mit der Anregung am Portal und der Anregungskraft $F_{AY} = 10$ N für eine Auswahl unterschiedlicher Dimensionen L des reduzierten Systems und des Referenzsystems dargestellt. Im Bild ist zu erkennen, dass die Abbildungsgenauigkeit im Frequenzbereich ausgehend vom festen Entwicklungspunkt $s_0 = 0$ s^{-1} des reduzierten Systems mit der Anzahl der Entwicklungsglieder L

steigt. Mit der Entwicklungsgliederanzahl L erhöhen dementsprechend auch die Dimensionen des reduzierten Systems und der Approximationsgüte. Außerdem bestimmt diese Anzahl ebenfalls die Höhe der Frequenzanteile des Systems. Diese Eigenschaft kann daher für die Erzeugung echtzeitfähiger Modelle genutzt werden [UHL12a]. So lassen sich für Echtzeitanwendungen gezielt Modelle erzeugen, die keine hohen Eigenwerte λ besitzen. Dies ist günstig, da die hohen Eigenwerte λ die Rechenzeiten t_R erhöhen, indem die Rechenschrittweite h dementsprechend reduziert wird, wie in Bild 2-10 dargestellt wurde.

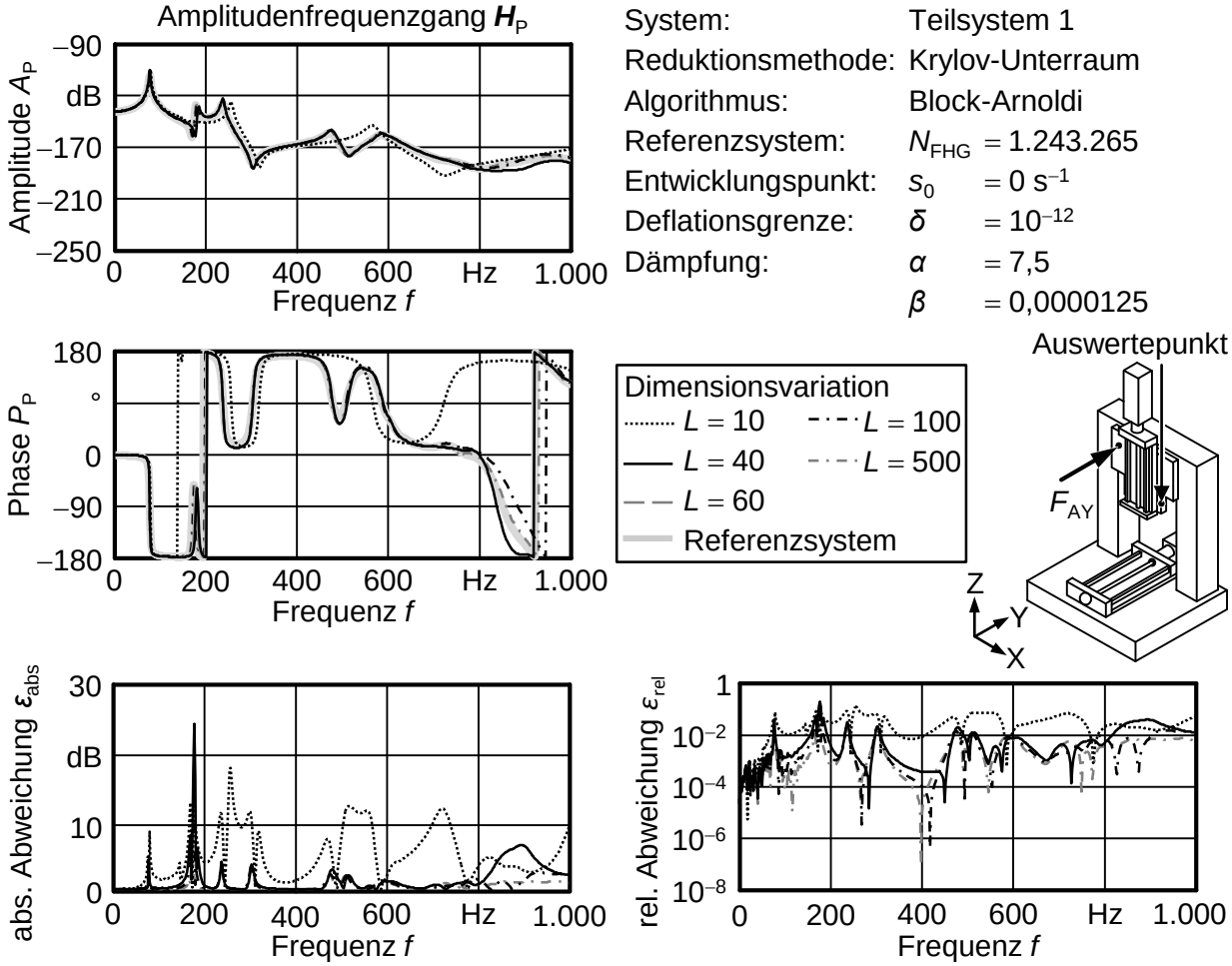


Bild 5-7: Durch die Anzahl der Entwicklungsglieder L des reduzierten Systems bestimmter Einfluss auf die Approximationsgüte

Zur Visualisierung des Einflusses der Entwicklungsgliedanzahl L wird zusätzlich die absolute Abweichung ε_{abs} und die relative Abweichung ε_{rel} über die Frequenz f gezeigt. Die relative Abweichung ε_{rel} besitzt Werte über mehrere Größenordnungen. Daher wird der zugehörige Abweichungsamplitudenwert logarithmisch aufgetragen. Die beiden genannten Abweichungen beschreiben die Differenz der Amplitudenfrequenzgänge und nicht der Phasengänge. In Bild 5-7 ist zu erkennen, dass für alle gewählten Parametersätze des Reduktionsvorgangs die daraus resultierenden reduzierten Systeme bis ca. $f = 120$ Hz eine hohe Übereinstimmung mit dem Amplitudenfrequenzgang $\boldsymbol{H}_{P,ref}$ des Referenzsystems aufweisen. Oberhalb der Frequenz $f > 120$ Hz ist der Dimensionseinfluss des reduzierten Systems durch die Änderung der absoluten Abweichung ε_{abs} und der relativen Abweichung ε_{rel} leicht erkennbar. Das reduzierte System mit der Dimension $L = 40$ besitzt bereits eine hohe Approximation zu dem Referenzsystem

bis $f = 800$ Hz. In diesem Bereich ist die absolute Abweichung $\varepsilon_{abs} \leq 5$ dB bis auf die Ausnahme im Frequenzbereich von $f = 170$ Hz bis $f = 190$ Hz. In diesem Ausnahmebereich ist die Differenz in Form der absoluten Abweichung von $\varepsilon_{abs} \leq 25$ dB zu erkennen. Oberhalb der Frequenz $f > 800$ Hz steigt die absolute Abweichung auf bis zu $\varepsilon_{abs} = 8$ dB an.

Bei den gewählten Dimensionsgrößen L ist zu erkennen, dass die jeweiligen Ersatzsysteme bei der Amplitudenspitze mit der Frequenz $f = 178$ Hz immer eine hohe Abweichung besitzen. Bei dieser Frequenz ist die Nick-Bewegung des Z-Schlittenmotors dominant. Die hohe Differenz im Frequenzbereich um $f = 178$ Hz ist in der Darstellung der absoluten Abweichung ε_{abs} und der relativen Abweichung ε_{rel} deutlich erkennbar.

Durch die Angabe der frequenzabhängigen, absoluten Abweichung ε_{abs} und der relativen Abweichung ε_{rel} ist eine Beurteilung der MOR möglich. Beispielsweise befähigt die Definition einer Abweichungsschranke zur Identifizierung eines geeigneten Dimensionsgrads L. Eine andere Möglichkeit, den geeigneten Dimensionsgrad L festzustellen, wird durch die Definition von Kennzahlen erlaubt. Solche Kennzahlen für einen festgelegten Frequenzbereich f_B sind zum einen der Mittelwert der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ aus Gleichung 5-15, zum anderen die zugehörige Standardabweichung σ_ε aus Gleichung 5-16. In Bild 5-8 werden die unterschiedlichen Mittelwerte mit den zugehörigen Standardabweichungen in Abhängigkeit vom Reduktionsgrad L dargestellt. Die Reduktionsdimension wird von $L = 10$ bis $L = 1.000$ variiert. Im Bereich von $L = 10$ bis $L = 50$ wird der Dimensionsgrad um $\Delta L = 5$ erhöht. Von $L = 50$ bis $L = 200$ steigt der Dimensionsgrad dann um die Dimensionsdifferenz $\Delta L = 10$. Im restlichen Untersuchungsbereich von $L = 200$ bis $L = 1.000$ wird die Dimension jeweils um die Differenz $\Delta L = 100$ erhöht.

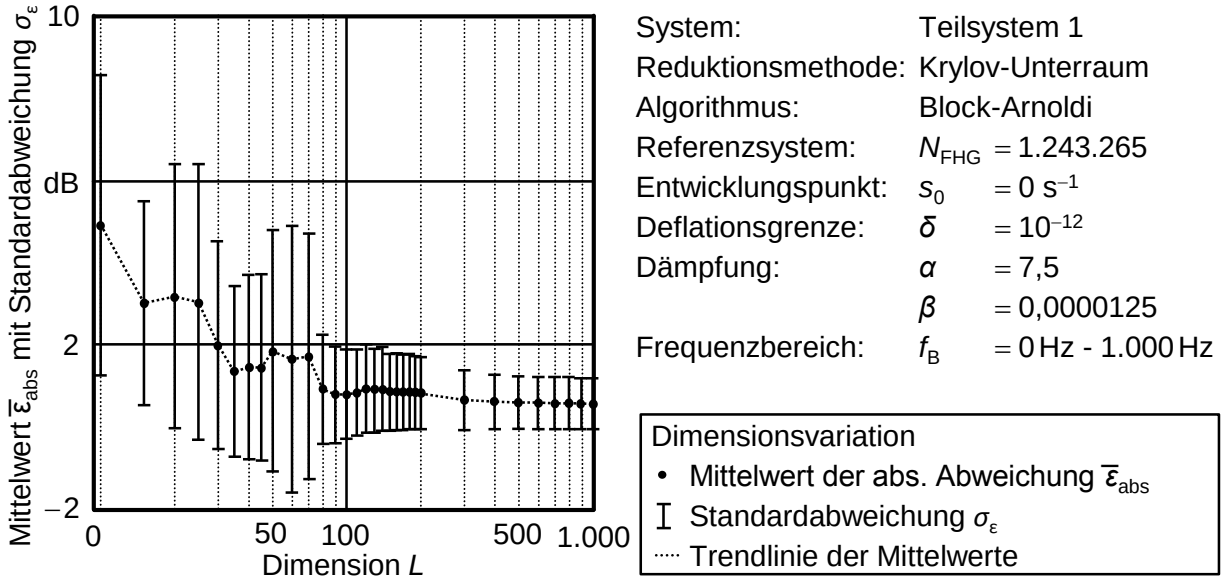


Bild 5-8: Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und Standardabweichung σ_ε der absoluten Abweichung des reduzierten Systems in Abhängigkeit von der Dimension L für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz

Mit steigendem Reduktionsgrad ab der Dimension $L = 20$ sinkt der Mittelwert der absoluten Abweichung bis $L = 45$ auf unter $\overline{\varepsilon}_{abs} \leq 1{,}45$ dB. Mit dem sinkenden Mittelwert verringert sich auch die zugehörige Standardabweichung von $\sigma_\varepsilon = 3{,}246$ auf $\sigma_\varepsilon = 2{,}930$. Von der Dimension $L = 50$ bis $L = 70$ steigt der Abweichungsmittelwert im Bereich von $\overline{\varepsilon}_{abs} = 1{,}65$ dB bis $\varepsilon_{abs} = 1{,}85$ dB an und mit dem Mittelwert auch die zugehörige Standardabweichung σ_ε von $\sigma_\varepsilon = 2{,}066$ auf $\sigma_\varepsilon = 3{,}354$. Ab der Dimension $L = 80$ sinkt der Mittelwert von $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}915$ dB auf

$\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}560$ dB. Ab der Dimension $L = 200$ ist keine nennenswerte Änderung der Abweichung mehr festzustellen. Die Standabweichung fällt mit dem Mittelwert der absoluten Abweichung von $\sigma_\varepsilon = 0{,}916$ auf $\sigma_\varepsilon = 0{,}559$. Daraus folgt, dass die Wahl der Dimension die Genauigkeit des reduzierten Systems bestimmt. Außerdem existiert für ein bestimmtes L ein genaues reduziertes System mit hoher Approximation des Referenzmodells bei einer möglichst geringen Dimension L. Die Herausforderung besteht darin, dieses L zu finden. Diese Thematik wird in Unterkapitel 5.5 behandelt.

Als nächstes werden die reduzierten Systeme im Zeitbereich durch die Sprungantwort analysiert. Für die Dimensionen $L = 10$ und $L = 20$ ist die Abweichung im Zeitbereich zu stark, um sie im Diagramm zu visualisieren. Daher werden die zugehörigen Sprungantworten in Bild 5-9 nicht gezeigt. Stattdessen wird das reduzierte System mit der Dimension $L = 30$ als Repräsentant von Systemen mit sehr niedriger Dimension dargestellt. In Tabelle 5-3 sind die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$, die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε und die Anzahl der instabilen Pole aufgelistet. Zusätzlich wird das gerundete Reduktionsverhältnis dargestellt, der das Verhältnis zwischen dem reduzierten und dem Referenzmodell beschreibt.

Tabelle 5-3: Übersicht der Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε sowie die Anzahl der instabilen Pole in Abhängigkeit von der Dimension des reduzierten Systems inklusive Reduktionsverhältnis

Bezeichnung	$L = 10$	$L = 20$	$L = 30$	$L = 40$	$L = 60$	$L = 100$
Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$	8,546 dB	3,211 dB	2,022 dB	1,447 dB	1,685 dB	0,796 dB
Standardabweichung σ_ε	8,858 dB	3,239 dB	2,534 dB	2,232 dB	3,339 dB	1,008 dB
Anzahl instabiler Pole im Zustandsraum	0	9	2	0	17	65
Reduktionsverhältnis	~ 124.300	~ 62.000	~ 41.000	~ 31.000	~ 20.700	~ 12.400

In Bild 5-9 ist zu erkennen, dass die Approximationsqualität im Zeitbereich durch die höhere Anzahl der Entwicklungsglieder L im Frequenzbereich zur Erstellung der Krylov-Basen positiv beeinflusst wird. Die Amplitude des Systems mit der Dimension $L = 30$ ist geringer als die des Referenzsystems und nimmt mit der Zeit auch stärker ab. Zusätzlich ist ersichtlich, dass dieses System einen Phasenversatz gegenüber dem Referenzsystem besitzt. Ab der Dimension $L = 40$ ist die Approximationsqualität des reduzierten Systems für die meisten numerischen Untersuchungen ausreichend. Die Berechnungszeit der Sprungantwort mit den unterschiedlichen reduzierten Systemen beträgt bei einem 4-Kern Computer mit einer CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher im Bereich von $t_R = 2$ min und $t_R = 4$ min.

Um eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten wird nun der Reduktionsgrad auf den Wert $L = 40$ festgesetzt. Mit dieser Dimension besitzt das Ersatzsystem für das Teilsystem 1, das mit dem Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ und einer Deflationsgrenze von $\delta = 10^{-12}$ erstellt wurde, eine absolute Abweichung von $\overline{\varepsilon}_{abs} = 1{,}458$ dB mit einer Standardabweichung von $\sigma_\varepsilon = 2{,}244$.

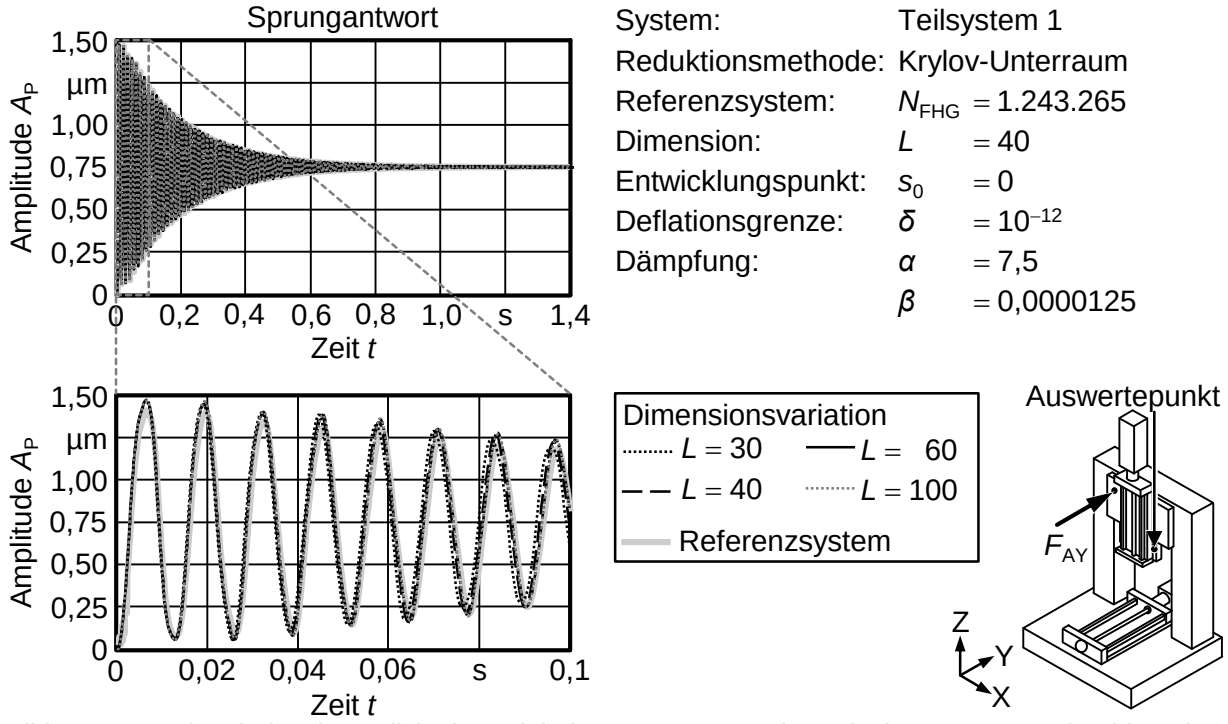


Bild 5-9: Zeitverhalten bezüglich einer Einheitssprungantwort der reduzierten Systeme in Abhängigkeit von der Dimension L

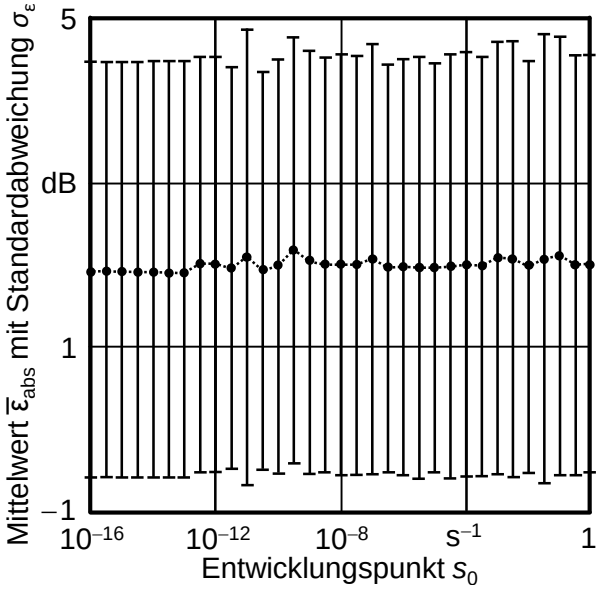
5.3.3 Entwicklungspunkt

Die Wahl des Entwicklungspunkts s_0 beeinflusst die Approximationsgüte des Ersatzmodells, wie exemplarisch in Bild 5-13 für den Frequenzbereich und in Bild 5-15 für den Zeitbereich dargestellt ist. Für Ersatzmodelle, deren Anwendung für hochfrequente dynamische Eigenschaften Verwendung finden, empfiehlt sich ein Entwicklungspunkt im hohen Frequenzbereich. Für Modelle, die im niederfrequenten Bereich und im statischen Falle eine hohe Approximationsgüte besitzen, wie es zum Beispiel bei Werkzeugmaschinen der Fall ist, empfiehlt sich grundsätzlich die Entwicklung im niederfrequenten Bereich. In Bild 5-10 sind die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε im Frequenzbereich von $f = 0$ Hz bis $f = 1.000$ Hz in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt s_0 in den Größenordnungen von $s_0 = 10^{-16}$ s^{-1} bis $s_0 = 1$ s^{-1} dargestellt. In diesem Diagramm werden die Entwicklungspunkte über mehrere Größenordnungen hinweg betrachtet. Daher wird eine logarithmische Skalierung für die Abszisse gewählt. Die Entwicklungspunkte sind äquidistant auf der logarithmisch skalierten Strecke verteilt.

Auch hier wird das Teilsystem 1 als Referenzsystem mit der Krylov-Unterraummethode mittels Block-Arnoldi-Algorithmus reduziert. Das System besitzt N_{FHG} = 1.243.265 Freiheitsgrade und wird am Punkt 8 ausgewertet. Die Dämpfung wird mittels der Bequemlichkeitshypothese aus der Gleichung 2-2 mit dem massenproportionalen Dämpfungsfaktor $\alpha = 7{,}5$ und dem steifigkeitsproportionalen Dämpfungsfaktor $\beta = 0{,}0000125$ im Referenzmodell modelliert.

In Bild 5-10 ist zu erkennen, dass die Qualität der reduzierten Systeme kaum durch die Variation des Entwicklungspunkts s_0 unterhalb von $s_0 \leq 1$ s^{-1} beeinflusst wird. Die Mittelwerte der absoluten Abweichung schwanken vom Entwicklungspunkt $s_0 = 10^{-16}$ s^{-1} bis $s_0 = 1$ s^{-1} zwischen den Werten $\overline{\varepsilon}_{abs} = 1{,}938$ dB und $\overline{\varepsilon}_{abs} = 2{,}106$ dB. Die Standardabweichungen befinden sich im Bereich von $\sigma_\varepsilon = 2{,}409$ bis $\sigma_\varepsilon = 2{,}764$. Auffällig ist, dass von $s_0 = 10^{-16}$ s^{-1} bis $s_0 = 10^{-13}$ s^{-1} keine Veränderung der Differenz zwischen dem reduzierten System und dem

Referenzsystem zu erkennen ist. Die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε ändern sich in diesem Bereich nicht. Die Ursache liegt in den geringen numerischen Werten des Entwicklungspunkts. Mit dem Entwicklungspunkt wird der Einflussgrad der Massenmatrix in der Übertragungsfunktion aus Gleichung 5-9 bestimmt. Ist dieser numerische Wert zu gering, dann befinden sich die Änderungen der geshifteten Matrizen in Gleichung 5-8 außerhalb der numerischen Maschinengenauigkeit. Dadurch wird die minimale Änderung des Masseneinflusses aufgrund des Rundungsfehlers egalisiert.



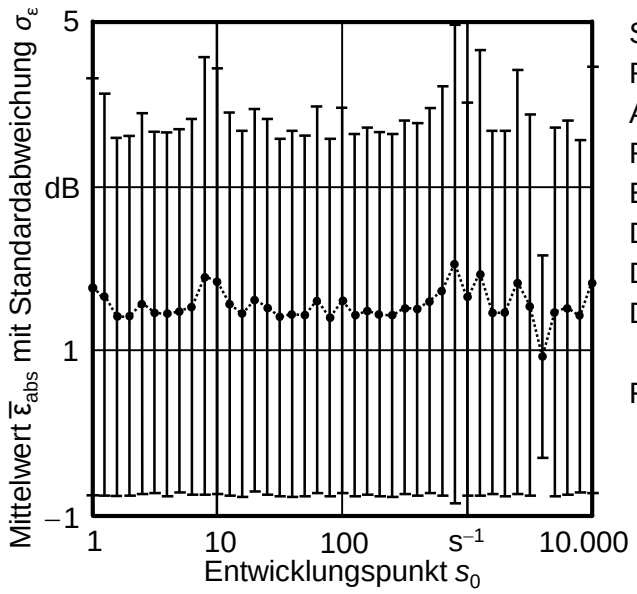
System:	Teilsystem 1	
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum	
Algorithmus:	Block-Arnoldi	
Referenzsystem:	N_{FHG}	= 1.243.265
Entwicklungspunkt:	s_0	= 10^{-16} s^{-1} - 1 s^{-1}
Deflationsgrenze:	δ	= 10^{-12}
Dimension:	L	= 40
Dämpfung:	α	= 7,5
	β	= 0,0000125
Frequenzbereich:	f_B	= 0 Hz - 1.000 Hz

Entwicklungspunktvariation
- Mittelwert der abs. Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$
- Standardabweichung σ_ε
- Trendlinie der Mittelwerte

Bild 5-10: Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und Standardabweichung σ_ε der absoluten Abweichung in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt in der Größenordnung von $s_0 = 10^{-16}$ s^{-1} bis $s_0 = 1$ s^{-1} für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz

Um den Einfluss der Entwicklungspunkte s_0 oberhalb von $s_0 \geq 1$ s^{-1} zu ermitteln, werden unterschiedliche Projektionsmatrizen für die Reduktion erstellt. Der Entwicklungspunkt s_0 wird von $s_0 = 1$ s^{-1} bis $s_0 = 10.000$ s^{-1} logarithmisch äquidistant variiert. Auch hier wird eine logarithmische Skalierung für die Abszisse gewählt. Das Ergebnis ist in Bild 5-11 gezeigt. In dieser Darstellung werden die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt s_0 dargestellt. Im Gegensatz zu den Entwicklungspunkten unterhalb von $s_0 = 1$ s^{-1} ist bei der Approximationsgüte des reduzierten Systems eine Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt s_0 zu erkennen. Der Mittelwert der absoluten Abweichung nimmt die Werte von $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}915$ dB bis $\overline{\varepsilon}_{abs} = 2{,}056$ dB ein. Die Schwankungen der Standardabweichungen befinden sich im Korridor von $\sigma_\varepsilon = 1{,}236$ bis $\sigma_\varepsilon = 2{,}926$.

In der Darstellung von Bild 5-11 sind der Mittelwert der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε für den Entwicklungspunkt $s_0 = 3.981$ s^{-1} auffällig: In diesem Punkt ist der Mittelwert der absoluten Abweichung mit $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}915$ dB $\pm$ 1,236 dB halb so groß wie bei den restlichen Entwicklungspunkten. Daher wird die Abhängigkeit des Entwicklungspunkts s_0 für den Bereich von $s_0 = 3.000$ s^{-1} bis $s_0 = 5.000$ s^{-1} detaillierter untersucht. Das zugehörige Ergebnis wird in Bild 5-12 dargestellt.

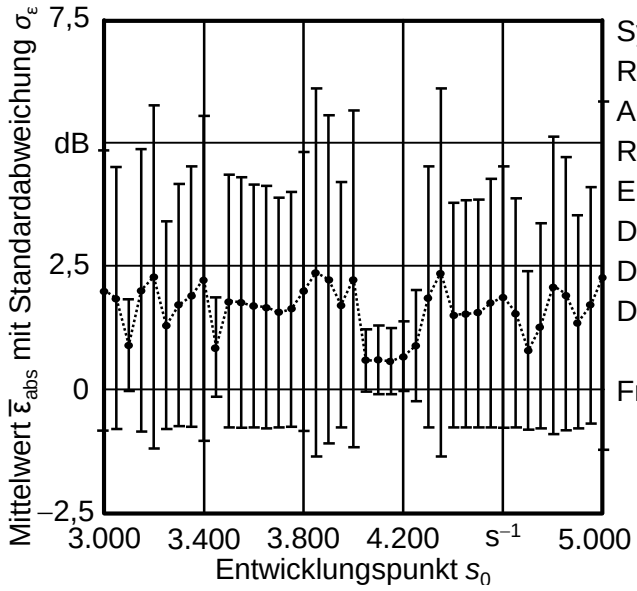


System:	Teilsystem 1	
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum	
Algorithmus:	Block-Arnoldi	
Referenzsystem:	N_{FHG}	= 1.243.265
Entwicklungspunkt:	s_0	= 1 s^{-1} - 10.000 s^{-1}
Deflationsgrenze:	δ	= 10^{-12}
Dimension:	L	= 40
Dämpfung:	α	= 7,5
	β	= 0,0000125
Frequenzbereich:	f_B	= 0 Hz - 1.000 Hz

Entwicklungspunktvariation
- Mittelwert der abs. Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$
- Standardabweichung σ_ε
- Trendlinie der Mittelwerte

Bild 5-11: Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und Standardabweichung σ_ε der absoluten Abweichung in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt von $s_0 = 1\ s^{-1}$ bis $s_0 = 10.000\ s^{-1}$ für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz

Die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε sind für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt s_0 für die Größenordnung von $s_0 = 3.000\ s^{-1}$ bis $s_0 = 5.000\ s^{-1}$ mit einem Entwicklungspunktdifferenzschritt von $\Delta s_0 = 50\ s^{-1}$ im Bild 5-12 dargestellt.



System:	Teilsystem 1	
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum	
Algorithmus:	Block-Arnoldi	
Referenzsystem:	N_{FHG}	= 1.243.265
Entwicklungspunkt:	s_0	= 3.000 s^{-1} - 5.000 s^{-1}
Deflationsgrenze:	δ	= 10^{-12}
Dimension:	L	= 40
Dämpfung:	α	= 7,5
	β	= 0,0000125
Frequenzbereich:	f_B	= 0 Hz - 1.000 Hz

Entwicklungspunktvariation
- Mittelwert der abs. Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$
- Standardabweichung σ_ε
- Trendlinie der Mittelwerte

Bild 5-12: Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und Standardabweichung σ_ε der absoluten Abweichung in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt s_0 in der Größenordnung von $s_0 = 3.000\ s^{-1}$ bis $s_0 = 5.000\ s^{-1}$ in $\Delta s_0 = 50\ s^{-1}$ Schritten für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz

Die Mittelwerte liegen im Abweichungskorridor von $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}595$ dB bis $\overline{\varepsilon}_{abs} = 2{,}377$ dB. Die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε befinden sich im Bereich von $\sigma_\varepsilon = 0{,}632$ bis $\sigma_\varepsilon = 3{,}730$. In diesem Ausschnitt von möglichen Entwicklungspunkten ist zu erkennen, dass die Modellqualität stark variiert. Beispielsweise besitzt das reduzierte Modell, das mit dem Entwicklungspunkt $s_0 = 3.100\ s^{-1}$ erzeugt wurde, einen Mittelwert der absoluten Abweichung mit dem Wert $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}903$ dB $\pm$ 0,093 dB. Dagegen nimmt der Mittelwert der absoluten Abweichung

zwischen Referenzsystem und reduziertem System beim Entwicklungspunkt $s_0 = 3.150\ s^{-1}$ den Wert $\overline{\varepsilon}_{abs} = 2{,}015\ dB \pm 2{,}858\ dB$ an. Eine ähnliche Situation ist bei den Entwicklungspunkten von $s_0 = 3.400\ s^{-1}$ bis $s_0 = 3.450\ s^{-1}$ zu beobachten. Zusätzlich ist im Korridor der Entwicklungspunkte von $s_0 = 4.050\ s^{-1}$ bis $s_0 = 4.250\ s^{-1}$ eine erhebliche Verbesserung der Approximationsqualität zu beobachten. In diesem Korridor liegt der Mittelwert der absoluten Abweichung zwischen $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}596\ dB$ und $\overline{\varepsilon}_{abs} = 0{,}894\ dB$ mit den jeweiligen zugehörigen Standardabweichungen von $\sigma_\varepsilon = 0{,}632$ bis $\sigma_\varepsilon = 1{,}123$. Der Autor vermutet, dass die Approximationsqualität des reduzierten Systems sich erhöht, wenn der Entwicklungspunkt s_0 in der Nähe von hochenergetischen Frequenzspitzen befindet. Das könnte der Grund sein, warum für spezielle Entwicklungspunkte die Approximation besser ist.

In Bild 5-13 sind die Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ des Auswertepunkts 8 für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz für eine Auswahl von reduzierten Systemen und dem Referenzsystem dargestellt. Die Anregung findet am Portal mit einer Kraft von $F_{AY} = 1$ N in Y-Richtung statt.

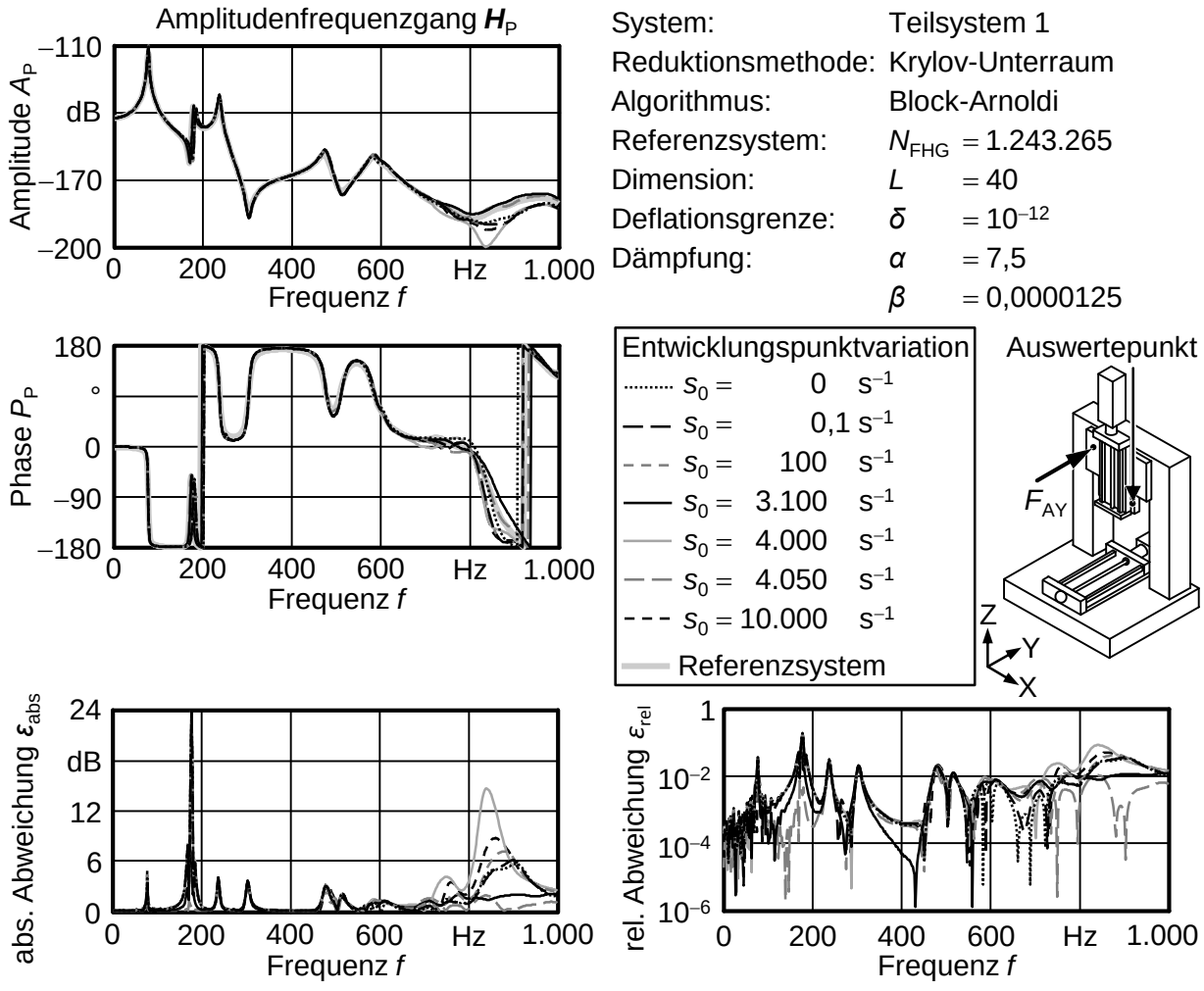


Bild 5-13: Einfluss des Entwicklungspunkts s_0 auf die Approximationsgüte des reduzierten Systems

Die reduzierten Systeme unterscheiden sich in der Erstellung der Projektionsmatrizen $\boldsymbol{V}$. Diese wurden mit unterschiedlichen Entwicklungspunkten s_0 erstellt. Somit wird als Eingang des Block-Arnoldi-Algorithmus aus Bild 5-4 die geshiftete Matrix aus Gleichung 5-6 verwendet. Zu-

sätzlich zum Bodediagramm werden die absoluten Abweichungen ε_{abs} und die relativen Abweichungen ε_{rel} in Abhängigkeit von der Frequenz f angegeben. Um die Änderung der relativen Abweichungen ε_{rel} stärker hervorzuheben, wird die Ordinate logarithmisch aufgetragen. Am Bodediagramm ist zu erkennen, dass die Wahl eines geeigneten Entwicklungspunkts s_0 insbesondere im Bereich zwischen $f = 800$ Hz und $f = 1.000$ Hz die Approximationsgüte verändert. Für die Entwicklungspunkte $s_0 = 3.100\ \mathrm{s}^{-1}$ und $s_0 = 4.050\ \mathrm{s}^{-1}$ besitzen die reduzierten Systeme eine hohe Übereinstimmung mit dem Referenzsystem im Frequenzbereich. Diese Beobachtung ist in der Darstellung der frequenzabhängigen absoluten Abweichung ε_{abs} und der frequenzabhängigen relativen Abweichung ε_{rel} zu erkennen. Bei dieser Darstellung ist auch zu sehen, dass sich bei einer ungeeigneten Wahl des Entwicklungspunkts s_0 die Approximationsqualität verringert. Dies ist beispielsweise am reduzierten System, dessen Projektionsmatrizen $\boldsymbol{V}$ mit dem Entwicklungspunkt $s_0 = 4.000\ \mathrm{s}^{-1}$ erstellt wurden, zu beobachten.

Durch die Variation des Entwicklungspunkts s_0 ist festzustellen, dass keine allgemeine Aussage über die Wahl eines geeigneten Entwicklungspunkts s_0 getroffen werden kann. Daher werden andere Verfahren zur Bestimmung eines geeigneten Entwicklungspunkts s_0 benötigt. Durch den Algorithmus des Rational-Krylov-with-Optimal-Points (RK-OP) werden geeignete Entwicklungspunkte s_0 geliefert, indem bei der Berechnung des Entwicklungspunkts s_0 das Laguerre-basierte Optimierungskriterium minimiert wird [EID09]. Der optimierte Entwicklungspunkt $s_0 = \alpha_{opt}$ ist durch den folgenden Quotienten im Zeitbereich gegeben:

$$\alpha_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty [\dot{g}(t)]^2 t\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty [g(t)]^2 t\,\mathrm{d}t}}\,. \tag{5-20}$$

Die Hilfsvariablen M_1 und M_2 werden mit Hilfe des Zusammenhangs

$$g(\mathrm{t}) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}} t} \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}, \tag{5-21}$$

der ersten Lyapunov-Gleichung aus Gleichung 2-27 und

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \tag{5-22}$$

der Gleichung 5-22 berechnet [EID09].

$$M_1 = \frac{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}} \text{ und } M_2 = \frac{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}} \tag{5-23}$$

Damit lässt sich der optimierte Entwicklungspunkt in Abhängigkeit von den Systemmatrizen angeben.

$$\alpha_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}^{\mathrm{T}}}} \tag{5-24}$$

Aufgrund des hohen numerischen Aufwands zur Bestimmung der Lyapunov-Gleichung ist die direkte Verwendung des RK-OP-Algorithmus allerdings nicht zielführend. Mit der Anwendung des Rational-Krylov-with-Iteratively-Calculated-Optimal-Expansion(RK-ICOP)-Algorithmus wird die Gleichung 5-24 mit den reduzierten Systemmatrizen berechnet. Durch diesen Algorithmus wird der optimierte Entwicklungspunkt iterativ angenähert.

Nach PANZER [PAN09] existieren zehn unterschiedliche Möglichkeiten zur Approximation des optimierten Entwicklungspunkts und somit auch zehn unterschiedliche Möglichkeiten den RK-ICOP-Algorithmus auszuwerten. Aus rechentechnischen Gründen wird die Gleichung 5-24 zur

Auswertung des optimierten Entwicklungspunkts α_{opt} gewählt. Dieser Algorithmus liefert zusätzlich indirekt Informationen über die Ergebnisgüte. Als Indikator für die Ergebnisgüte wird das Konvergenzverhalten des ICOP-Algorithmus in Bild 5-14 verwendet [PAN09].

Pseudoalgorithmus: RK-ICOP für DGL zweiter Ordnung

Eingang: $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{K}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, L, s_0, ε, i_{max}

Ausgang: $\mathbf{M}_{red}$, $\boldsymbol{E}_{red}$, $\boldsymbol{K}_{red}$, $\boldsymbol{B}_{red}$, $\boldsymbol{C}_{red}$, $\boldsymbol{A}_{ZR,red}$, $\boldsymbol{B}_{ZR,red}$, $\boldsymbol{C}_{ZR,red}$, $\boldsymbol{D}_{ZR,red}$, $\boldsymbol{V}$, s_0

1	for $i = 1, 2, \ldots i_{max}$	
2	$i = i + 1$	Hochzählung des Iterationsindexes
3	$\boldsymbol{V} = \text{Arnoldi}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}, L, s_0)$	Berechnung der Projektionsmatrix mit Arnoldi
4	$\boldsymbol{M}_{red} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$; $\boldsymbol{E}_{red} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{V}$; $\boldsymbol{K}_{red} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}$; $\boldsymbol{B}_{red} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{C}_{red} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}$;	Berechnung der reduzierten Systemmatrizen
5	$[\boldsymbol{A}_{ZR,red}, \boldsymbol{B}_{ZR,red}, \boldsymbol{C}_{ZR,red}, \boldsymbol{D}_{ZR,red}] = \text{ZRD}(\boldsymbol{M}_{red}, \boldsymbol{E}_{red}, \boldsymbol{K}_{red}, \boldsymbol{B}_{red}, \boldsymbol{C}_{red})$	Transformierung des Systems zweiter Ordnung in den Zustandsraum mittels Gleichung 2-20
6	$\boldsymbol{P}_{red} = \text{lyap}(\boldsymbol{A}_{ZR,red}, \boldsymbol{B}_{ZR,red}\boldsymbol{B}_{ZR,red}^T)$; $\boldsymbol{Y}_{red} = \text{lyap}(\boldsymbol{A}_{red}, \boldsymbol{P}_{red})$;	Berechnung der Lyapunov-Gleichung des reduzierten Systems mit Gleichung 2-26
7	$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{C}_{red}\boldsymbol{A}_{red}\boldsymbol{Y}_{red}\boldsymbol{A}_{red}^T\boldsymbol{C}_{red}^T}{\boldsymbol{C}_{red}\boldsymbol{Y}_{red}\boldsymbol{C}_{red}^T}}$	Berechnung des optimalen Entwicklungspunkts mit Gleichung 5-24
8	$tol = \frac{\text{norm}(\alpha_{opt} - s_0)}{\text{norm}(\alpha_{opt})}$	Berechnung der Toleranz
9	if (tol < ε)	
10	Abbruch	
11	end	
12	end	

Bild 5-14: Angepasster Rational Krylov with Iteratively Calculated Optimal Expansion Algorithmus nach EID, PANZER und LOHMANN [EID09] für ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

Der ursprüngliche Algorithmus von EID, PANZER und LOHMANN [EID09] wurde im Rahmen dieser Arbeit für ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung angepasst, damit die Systemmatrizen direkt aus dem FE-Modell verwendet werden können. Somit benötigt der Algorithmus die Systemmatrizen aus Gleichung 2-5, den Reduktionsgrad L, einen Startwert für den Entwicklungspunkt s_0, einen Fehler ε als Toleranzangabe und die maximale Iterationsanzahl i_{max}. Der Algorithmus liefert dann die reduzierten Systemmatrizen, die reduzierten Matrizen in der Zustandsraumdarstellung, die Projektionsmatrix $\boldsymbol{V}$ und einen iterativ ermittelten, optimierten Entwicklungspunkt s_0. Dieser Algorithmus benötigt in der Zeile 3 einen Arnoldi-Algorithmus zur Erzeugung der Projektionsmatrix $\boldsymbol{V}$. Zur Berechnung der Hilfsvariablen M_1 und M_2 in Zeile 6 wird die MATLAB-Funktion „lyap“ verwendet. Mit dieser Funktion wird die Lyapunov-Gleichung gelöst, um dann den optimierten Entwicklungspunkt α_{opt} zu berechnen. Mit Gleichung 5-24 in Zeile 7 kann nun durch den RK-ICOP-Algorithmus der optimierte Entwicklungspunkt angegeben werden. Dieser Algorithmus liefert gute Ergebnisse bezüglich der $\mathcal{H}_2$-Norm und der $\mathcal{H}_\infty$-Norm, des Weiteren benötigt dieser den gleichen hohen numerischen Aufwand wie beim Balancieren. Der hohe numerische Aufwand wird aber durch das iterative Vorgehen im

RK-ICOP gemildert. Der RK-OP-Algorithmus unterscheidet sich vom RK-ICOP-Algorithmus durch die Bestimmung des optimierten Skalierungsfaktors mittels der Minimierungsaufgabe des Gütemaßes beim numerisch aufwendigen Lösen der zwei Lyapunov-Gleichungen aus Gleichung 2-27 des Referenzsystems. Bei der Wahl des ersten Startentwicklungspunkts $s_{0,1}$ für die iterative Ermittlung eines besser geeigneten Entwicklungspunkts s_0 mit dem RK-ICOP-Algorithmus hat sich ein Entwicklungspunkt s_0 in der Nähe der höchsten Amplitudenspitze bewährt.

Mit der Anwendung des angepassten RK-ICOP-Algorithmus aus Bild 5-14 am Beispiel, das in Bild 5-13 dargestellt ist, wird der optimierte Entwicklungspunkt $\alpha_{opt} = 4.043{,}28\ s^{-1}$ innerhalb von 16 Iterationsschritten mit einem Startwert von $s_0 = 0\ s^{-1}$ ermittelt. Für diese Berechnung wurden aus Erfahrung die Toleranzangabe $\varepsilon = 10^{-12}$ und die Dimensionsgröße $L = 40$, zur Vergleichbarkeit mit den anderen Ergebnissen, gewählt. Zur Ermittlung des Dimensionseinflusses wurde diese Größe variiert. Bei höherer Dimension L pendelt sich der optimierte Entwicklungspunkt bei einer geringeren Iterationszahl ein. Es wurde beobachtet, dass sich der Wert des optimierten Entwicklungspunkts bis zu $\Delta s_0 = 65\ s^{-1}$ in Abhängigkeit von der Dimensionsgröße L bis $L = 200$ erhöht. Die Toleranzangabe ε beeinflusst das Ergebnis nur marginal, da diese lediglich für die Überprüfung der Konvergenz zuständig ist. Das resultierende reduzierte System mit der Dimensionsgröße $L = 40$ besitzt das gleiche Amplitudenfrequenzgangverhalten wie das System, das mit dem Entwicklungspunkt $s_0 = 4.050\ s^{-1}$ erzeugt wurde. Es ist kein Unterschied im Abweichungsverhalten dieser beiden Modelle zu erkennen. Die absolute und die relative Abweichung sind identisch, da die Entwicklungspunkte nah beieinanderliegen.

Der angepasste RK-ICOP-Algorithmus und der originale RK-ICOP-Algorithmus reagieren empfindlich auf schlecht konditionierte, reduzierte Matrizen. Der Grund dafür ist beim angepassten Algorithmus in Zeile 5 und in Zeile 6 zu finden: In Zeile 5 verursacht die Inversenbildung der Massenmatrix für die Transformation der Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Zustandsraum bei schlecht konditionierten Matrizen numerische Probleme. Ähnliche Probleme werden beim angepassten sowie beim originalen Algorithmus durch die Lösung der Lyapunov-Gleichungen in Zeile 6 erzeugt. Wie im anstehenden Unterkapitel 5.4.5 zu zeigen sein wird, verschlechtert die sich die Kondition der Matrizen mit der Anzahl der Dimension L. Daher kann der RK-ICOP-Algorithmus nicht für Systeme mit zu schlechter Kondition noch für reduzierte Systeme mit zu hoher Dimension verwendet werden.

Die Erhöhung der Modellgenauigkeit des reduzierten Systems kann häufig durch die Berücksichtigung mehrerer Entwicklungspunkte s_k erreicht werden. Auch hier stellt sich die Frage, welche Entwicklungspunkte s_k die geeigneten sind und welche Anzahl L an Momenten berücksichtigt werden sollen. Die unterschiedlichen Entwicklungspunkte s_k können die jeweiligen Vektoren der Projektionsmatrizen $\boldsymbol{V}_k$ und $\boldsymbol{W}_k$ zu jeweils einer Projektionsmatrix $\boldsymbol{V}_{ges}$ und $\boldsymbol{W}_{ges}$ vereinigt werden mittels Gleichung 5-9 unter Berücksichtigung der Gleichungen 5-8. Diese zusammengesetzten Projektionsmatrizen $\boldsymbol{V}_{ges}$ und $\boldsymbol{W}_{ges}$ müssen in der Regel reorthogonalisiert werden, damit die Orthogonalität der jeweiligen Spaltenvektoren gewährleistet ist. Mit dieser Herangehensweise lässt sich beispielsweise die statische Genauigkeit des reduzierten Modells, das für hochfrequente Untersuchungen erstellt wurde, gezielt erhöhen, indem zu den Entwicklungspunkten mit hohen Werten ein Moment $\boldsymbol{m}$ beim Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ s^{-1}$ hinzugefügt wird. Für das Teilsystem 1 konnte keine Genauigkeitserhöhung des Modells mit dem Gesamtreduktionsgrad von $L = 40$ erreicht werden im Vergleich zum reduzierten Modell, das mit $s_0 = 4.050\ s^{-1}$ erstellt wurde.

In Bild 5-7 wurde der Einfluss des Reduktionsgrads L auf die Approximationsgüte bei dem Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ dargestellt. In dieser Abbildung ist zu sehen, dass die Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_\mathrm{P}$ der reduzierten Systeme das Frequenzverhalten um die Frequenz $f = 178$ Hz nicht gut wiedergeben. Daher hat dieses System eine absolute Abweichung von $\overline{\varepsilon}_\mathrm{abs} = 1{,}458$ dB $\pm$ 2,244 dB. Die Approximationsqualität des reduzierten Systems lässt sich durch die Berücksichtigung des Entwicklungspunks $s_0 = 1.118\ \mathrm{s}^{-1}$ erhöhen. Dieser Wert wird durch die Multiplikation von 2π zur kritischen Frequenz $f = 178$ Hz ermittelt. Ein reduziertes System, das jeweils mittels 20 Momenten vom Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ und $s_0 = 1.118\ \mathrm{s}^{-1}$ erstellt wurde, besitzt dann eine absolute Abweichung von $\overline{\varepsilon}_\mathrm{abs} = 1{,}218$ dB mit einer Standardabweichung von $\sigma_\varepsilon = 1{,}784$ dB. Das zeigt, dass die Modellqualität in gewissem Maße durch das gezielte Hinzufügen von zusätzlichen Entwicklungspunkten s_k erhöht werden kann.

In Tabelle 5-4 sind für ausgewählte Entwicklungspunkte s_0 die Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_\mathrm{abs}$, die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε und die Anzahl der instabilen Pole aufgelistet. In der Tabelle ist zu erkennen, dass das Approximationsverhalten sowie die Stabilität der reduzierten Systeme von der Wahl der Entwicklungspunkte abhängen. Diese Erkenntnis ist auch im Zeitbereich zu sehen. In Bild 5-15 sind die Antworten auf einen Einheitssprung ausgewählter reduzierter Systeme im Zustandsraum dargestellt. Die reduzierten Systeme wurden mittels Krylov-Unterräumen mit unterschiedlichen Entwicklungspunkten erstellt. Das reduzierte System, das dem Entwicklungspunkt $s_0 = 4.050\ \mathrm{s}^{-1}$ zuzuordnen ist, weist die höchste Übereinstimmung mit dem Referenzsystem auf. Das niedrigdimensionale Ersatzmodell des Teilsystems 1 mit der Dimension $L = 40$ hat somit die höchste Approximationsgenauigkeit im Zeitbereich und im Frequenzbereich, wie es auch in Bild 5-13 zu erkennen ist, wenn es mit dem Entwicklungspunkt $s_0 = 4.050\ \mathrm{s}^{-1}$ erstellt wurde.

Tabelle 5-4: Übersicht der Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_\mathrm{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε sowie Anzahl der instabilen Pole in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt bei einem reduzierten System mit der Dimension $L = 40$

Bezeichnung	$s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$	$s_0 = 0{,}1\ \mathrm{s}^{-1}$	$s_0 = 100\ \mathrm{s}^{-1}$	$s_0 = 4.000\ \mathrm{s}^{-1}$	$s_0 = 4.050\ \mathrm{s}^{-1}$
Mittelwert $\overline{\varepsilon}_\mathrm{abs}$	1,447 dB	1,596 dB	1,598 dB	2,246 dB	0,595 dB
Standardabweichung σ_ε	2,232 dB	2,340 dB	2,348 dB	3,4108 dB	0,6323 dB
Anzahl instabiler Pole im Zustandsraum	0	2	6	3	2

Die Darstellung im Zeitbereich in Bild 5-15 zeigt, unter Berücksichtigung der Ergebnisse im Frequenzbereich aus Bild 5-13, dass sich die Approximationsqualität bezüglich der unterschiedlichen Entwicklungspunkte der reduzierten Modelle im Zeit- und im Frequenzbereich gleich verhält. Je höher die Approximationsabbildungsqualität im Frequenzbereich ist, desto wahrscheinlicher ist auch eine hohe Approximationsabbildungsgenauigkeit im Zeitbereich.

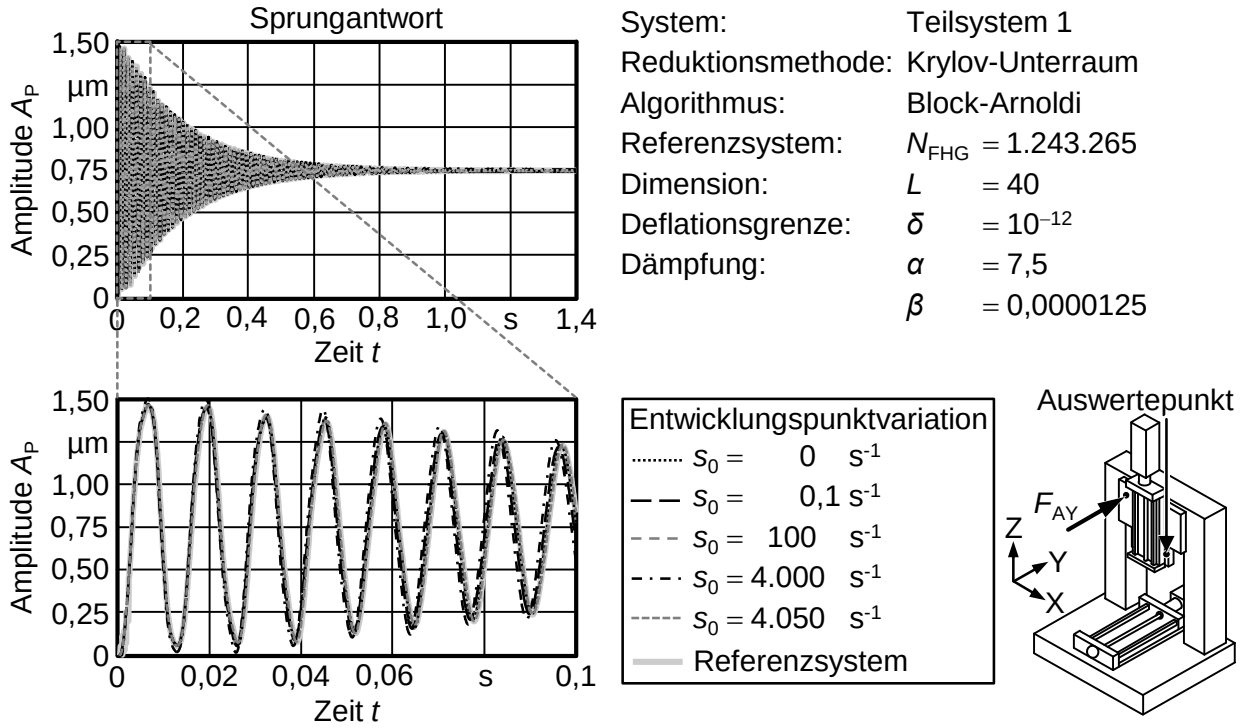


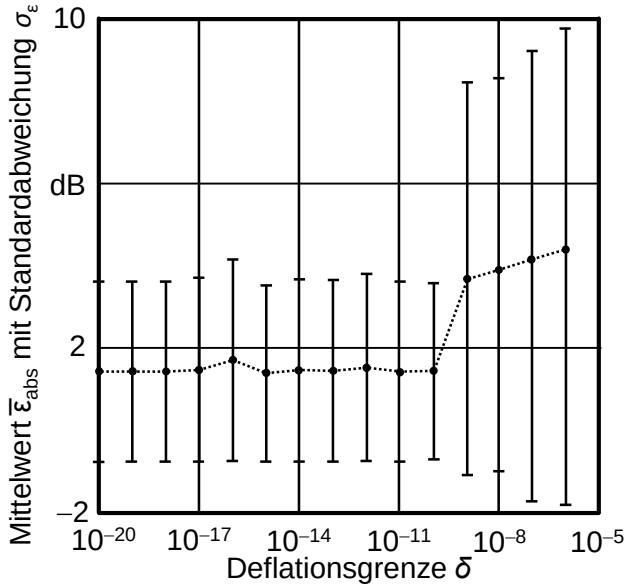
Bild 5-15: Zeitverhalten bezüglich einer Einheitssprungantwort der reduzierten Systeme in Abhängigkeit von den Entwicklungspunkten s_0

5.3.4 Deflationsgrenze

Als Deflation wird in diesem Zusammenhang eine Technik bezeichnet, mit der die lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren zum Aufspannen des Krylov-Unterraums sichergestellt wird. Bei der exakten Deflation werden die linear abhängigen Basisvektoren gelöscht. In der Praxis wird aber die inexakte Deflation verwendet. Damit werden leicht linear abhängige Basisvektoren nicht eliminiert. Um eine Toleranz der linear abhängigen Basisvektoren zu bestimmen, wird die Deflationsgrenze δ eingeführt. Es existiert kein festes Kriterium für diese Grenze. Daher wird sie hier untersucht. Das Teilsystem 1 wird mit der Krylov-Unterraummethode mittels Block-Arnoldi-Algorithmus auf die Dimension $L = 40$ reduziert. Das Referenzsystem besitzt $N_{FHG} = 1.243.265$ Freiheitsgrade. In dieser Untersuchung wird, wie in den vorherigen Unterkapiteln, der Frequenzbereich von $f = 0$ Hz bis $f = 1.000$ Hz betrachtet. Die Dämpfung wird ebenfalls mittels Bequemlichkeitshypothese aus Gleichung 2-2 mit dem massenproportionalen Dämpfungsfaktor $\alpha = 7,5$ und dem steifigkeitsproportionalen Dämpfungsfaktor $\beta = 0,0000125$ im Referenzsystem approximiert.

In Bild 5-16 sind die Mittelwerte einschließlich der Standardabweichungen σ_ε der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ für den Frequenzbereich von $f = 0$ Hz bis $f = 1.000$ Hz in Abhängigkeit von der Deflationsgrenze δ abgebildet. Die Deflationsgrenze δ wird über mehrere Größenordnungen variiert. Daher wird eine logarithmische Skalierung für die Abszisse gewählt. Die Deflationsgrenze δ wird äquidistant auf der logarithmisch skalierten Achse verteilt. Im Bereich der Deflationsgrenzen von $\delta = 10^{-20}$ bis $\delta = 10^{-10}$ liegt der Mittelwert der absoluten Abweichung im Bereich von $\overline{\varepsilon}_{abs} = 1,363$ dB bis $\overline{\varepsilon}_{abs} = 1,837$ dB. Der Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs} = 1,363$ dB besteht für die Deflationsgrenze $\delta = 10^{-12}$. Ab der Deflationsgrenze $\delta = 10^{-7}$ besitzen die resultierenden niedrigdimensionalen Systeme eine so starke Abweichung vom Referenzsystem, dass sie für die weiteren numerischen Untersuchungen nicht

mehr verwendbar sind. Daher wird auf den Vergleich der Ergebnisse im Frequenzbereich und im Zeitbereich verzichtet.



System:	Teilsystem 1	
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum	
Algorithmus:	Block-Arnoldi	
Referenzsystem:	N_{FHG}	= 1.243.265
Entwicklungspunkt:	s_0	= 0 s^{-1}
Dimension:	L	= 40
Dämpfung:	α	= 7,5
	β	= 0,0000125
Frequenzbereich:	f_B	= 0 Hz - 1.000 Hz

Deflationsgrenzenvariation
- Mittelwert der abs. Abweichung $\bar{\varepsilon}_{abs}$
- Standardabweichung σ_ε
- Trendlinie der Mittelwerte

Bild 5-16: Mittelwert $\bar{\varepsilon}_{abs}$ und Standardabweichung σ_ε der absoluten Abweichung in Abhängigkeit von der Deflationsgrenze von $\delta = 10^{-20}$ bis $\delta = 10^{-5}$ für den Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz

5.3.5 Zustand der Matrizen des Referenzsystems

Für die Bildung der Momente mit dem klassischen Arnoldi-Algorithmus oder mit den Algorithmen, die für Systeme erster Ordnung konzipiert sind, ist die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}$ in der Zustandsraummatrix $\boldsymbol{A}_{ZR}$ enthalten, wie es in Gleichung 2-21 dargestellt ist. Bei der Dynamikbetrachtung mechanischer Systeme liegen die Bewegungsgleichungen in der Regel als Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung vor, wie in Gleichung 2-5 deutlich wird. Die FE-Modelle werden in dieser Gleichungsform aufgestellt. In der Regel besitzen mechanische Systeme dissipative Anteile, die in der Dämpfung berücksichtigt werden, wie in Unterkapitel 2.3.1 dargestellt wurde. Für die Modellierung dieser Dämpfung existieren unterschiedliche Ansätze. Aufgrund der ungenauen Kenntnisse über die vorherrschende Dämpfung wird die Dämpfung häufig über die Bequemlichkeitshypothese aus Gleichung 2-2 approximiert. Bei der Verwendung dieser Modellierungsmethode sind die Projektionsmatrizen unabhängig von der Dämpfungsmatrix. Dieser Umstand ist darin begründet, dass die Dämpfung aus der Bequemlichkeitshypothese als Proportionaldämpfung vorliegt. Die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}$ ist folglich eine Linearkombination der Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ und der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$. Werden dagegen diskrete Dämpfungselemente berücksichtigt, um die modellierte Dämpfung $\boldsymbol{E}$ an die gemessene Dämpfung anzupassen, ist die entstehende Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}$ keine Linearkombination mehr. Das hat zur Folge, dass die Projektionsmatrizen $\boldsymbol{V}$ für die Reduktion von der Dämpfung abhängen. Diese Abhängigkeit wird im SOAR-Algorithmus aus Bild 5-3 und im Block-Arnoldi-Algorithmus aus Bild 5-4 berücksichtigt. Aus den Ergebnissen, die in Tabelle 5-2 in Unterkapitel 5.3.1 enthalten sind, ist zu erkennen, dass die Berücksichtigung der originalen Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}_{ref}$ aus dem Referenzsystem in Form der reduzierten Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}_{ref,red}$ die Modellgenauigkeit des reduzierten Systems positiv beeinflusst. Daher wird hier die reduzierte Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}_{ref,red}$ verwendet.

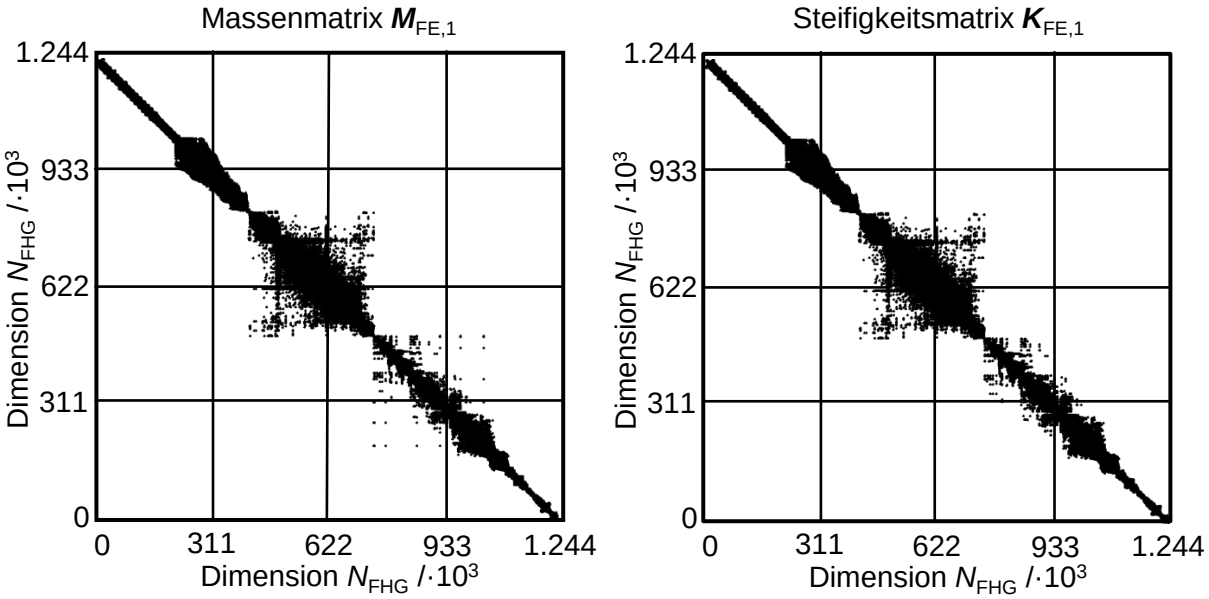


Bild 5-17: Grafische Repräsentation der Systemmatrizen $\boldsymbol{M}_{FE,1}$ und $\boldsymbol{K}_{FE,1}$ des Teilsystems 1

Neben den beschriebenen Reduktionsparametern hat auch der Zustand des Referenzsystems einen Einfluss auf das Reduktionsergebnis und damit die Qualität des reduzierten Systems. Durch die Diskretisierung des mechanischen Systems, wie in Unterkapitel 2.2.1 dargestellt, werden insbesondere bei der FEM hochdimensionale Gleichungssysteme erzeugt. Aufgrund der geringen Anzahl an Nachbarschaftsbeziehungen der finiten Elemente entstehen hierbei dünnbesetzte Matrizen. Diese dünnbesetzten Matrizen werden auch als Sparse-Matrizen bezeichnet und sind im Wesentlichen mit Nullen besetzt. Aus speicher- und rechentechnischen Gründen werden die Nulleinträge der Matrizen nicht berücksichtigt, sondern lediglich die Matrizeneinträge, die ungleich Null sind. Nach der Assemblierung des FE-Modells wird das Gleichungssystem beispielsweise mit der Wafe-Front-Optimierung durch Umsortierung vorkonditioniert, um numerisch günstigere Bandmatrizen zu erzeugen. Dadurch entstehen die typischen Strukturen der FE-Matrizen, wie sie in Bild 5-17 für die Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{FE,1}$ und für die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{FE,1}$ des Teilsystems 1 dargestellt sind. In diesem Bild sind lediglich die Matrizeneinträge abgebildet, die ungleich Null sind.

In Tabelle 5-5 sind die zugehörigen Kennzahlen der Massen- und Steifigkeitsmatrix, die direkt aus dem FE-Programm stammen, für das Teilsystem 1 aufgelistet.

Tabelle 5-5: Statistik der originalen Massen- und Steifigkeitsmatrix des Teilsystems 1, die direkt aus dem FE-Programm stammen

Bezeichnung	Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{FE,1}$	Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{FE,1}$
Dimension N_{FHG}	1.243.265	1.243.265
Matrizeneinträge N_{ME}	5.276.538	18.217.080
Konditionszahl K_Z	∞	$4{,}18 \cdot 10^{28}$
Spektralnorm $N_{2,i}$	1,404	$1 \cdot 10^{20}$
Minimaler Wert N_{min}	−0,418	$-1 \cdot 10^{20}$
Maximaler Wert N_{max}	0,808	$1 \cdot 10^{20}$
Bandbreite B_W	66.623	66.623

Trotz der Vorkonditionierung der Systemmatrizen durch das FE-Programm sind die hochdimensionalen FE-Matrizen verhältnismäßig schlecht konditioniert. Für die Ermittlung der Konditionszahl K_Z existieren unterschiedliche Ansätze. Eine häufig angewendete Methode zur Berechnung niedrigdimensionaler Matrizen ist der Quotient aus dem größten Eigenwert λ_{max} und dem kleinsten Eigenwert λ_{min} der Matrix. Diese Methode ist für hochdimensionale, dünnbesetzte Matrizen allerdings ungeeignet. Daher wird hier eine genäherte Schätzung für die Konditionszahl K_Z benötigt. Eine Näherung der Konditionszahl K_Z lässt sich aus dem Produkt der Matrixnorm und der Matrixnorm der inversen Matrix bilden. Da die Invertierung für sehr große hochdimensionale Systeme nur mit sehr hohem numerischen Aufwand möglich ist [HIG00], wird eine Näherung für die Norm der inversen Matrix benötigt. Zur Ermittlung der geschätzten Konditionszahl K_Z liefert MATLAB für dünnbesetzte Matrizen die Funktion „condest“. Diese Funktion nähert sich nach HAGER [HAG84] iterativ der Konditionszahl an. Auf den zugehörigen mathematischen Beweis wird hier verzichtet und stattdessen auf die Referenz MEISTER [MEA08] verwiesen. Die damit berechnete Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{FE,1}$ beträgt $K_Z = 4{,}179 \cdot 10^{28}$. Dagegen weist die Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{FE,1}$ des Teilsystems 1 eine unendliche Konditionszahl K_Z auf, da es sich um eine singuläre Matrix handelt. Die singuläre Massenmatrix ist das Resultat der Lagermodellierung für die Kugelgewindetriebe. Bei der Modellierung der Lager für die Y-Achse und die Z-Achse entstehen an den zugehörigen Freiheitsgraden Dämpfungs- und Steifigkeitselemente ohne Masse, wie in Bild 2-4 dargestellt wird. Deshalb befinden sich an diesen Freiheitsgradpositionen der Massenmatrix Nullen, wodurch die Singularität hervorgerufen wird.

Zur Erhöhung der numerischen Leistung ist eine weitere Minimierung der Bandbreite der dünnbesetzten Systemmatrizen vorteilhaft. Trotz der Wafe-Front-Optimierung des FE-Programms nach der Assemblierung besitzen die Systemmatrizen des Teilsystems 1 immer noch eine Bandbreite von $B_W = 66.623$. Die Bandbreite wird mit dem Zeilenindex Z_{index} und dem Spaltenindex S_{index} der Matrizen in Gleichung 5-25 berechnet:

$$B_W = \max(Z_{index} - S_{index}) - \min(Z_{index} - S_{index}) + 1. \tag{5-25}$$

Zur Reduzierung der Bandbreite existieren unterschiedliche Permutationsalgorithmen. Angesichts der positiven Erfahrung mit dem Symmetric-Sparse-Reverse-Cuthill-McKee-Ordering(RCM)-Algorithmus nach CUTHILL und MCKEE [CUT69] wird dieser hier verwendet. Mit diesem Algorithmus lässt sich die Bandbreite B_W der Systemmatrizen nochmals herabsetzen. Dazu wird die Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}_{RCM}$, die aus dem RCM-Algorithmus gewonnen wird, wie folgt in Gleichung 5-26:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{RCM} &= \boldsymbol{P}_{RCM}^{T} \cdot \boldsymbol{M}_{FE} \cdot \boldsymbol{P}_{RCM} \\
\boldsymbol{E}_{RCM} &= \boldsymbol{P}_{RCM}^{T} \cdot \boldsymbol{E}_{FE} \cdot \boldsymbol{P}_{RCM} \\
\boldsymbol{K}_{RCM} &= \boldsymbol{P}_{RCM}^{T} \cdot \boldsymbol{K}_{FE} \cdot \boldsymbol{P}_{RCM} \\
\boldsymbol{B}_{RCM} &= \boldsymbol{P}_{RCM}^{T} \cdot \boldsymbol{B}_{FE} \\
\boldsymbol{C}_{RCM} &= \boldsymbol{C}_{FE} \cdot \boldsymbol{P}_{RCM}
\end{aligned} \tag{5-26}$$

mit den Systemmatrizen der Differentialgleichung zweiter Ordnung aus Gleichung 2-5 multipliziert. Durch die Umsortierung der Systemmatrizen mittels RCM-Algorithmus mithilfe der Multiplikation der Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}_{RCM}$ mit der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{FE,1}$ wird die Bandbreite der neusortierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{RCM,1}$ auf $B_W = 7.465$ reduziert. Der Algorithmus zur Umsortierung ist in MATLAB bereits implementiert und wird mit dem Befehl „symrcm“ aufgerufen.

Diese Funktion liefert den Permutationsvektor, der nach Anwendung des RCM-Algorithmus entsteht [GIL92]. Dieser Vektor wird zur Erstellung der Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}_{RCM}$ oder für die direkte indexbezogene Sortierung verwendet. Gegenüber der neusortierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{RCM,1}$ nimmt die Bandbreite der Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{RCM,1}$ aufgrund des Permutationsvektors der Steifigkeitsmatrix kaum ab. Die Bandbreite verringert sich lediglich auf den Wert von $B_W = 66.061$. Die restlichen Matrizenstatistikwerte aus Tabelle 5-5 ändern sich durch die Permutation nicht.

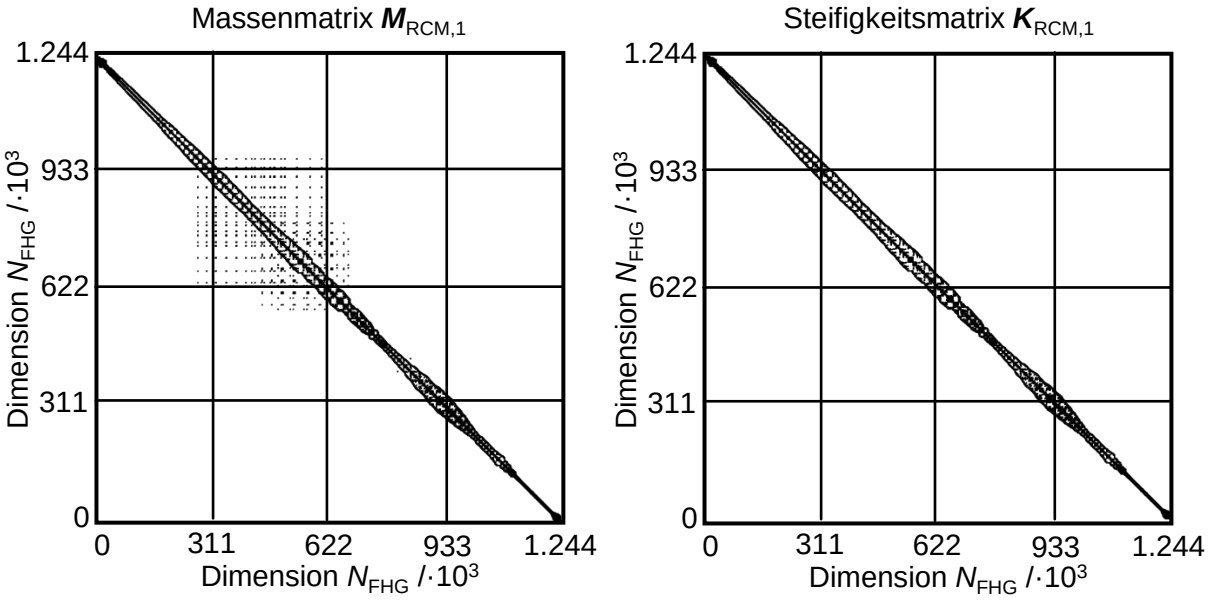


Bild 5-18: Grafische Repräsentation der mit dem RCM-Algorithmus umsortierten Systemmatrizen $\boldsymbol{M}_{CRM,1}$ und $\boldsymbol{K}_{CRM,1}$ des Teilsystems 1

Obwohl die berechnete Bandbreite B_W der Massenmatrix sich nur minimal reduziert, ist in Bild 5-18 zu sehen, dass die resultierende Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{RCM}$ kompakter aufgebaut ist als die ursprüngliche Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{FE,1}$ in Bild 5-17. Durch diese Umstrukturierung der Systemmatrizen wird die zeitliche und numerische Effizienz zur Erzeugung der Krylov-Basen mindestens um den Faktor 24 verbessert. So beschleunigt sich die Berechnung der reduzierten Systemmatrizen des Teilsystems 1 mit dem SOAR-Algorithmus aus Bild 5-3 bspw. um den Faktor 24, die Berechnung der reduzierten Systeme mit dem PRIMA-Algorithmus aus Bild 5-4 sogar um den Faktor 26. Da sich die Krylov-Unterraummethode bezüglich unterschiedlicher Darstellungsformen des Modells invariant verhält, wie in Unterkapitel 5.1 erläutert, ändert sich das Reduktionsergebnis bezüglich der Umsortierung der Matrizen, die mittels des Block-Arnoldi-Algorithmus erstellt wurden, nur im Rahmen der numerischen Genauigkeit. Dagegen ändern sich die Reduktionsergebnisse des SOAR-Algorithmus soweit, dass die Anzahl der instabilen Pole abnimmt. Die Approximationsqualität der reduzierten Systeme des SOAR-Algorithmus variiert nur im Rahmen der numerischen Genauigkeit.

Durch eine geschickte Modellierung des FE-Systems, wie noch in Unterkapitel 6.2.1 detailliert beschrieben wird, lässt sich die Anzahl der Ein- und Ausgänge im Vorfeld herabsetzten. Diese Modellierungsmethode verwendet masselose MPC-Elemente. Am Beispiel des Teilsystems 1 mit zehn Koppelknoten an einer Linearführung der Y-Achse wird deutlich, dass sich die Norm der Massenmatrix hierbei drastisch erhöht auf $N_{2,M} = 8{,}615 \cdot 10^{17}$, die Norm der Steifigkeitsmatrix sich dagegen auf den Wert $N_{2,K} = 1{,}022 \cdot 10^{19}$ reduziert. Bei diesem System ist jeder Knoten auf der Fläche der Schienenführung mit einem MPC-Element verbunden. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Nachbarschaftsbeziehungen massiv und es sind mehr FE-Knoten

miteinander gekoppelt, als ohne MPC-Elemente, was direkt an der Struktur der Matrizen zu erkennen ist. Infolge dessen erhöht sich die Bandbreite der Massenmatrix auf den Wert $B_W = 122.861$, wie auch in Bild 5-19 deutlich wird.

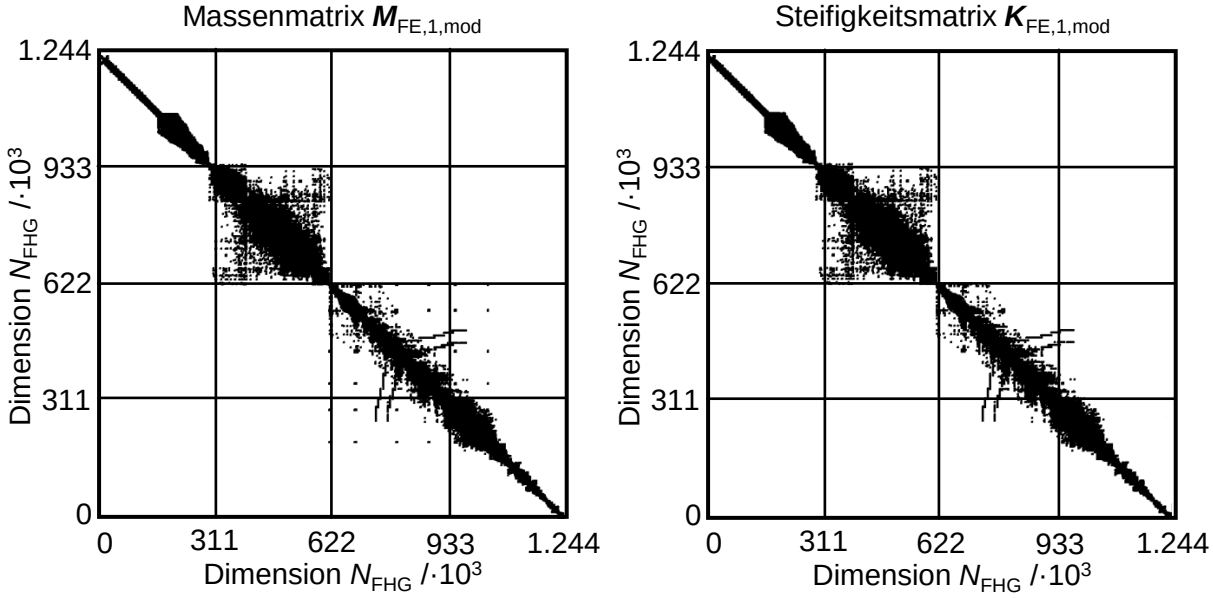


Bild 5-19: Grafische Repräsentation der Systemmatrizen $\boldsymbol{M}_{FE,1,mod}$ und $\boldsymbol{K}_{FE,1,mod}$ des Teilsystems 1

In Tabelle 5-6 sind die Kennzahlen der durch die MPC-Elemente modifizierten Massen- und Steifigkeitsmatrix, die Dimension des modifizierten Referenzsystems, sowie die Anzahl der Matrizeneinträge aufgelistet.

Tabelle 5-6: Statistik der Massen- und Steifigkeitsmatrix des modifizierten Teilsystems 1 mit hoher Anzahl an MPC-Elementen

Bezeichnung	Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{FE,1,mod}$	Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{FE,1,mod}$
Dimension N_{FHG}	1.243.315	1.243.315
Matrizeneinträge N_{ME}	5.276.649	18.217.392
Konditionszahl K_Z	∞	$4{,}18 \cdot 10^{28}$
Spektralnorm $N_{2,i}$	$7{,}298 \cdot 10^{18}$	$1{,}177 \cdot 10^{18}$
Minimaler Wert N_{min}	$-4{,}158 \cdot 10^{17}$	$-3{,}744 \cdot 10^{14}$
Maximaler Wert N_{max}	$8{,}315 \cdot 10^{17}$	$4{,}087 \cdot 10^{14}$
Bandbreite B_W	122.861	84.115

In Unterkapitel 5-2 beschreibt Gleichung 5-5 das Übertragungsverhalten eines SISO-Systems von einem Eingangs- zu einem Ausgangspunkt. Bei der Betrachtung eines MIMO-Systems werden die einzelnen Übertragungsfunktionen zu einer Übertragungsfunktionsmatrix vereinigt. Das heißt, dass bei der Approximation eines MIMO-Systems mit einem niedrigdimensionalen System die jeweiligen Übertragungsfunktionen je Eingangs-Ausgangs-Paar benötigt werden. Diese werden anschließend durch das Superpositionsprinzip in einer Matrix zusammengefasst. Daher steigt der Rechenaufwand mit der Anzahl der Ein- und Ausgänge quadratisch an. Um diesen Rechenaufwand zu mindern, ist eine vorherige Reduktion der Ein- und Ausgangsdimensionen nötig. Eine Methode zur Reduktion der Ein- und Ausgänge wird im nächsten Unterkapitel erarbeitet.

5.4 Singulärwertzerlegungsbasierte Verfahren

5.4.1 Definition und Beschreibung singulärwertzerlegungsbasierter Verfahren

In diesem Abschnitt wird auf die Modellordnungsreduktionsmethoden eingegangen, mit denen die abschneidenden Projektionsmatrizen durch die Singulärwertzerlegung erstellt werden. Die singulärwertzerlegungsbasierten Verfahren werden häufig auch als SVD-Verfahren bezeichnet. Die Abkürzung kommt aus dem Englischen für Singular-Value-Decomposition und steht für den Begriff Singulärwertzerlegung. Diese ist definiert durch die in Gleichung 5-27 gezeigte Zerlegung von $\tilde{\boldsymbol{A}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_{\mathrm{SVD},1}, \sigma_{\mathrm{SVD},2}, \sigma_{\mathrm{SVD},3}, \cdots, \sigma_{\mathrm{SVD},N}) \tag{5-27}$$

mit σ_{SVD} als Singulärwerte von $\tilde{\boldsymbol{A}}$. Im Rückschluss kann die Matrix $\tilde{\boldsymbol{A}}$ somit als Produkt dreier Matrizen beschrieben werden:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}. \tag{5-28}$$

Die Matrix $\boldsymbol{U}$ ist unitär und besitzt die gleiche Anzahl an Spalten wie $\tilde{\boldsymbol{A}}$. Die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ hat die gleiche Größe wie $\tilde{\boldsymbol{A}}$ und ist eine Diagonalmatrix. Die Diagonalelemente von $\boldsymbol{\Sigma}$ sind die Singulärwerte σ_{SVD} und die Spalten von $\tilde{\boldsymbol{U}}$ und $\tilde{\boldsymbol{V}}$ die rechten und linken Singulärvektoren, die als Basenvektoren fungieren. Im technisch relevanteren Fall, bei dem die Matrizen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ Lösungen der beiden Lyapunov-Gleichungen aus der Gleichung 2-27 sind, gilt:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_{\mathrm{HSV},1}, \sigma_{\mathrm{HSV},2}, \sigma_{\mathrm{HSV},3}, \cdots, \sigma_{\mathrm{HSV},N}) \tag{5-29}$$

mit den nach der Größe sortierten Hankel-Singulärwerten σ_{HSV} der Gleichung 2-30. Die Hankel-Singulärwerte fallen betragsmäßig bei den meisten mechanischen Systemen schnell ab, wie es auch in Bild 5-25 noch zu sehen sein wird. Durch die Separation der betragsmäßig kleinen Hankel-Singulärwerte bzw. der Zustände, die für das Übertragungsverhalten zu vernachlässigen sind, lässt sich das System bei gleichzeitig guter Approximation reduzieren. Indem außerdem die schlecht bzw. nicht beobachtbaren und steuerbaren Zustände sowie die doppelt vorkommenden Zustände abgeschnitten werden, kann eine weitere Reduktion des Systems erreicht werden. Die nicht benötigten Eigenschaften werden durch das Abschneiden entfernt. Dieser Vorgang ist auch unter dem Begriff „balanciertes Abschneiden“ (engl.: Balanced-Truncation-Approximation, kurz: BTA) oder „Balancieren“ bekannt. Jedes stabile System, wie es in Unterkapitel 2.4.2 definiert wurde, besitzt genau eine balancierte Zustandsraumdarstellung. Für deren Gramsche-Matrizen gilt [ANT05, BEN11]:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{bal}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{bal}} = \mathrm{diag}(\sigma_{\mathrm{HSV},1}, \sigma_{\mathrm{HSV},2}, \sigma_{\mathrm{HSV},3}, \cdots, \sigma_{\mathrm{HSV,L}}). \tag{5-30}$$

Die Zustandstransformation $\boldsymbol{T}_{\mathrm{bal}}$ wird so gewählt, dass die Hankel-Singulärwerte $\sigma_{\mathrm{HSV},k}$ aus Gleichung 2-30 nach Größe sortiert sind. Die jeweiligen Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} entsprechen den Quadratwurzeln der Eigenwerte vom Matrixprodukt $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$. Das exakt balancierte Abschneiden hat aufgrund der Matrixmultiplikation mit dicht besetzten Matrizen einen hohen numerischen Aufwand im Bereich von $\mathcal{O}(n^3)$ und ist daher für sehr große Systeme nicht geeignet, wie auch schon von GUGERCIN [GUG08] bestätigt wurde.

Um die Zustandstransformation als Projektionsmatrix $\boldsymbol{T}_{\mathrm{bal}}$ zu erzeugen, werden die folgenden Schritte durchgeführt. Die Lyapunov-Gleichungen aus Gleichung 2-27 werden aus numerischen Gründen nicht direkt gelöst, sondern stattdessen Verfahren verwendet, die die obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{S}$ und die untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$ liefern. Mit der Cholesky-Zerlegung erhält man die Matrizen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ als Produkt der Dreiecksmatrizen [ANT05]:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \text{ und } \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}. \tag{5-31}$$

Die Hankel-Singulärwerte $\sigma_{HSV,}$ erhält man als Produkt der Matrix $\boldsymbol{S}$ und durch Transponieren der Matrix $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{\Sigma}^{*}\tilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}. \tag{5-32}$$

Dieses Produkt wird nicht explizit berechnet, obwohl die Singulärwerte $\sigma_{HSV,k}$ in $\boldsymbol{\Sigma}^{*}$ enthalten sind. Dazu wird die Definition der Zustandstransformation $\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$ nach Gleichung 5-33 benötigt:

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}(t) = \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}} \cdot \boldsymbol{x}(t). \tag{5-33}$$

Die Zustandstransformationsmatrix wird wie folgt berechnet [BEN11]:

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}^{*}}\tilde{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}. \tag{5-34}$$

Bei der Reduktion werden nicht alle Singulärwerte berücksichtigt, sondern lediglich die ersten L. Der numerische zeitliche Aufwand zur Ermittlung der Transformationsmatrix lässt sich mindern, wenn zuvor das Referenzsystem mithilfe des RCM-Algorithmus aus Unterkapitel 5.3.5 umsortiert wird.

5.4.2 Hybride Reduktionsverfahren hochdimensionaler Ein- und Ausgangsräume

Zur Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension wurden in den letzten Jahren unterschiedliche Verfahren entwickelt, die insbesondere in der Mikroelektronik für die Simulation der Schaltkreise ihre Anwendung finden [TAN07]. Das ursprünglich von FELDMANN [FEL04] vorgestellte SVDMOR-Verfahren reduziert die Ein- und Ausgangsdimension von Systemen im Zustandsraum. Bei diesem Verfahren werden im Gegensatz zum weiterentwickelten ESVDMOR-Verfahren die Ein- und Ausgangsmomente nicht getrennt erstellt [LIU08]. Aus der Praxis ist bekannt, dass das SVDMOR für Systeme mit stark unterschiedlichen Ein- und Ausgangsraumdimensionen nicht geeignet ist. Hinzu kommt, dass beim SVDMOR-Verfahren die Passivität nicht gewährleistet wird [TAN07]. Aus diesem Grund ist das SVDMOR-Verfahren für die hier behandelte Fragestellung nicht geeignet. FEHR [FEH11] konnte in seiner Arbeit zeigen, dass die erweiterte Version, die als Extended-Singular-Value-Decomposition (ESVD) bezeichnet wird, sich grundsätzlich auch für mechanische Systeme anwenden lässt.

Mit der ESVD werden die Ein- und Ausgangsräume von Systemen im Zustandsraum reduziert. Mit dieser Methode, die auch unter der Bezeichnung ESVDMOR bekannt ist, lässt sich der Nachteil der vielen Ein- und Ausgänge in Kombination mit der Krylov-Unterraummethode abschwächen [BEN10a, LIU08]. Dieses Verfahren hat seinen Ursprung ebenfalls in der Reduktion von mikroelektronischen Schaltkreisen.

Der Ablauf der ESVD-Methode lässt sich für ein System mit P Eingängen und Q Ausgängen wie folgt zusammenfassen: Die Anzahl L_{ESVD} der zu berechnenden Blockmomente $\boldsymbol{m}_k$ ergibt sich aus dem ganzzahligen Minimum des Quotienten entweder der Ein- und Ausgänge oder der Aus- und Eingänge, wie in Gleichung 5-35 aufgestellt [LIU06]:

$$L_{\mathrm{ESVD}} = \min\left\{\left[\frac{P}{Q}\right], \left[\frac{Q}{P}\right]\right\} \tag{5-35}$$

Danach folgt die Berechnung der ersten L_{ESVD} Bockmomente $\boldsymbol{m}_k$ mit $k \in \{0, 1, \cdots, L_{\mathrm{ESVD}} - 1\}$ und s_0 als frei wählbarem Entwicklungspunkt s_0, wie in Gleichung 5-5 dargestellt. Mit der Abkürzung aus Gleichung 5-36:

$$\boldsymbol{G} = s_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}} \tag{5-36}$$

ergibt sich für die k-ten Blockmomentenmatrizen mit der Dimension $p \times q$ die folgende Blockmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_k$ in Gleichung 5-37 [LIU08]:

$$\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}(-\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ZR}})^k\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}. \tag{5-37}$$

Diese Blockmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_k$ ist derart aufgebaut, dass die Matrixkoeffizienten die einzelnen Momente von den jeweiligen Ein- und Ausgängen sind. Anders ausgedrückt, stellt diese Blockmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_k$ eine Kombination der einzelnen SISO-Systeme dar.

$$\boldsymbol{m}_k = \begin{bmatrix} m_{1,1}^k & m_{1,2}^k & \cdots & m_{1,p}^k \\ m_{2,1}^k & m_{2,2}^k & \cdots & m_{2,p}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{q,1}^k & m_{q,2}^k & \cdots & m_{q,p}^k \end{bmatrix} \tag{5-38}$$

Die Eingangsmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_{\mathrm{E}}$ und die Ausgangsmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_{\mathrm{A}}$ werden aus den einzelnen Schur-Komplimenten der Blockmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_k$ zusammengesetzt. Die Koeffizienten der *j*-ten Spalte der Eingangsmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_{\mathrm{E}}$ entsprechen den Momenten aus der Reihenentwicklung von Gleichung 5-37 für alle Ausgänge aufgrund des Eingangseinflusses *j*. Auf ähnliche Weise repräsentieren die Koeffizienten aus der *j*-ten Spalte der Ausgangsmomentenmatrix $\boldsymbol{m}_{\mathrm{A}}$ den Ausgang *j* aufgrund aller Eingänge [BEN10a]:

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{E}} = [\boldsymbol{m}_0 \quad \boldsymbol{m}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{m}_{L_{\mathrm{ESVD}}-1}]^{\mathrm{T}} \text{ und } \boldsymbol{m}_{\mathrm{A}} = [\boldsymbol{m}_0^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{m}_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{m}_{L_{\mathrm{ESVD}}-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \tag{5-39}$$

Bei der expliziten Auswertung der Momente höherer Ordnung ist zu beachten, dass dies zu schlecht konditionierten Matrizen führen kann. Da zum einen aber das SVD-Verfahren auch mit schlecht konditionierten Matrizen funktioniert und zum anderen für Werkzeugmaschinen eher Momente niedriger Ordnung gefordert sind, kann dieses Problem hier vernachlässigt werden. Außerdem entstehen durch die hochdimensionalen Momente häufig nicht dominante Pole, die in der Regel wiederum vernachlässigt werden können [LIU08]. Deshalb lässt sich für die hier betrachtete Problemstellung bei den Ein- und Ausgangsmomentenmatrizen eine Singulärwertzerlegung anwenden.

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{E}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} \text{ und } \boldsymbol{m}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \tag{5-40}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{U}_{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}$ und $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}}$ werden im weiterem Verlauf nicht benötigt und werden daher vernachlässigt. Die orthogonalen Matrizen $\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}$ enthalten die dominanten Spaltenunterräume. Die Matrizen $\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}$ und $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}$ werden nach den ersten ζ und δ Spalten abgeschnitten, die mit den relevanten Singulärwerten korrespondieren. Damit ergeben sich die Spaltenunterräume $\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}$ und $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}$. Die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}$ und die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}$ werden niedrigdimensional durch den folgenden Ausdruck approximiert [LIU08]:

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}} \approx \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}^{\mathrm{T}} \text{ und } \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} \approx \boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}\boldsymbol{C}_{\mathrm{L}}. \tag{5-41}$$

Da die Singulärwertzerlegung numerisch teuer ist, werden Verfahren benötigt, die eine Annäherung an die Singulärwerte σ_{SVD} liefern. Um einen Eindruck vom numerischen Aufwand zu erhalten, wird das von BENNER [BEN10a] vorgestellte Beispiel herangezogen. In diesem Beispiel würde bei einem System mit der Dimension von $N = 10^6$ und bei einer CPU mit 3 GHz die Singulärwertzerlegung für die $22N^3$ Gleitkommaoperationen je Sekunde (engl.: floating point operations per second (flops)) eine Berechnungszeit von ca. 230 Jahren in Anspruch nehmen. Aus diesem Grund wird eine Approximation des abschneidenden und singulärwertzerlegenden Verfahrens zur Erzeugung der reduzierten Ein- und Ausgangsmatrizen mit den Dimensionen $N \times \zeta$ und $N \times \delta$ angewendet.

Durch das Verfahren verlieren die reduzierten Ein- und Ausgangsmatrizen allerdings ihre direkte physikalische Interpretation [LIU08]. Deshalb wird eine Rücktransformation in den physikalisch interpretierbaren Raum benötigt. Dazu muss eine Umstellung der Gleichung erfolgen,

die mittels Moore-Penrose-Pseudoinversen [PEN55] ermöglicht wird. Die Pseudoinverse wird mit $(\bullet)^{+}$ gekennzeichnet. Da die Reduktionsmatrizen orthonormale Matrizen sind, vereinfachen sich diese zur Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ durch die Multiplikation der Matrizen mit ihrer Transformierten, wie es in Gleichung 5-42 gezeigt wird.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_L &= \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}^{\mathrm{T}+} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}\left(\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}\right)^{-1} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta} \\ \boldsymbol{C}_L &= \boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}^{+}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} = \left(\boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}\right)^{-1}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}\end{aligned} \tag{5-42}$$

Mit diesen reduzierten Ein- und Ausgangsmatrizen kann das System in der Zustandsraumdarstellung aus Gleichung 2-20 wie folgt dargestellt werden.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{E},\zeta}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_{\mathrm{E}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{E},0}\end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{A}} &= \boldsymbol{V}_{\mathrm{A},\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}}\end{aligned} \tag{5-43}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich nun mit der Krylov-Unterraummethode reduzieren. Nach der Reduktion können die zuvor mittels ESVDMOR reduzierten Ein- und Ausgangsmatrizen wieder zurücktransformiert werden. Für diese Rücktransformation werden die Matrizen aus Gleichung 5-42 verwendet. Somit stehen dem System nach der Reduktion wieder die ursprünglichen Ein- und Ausgangsmatrizen zur Verfügung.

Diese Methode kann auch auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung übertragen werden. Dazu wird statt der Momentenberechnung aus Gleichung 5-5 die Momentenmatrix mit der Dimension $P \times Q$ folgendermaßen berechnet:

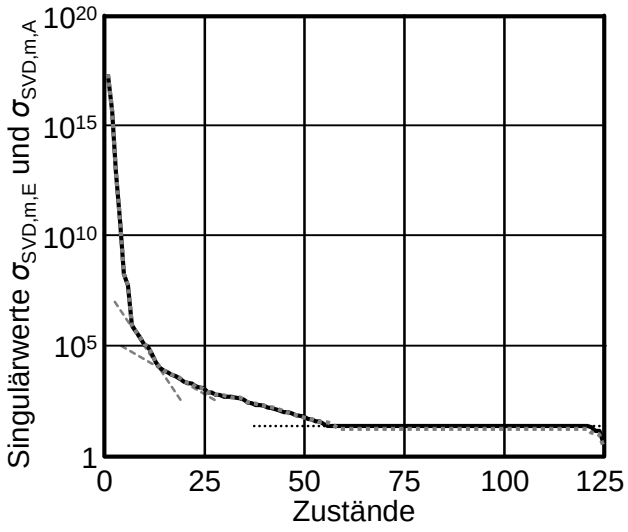
$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}(s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{5-44}$$

Die Berechnung der Momente aus der Übertragungsfunktion der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist in Gleichung 5-11 detaillierter dargestellt. Die Schritte der Singulärwertzerlegung und der Rücktransformation in den physikalischen, interpretierbaren Raum werden analog durchgeführt, wie von Gleichung 5-38 bis Gleichung 5-42 dargestellt.

Die Reduktion des Ein- und Ausgangsraums wird am Beispiel des Teilsystems 3 durchgeführt, das in Unterkapitel 0 definiert wurde. Das FE-Modell besitzt nach einer Modellaufbereitung, die noch in Unterkapitel 6.2 erläutert wird, $N_{\mathrm{KK,ges}} = 125$ Koppelknoten. Diese Koppelknoten sind zum einen Eingänge mit der Anzahl von $P = 122$, zum anderen gleichzeitig auch Ausgänge mit der Anzahl von $Q = 125$. Nach Gleichung 5-35 ergibt sich für diese Anzahl von Ein- und Ausgangsknoten das ganzzahlige Minimum von $L_{\mathrm{ESVD}} = 1$. Daraus folgt, dass nur das erste Approximationsglied der Padé-Approximation von Gleichung 5-37 benötigt wird.

Zur Festlegung der Dimension des reduzierten Eingangsraums ζ und des reduzierten Ausgangsraums δ wird eine Fehlerschranke bezüglich der noch zu definierenden Gleichung 5-52 verwendet. Zur Visualisierung der Fehlerschranke wird der Verlauf der Singulärwerte $\sigma_{\mathrm{SVD,m,E}}$ und $\sigma_{\mathrm{SVD,m,A}}$ der Ein- und Ausgangsmomentenmatrizen $\boldsymbol{m}_{\mathrm{E}}$ und $\boldsymbol{m}_{\mathrm{A}}$ in Abhängigkeit der Zustände in Bild 5-20 dargestellt. Zusätzlich sind zwei Varianten der Definition einer Fehlerschranke abgebildet. In diesem Bild ist zu erkennen, dass ab der Zustandszahl 54 keine wesentliche Änderung der Singulärwerte $\sigma_{\mathrm{SVD,m,E}}$ und $\sigma_{\mathrm{SVD,m,A}}$ mehr erfolgt. Daher werden als Reduktionsgrenze mittels der Stagnation der Singulärwerte $\sigma_{\mathrm{SVD,m,E}}$ und $\sigma_{\mathrm{SVD,m,A}}$ bezüglich der Ein- und Ausgangsräume die Werte $\zeta_{\mathrm{l}} = \delta_{\mathrm{l}} = 54$ verwendet. Eine andere Möglichkeit zur Fehlerschrankendefinition bietet der Gradient der Singulärwerte $\sigma_{\mathrm{SVD,m,E}}$ und $\sigma_{\mathrm{SVD,m,A}}$. Im Bild wird deutlich, dass die Abnahme der Singulärwerte am Zustand 12 nicht mehr so stark ausgeprägt ist. Dieser Punkt ist durch die Darstellung der Gradienten leicht zu identifizieren. Der Zustand

12 wird zusätzlich als Reduktionsgrenze für den Ein- und Ausgangsraum von $\zeta_{II} = \delta_{II} = 12$ in Betracht gezogen. Die zugehörigen Reduktionsergebnisse für die beiden Varianten der Ein- und Ausgangsdimension werden in Bild 5-21 gezeigt.



System:	Teilsystem 3	
Reduktionsmethode:	ESVDMOR	
Algorithmus:	SVD	
Referenzsystem:	N_{FHG}	= 1.243.265
Eingangsdimension:	P	= 122
Ausgangsdimension:	Q	= 125
Entwicklungspunkt:	s_0	= 0 s^{-1}
Deflationsgrenze:	δ	= 10^{-12}
Dimension:	L	= 40
Dämpfung:	α	= 7,5
	β	= 0,0000125

Fehlerschranke mittels Gradienten
Fehlerschranke mittels Stagnation

Singulärwerte der Ein- und Ausgangsmomentenmatrizen $\boldsymbol{m}_E$ und $\boldsymbol{m}_A$
— Singulärwerte der Eingangsmomentenmatrix $\sigma_{SVD,m,E}$
····· Singulärwerte der Ausgangsmomentenmatrix $\sigma_{SVD,m,A}$

Bild 5-20: Verlauf der Singulärwerte der Ein- und Ausgangsmomentenmatrizen

Aus der Praxis ist bekannt, dass ab einer bestimmten Systemgröße der numerische Aufwand insbesondere für die Invertierung in Gleichung 5-35 und die Singulärwertzerlegung in Gleichung 5-40 zu hoch für kommerzielle Rechner ist. Die Anwendung des ESVDMOR-Verfahren auf das Teilsystem 1, das eine Systemdimension von $N_{FHG} < 1$ Mio. Freiheitsgraden besitzt, ist lediglich auf einer Workstation möglich. Um die Auswertung auf einem „handelsüblichen ausgestattetem Computer“ durchzuführen, wird eine kombinierte Reduktion vorgenommen.

Dazu wird im ersten Schritt das Teilsystem 1 mit der Krylov-Unterraummethode reduziert. Dies lässt sich mit dem Block-Arnoldi-Algorithmus aus Bild 5-4 realisieren. Für den Reduktionsvorgang werden die folgenden Parameter verwendet: die Entwicklungsgliederanzahl von $L = 500$ und der Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ s^{-1}$ sowie die Deflationsgrenze von $\delta = 10^{-12}$. Da das Teilsystem 1 jeweils $P = 188$ Eingänge und $Q = 188$ Ausgänge besitzt, entsteht ein System von $L_{MIMO,1} = 94.000$ Freiheitsgraden. Im zweiten Schritt wird das ESVDMOR-Verfahren auf das reduzierte Teilsystem mit $L_{MIMO,1} = 94.000$ Freiheitsgraden angewendet. Die Dimension des reduzierten Ein- und Ausgangsraums wird für das Teilsystem 1 auf $\zeta = \delta = 16$ gesetzt. Dieser Wert wird analog zu Bild 5-20 mittels dem Gradienten der Singulärwerte $\sigma_{SVD,m,E}$ und $\sigma_{SVD,m,A}$ ermittelt. Mit den durch das ESVDMOR-Verfahren reduzierten Ein- und Ausgangsmatrizen wird dann im dritten Schritt die Reduktion mit der Krylov-Unterraummethode wiederholt. Dafür kommt wieder der Block-Arnoldi-Algorithmus mit den Reduktionsparametern $L = 40$, $s_0 = 0\ s^{-1}$ und $\delta = 10^{-12}$ zur Anwendung. Mit diesen Parametern entsteht dann ein reduziertes MIMO-System von $L_{MIMO,II} = 840$ Freiheitsgraden. Durch diese kombinierte Reduktion ist das Teilsystem 1 mit $L_{MIMO,1} = 94.000$ Freiheitsgraden mit einem 4-Kern-Computer, der eine CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher besitzt, reduzierbar. Die direkte Anwendung des ESVDMOR-Verfahren auf das Teilsystem 1 braucht dagegen eine 24-Kern-Workstation mit jeweils einer CPU Leistung von 2,1 GHz und 64 GB Arbeitsspeicher, da der numerische Aufwand hier sehr hoch ist.

Für den Vergleich der zwei verschiedenen Strategien zur Reduktion der Ein- und Ausgangsraumdimension werden in Bild 5-21 unterschiedliche Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ gezeigt. Diese Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_{\mathrm{P}}$ werden am Messsystem des Teilsystems 3 in Y-Richtung ausgewertet. Die Anregungskraft wirkt in X-Richtung an der Kugelgewindespindel im Bereich der Kugelgewindemutter und beträgt $F_{\mathrm{AX}} = 10$ N. In dieser Darstellung wird das originale FE-Modell als Referenzsystem verwendet. Zusätzlich wird das Ergebnis des Reduktionsvorgangs mit dem Block-Arnoldi-Algorithmus eines SISO-Systems mit den Reduktionsparametern $L = 25$, $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ und $\delta = 10^{-12}$ visualisiert. Die Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension wird mit den beiden Strategien durchgeführt.

Die erste betrachtete Strategie ist die Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension mithilfe des ESVDMOR-Verfahrens direkt am Referenzmodell des Teilsystems 3 mit der Dimension $N_{\mathrm{FHG}} = 70.669$. Die Ein- und Ausgangsdimension wird zum einen auf $\zeta_{\mathrm{I}} = \delta_{\mathrm{I}} = 54$ und zum anderen auf $\zeta_{\mathrm{II}} = \delta_{\mathrm{II}} = 12$ reduziert. Bis zur Frequenz $f = 500$ Hz ist keine wesentliche Änderung der Approximationsqualität in Abhängigkeit von der Ein- und Ausgangsdimension zu erkennen. Oberhalb der Frequenz von $f = 500$ Hz lässt sich eine Verbesserung der Approximationsqualität bei der höheren Ein- und Ausgangsdimension von $\zeta_{\mathrm{I}} = \delta_{\mathrm{I}} = 54$ am Diagramm der absoluten Abweichung $\varepsilon_{\mathrm{abs}}$ und relativen Abweichung $\varepsilon_{\mathrm{rel}}$ feststellen. Ein ähnlicher Verlauf der absoluten und relativen Abweichung wird auch für die zweite Strategie zur Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension deutlich.

Bei der zweiten Strategie zur Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension wird im ersten Schritt das Teilsystem 3 mit $N_{\mathrm{FHG}} = 70.669$ Freiheitsgraden und $P = 122$ Eingängen und $Q = 125$ Ausgängen mittels der Krylov-Unterraummethode auf die Dimension $L_{\mathrm{MIMO}} = 12.000$ Freiheitsgrade reduziert. Die Reduktion wird mittels des Block-Arnoldi-Algorithmus mit der Entwicklungsgliederanzahl von $L = 100$ und dem Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ sowie der Deflationsgrenze von $\delta = 10^{-12}$ durchgeführt. Das hieraus resultierende System wird dann im Folgenden anhand des ESVDMOR-Verfahrens mit den gleichen Parametern wie in der ersten Strategie reduziert.

In Bild 5-21 ist zu erkennen, dass bei den gewählten Reduktionsparametern alle dargestellten Modellordnungsreduktionsverfahren den stationären Zustand nicht exakt abbilden. Die Modellordnungsreduktionsverfahren können anscheinend die Starrkörpermoden nicht korrekt wiedergeben. Dies wird an den hohen absoluten Abweichungen $\varepsilon_{\mathrm{abs}}$ und somit auch an den hohen relativen Abweichungen $\varepsilon_{\mathrm{rel}}$ bei der Frequenz von $f = 0$ Hz deutlich.

Nichtsdestotrotz ist am Bild zu sehen, dass die erste Strategie zur Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension genaue Ergebnisse liefert. Dieses Resultat bestätigen auch die Mittelwerte der absoluten Abweichungen $\overline{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_{ε}. Diese Größen sind in der Tabelle 5-7 aufgelistet. Diese auftretenden Abweichungen lassen sich durch die Erhöhung der Entwicklungsgliederanzahl L bei der vorherigen Reduktion für das ESVDMOR-Verfahren mindern. Generell bietet die zweite Strategie zur Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension eine gute Alternative zur ersten Methode, wenn die Computerleistung nicht ausreichend ist, da die Abweichungen gegenüber der ersten Reduktionsstrategie für die praktische Verwendung vernachlässigbar klein sind.

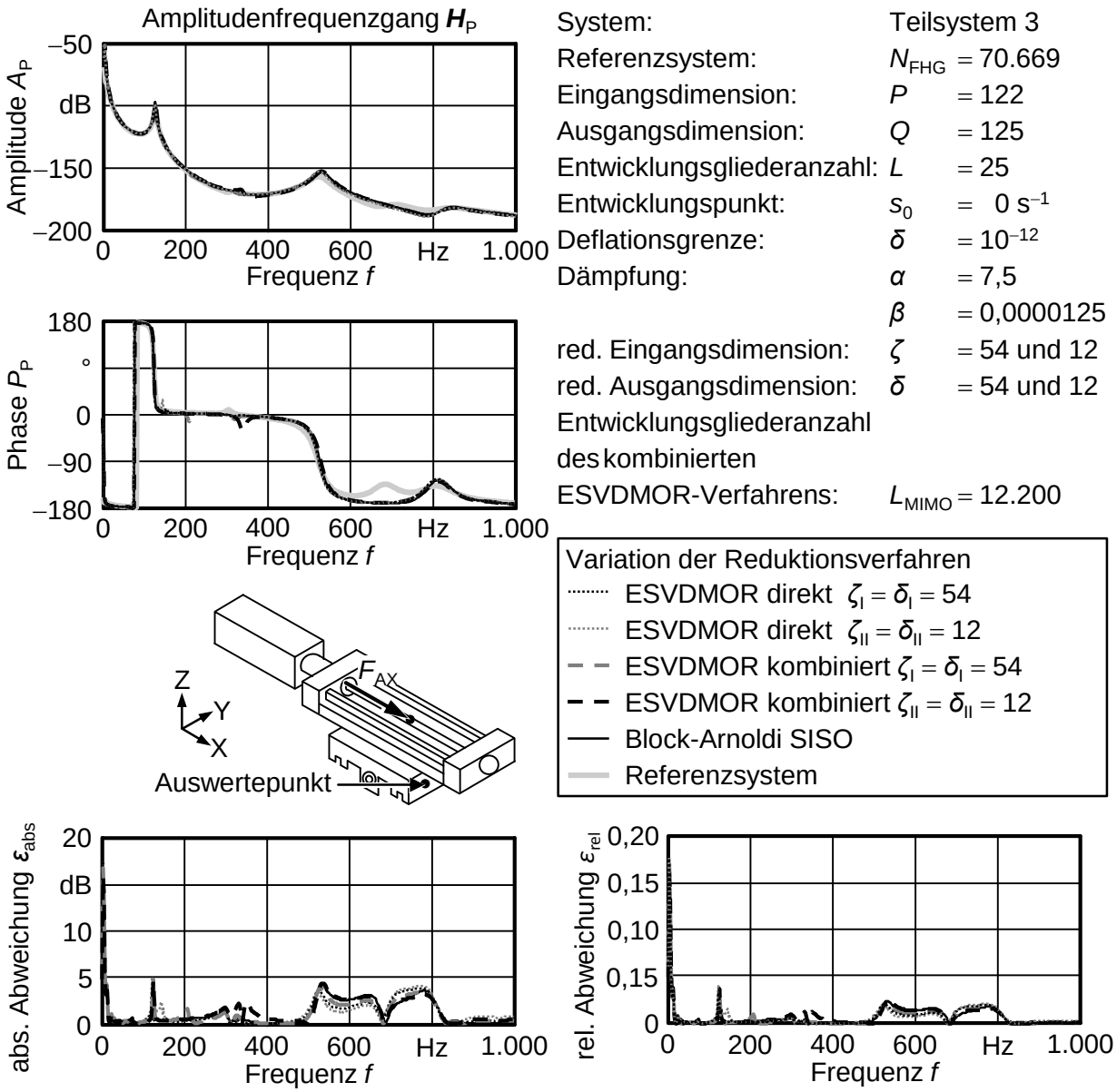


Bild 5-21: Einfluss des Reduktionsverfahrens auf die Approximationsgüte des reduzierten MIMO-Systems im Frequenzbereich

Tabelle 5-7: Übersicht der Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und der zugehörigen Standardabweichungen σ_ε sowie der Anzahl der instabilen Pole in Abhängigkeit von der Strategie zur Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension

Bezeichnung	Block Arnoldi SISO	ESVDMOR direkt $\zeta_I = \delta_I = 54$	ESVDMOR direkt $\zeta_{II} = \delta_{II} = 12$	ESVDMOR kombiniert $\zeta_I = \delta_I = 54$	ESVDMOR kombiniert $\zeta_{II} = \delta_{II} = 12$
Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$	1,132 dB	1,125 dB	1,205 dB	1,139 dB	1,173 dB
Standard-abweichung σ_ε	1,463 dB	1,498 dB	1,482 dB	1,439 dB	1,518 dB
Anzahl instabiler Pole im Zustandsraum	0	0	0	0	0

5.5 Fehlerabschätzung und Abbruchkriterium

5.5.1 Fehlerabschätzung für den automatisierten Abbruch

Mit den Modellordnungsreduktionsverfahren werden niedrigdimensionale Ersatzmodelle aus einem hochdimensionalem Referenzmodell erstellt. Die Ersatzmodelle weisen einen Unterschied zum Referenzmodell auf, der durch den Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ beschrieben wird. In den unterschiedlichen Entwicklungsphasen, die exemplarisch in Bild 5-22 skizziert sind, wird die Angabe eines Approximationsfehlers in Form einer Abweichung als Entscheidungshilfe benötigt.

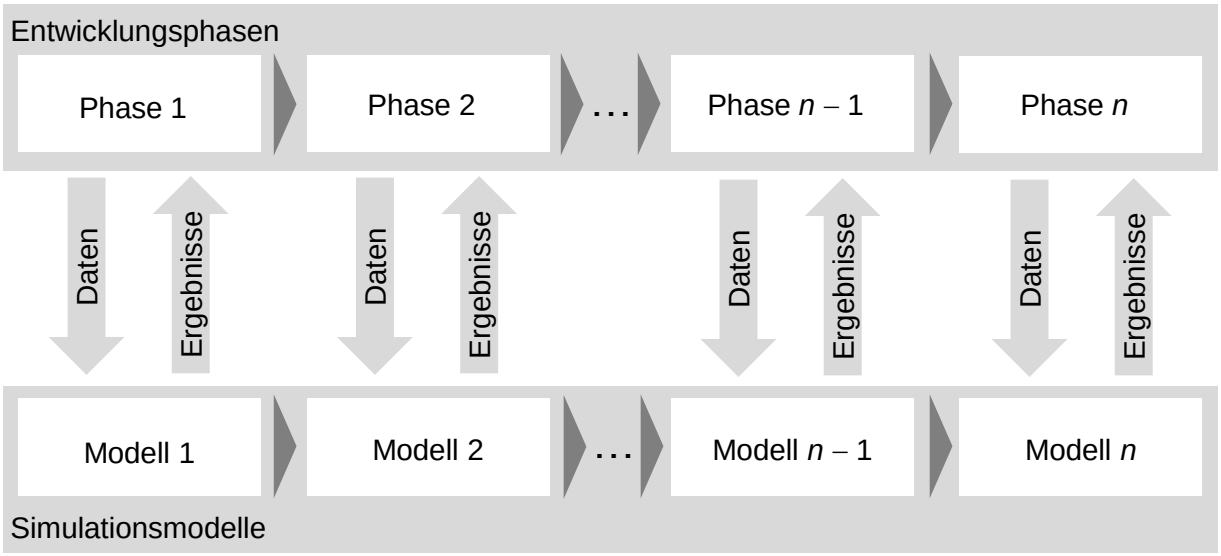


Bild 5-22: Veränderung des Simulationsmodells in Abhängigkeit von den Entwicklungsphasen

Für die automatisierte Erzeugung niedrigdimensionaler Ersatzmodelle wird bspw. ein Approximationsfehler als Abbruchkriterium benötigt. In diesem Fall wird die manuelle Festlegung der Reduktionsparameter überflüssig, wie es in Unterkapitel 5.3 durchgeführt wurde. Mit einem Approximationsfehler als Abbruchkriterium kann zusätzlich die Qualität des Ersatzmodells vor der Modellordnungsreduktion festgelegt werden. Die Automatisierung des Reduktionsprozesses empfiehlt sich, weil sie zur Verkürzung der Entwicklungszeit in den unterschiedlichen Entwicklungsphasen beiträgt und die automatische Verkettung der Modelle begünstigt. Ein Approximationsfehler erleichtert die Kompromissfindung zwischen einem möglichst niedrigdimensionalen Modell, das eine zeitlich effiziente Simulation zulässt, und einem Modell mit ausreichend hoher Genauigkeit.

In Abschnitt 5.2 beschreibt Gleichung 5-1 den Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR}}$ des Referenzmodells und dem reduzierten Zustandsvektor $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,red}}$. Der Unterschied zwischen dem Referenzsystem und dem reduzierten System wird durch den Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ ausgedrückt. In Unterkapitel 5.3 wurde in Gleichung 5-12 der Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ mittels Umstellung der Gleichung 5-1 definiert. In dieser Form lässt sich der Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{App}}$ nicht für die direkte Qualitätsaussage des reduzierten Systems verwenden. Daher werden für den Vergleich des reduzierten Systems mit dem Referenzsystem die frequenzabhängigen absoluten Abweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{abs}}$ aus Gleichung 5-13 und die frequenzabhängigen relativen Abweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{rel}}$ aus Gleichung 5-14 definiert. Für diese Angabe muss aber die Übertragungsfunktion des Referenzsystems berechnet werden, was mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden ist.

Diese Fehlerangabe ist im akademischen Bereich anwendbar, für das industrielle Umfeld allerding zu kosten- und zeitintensiv und damit ungeeignet. Daher braucht es in der Anwendung andere numerisch günstige Schranken als Abbruchkriterium, um eine automatische Reduktion zu realisieren. Beispiele für unterschiedliche Fehlerschranken als Abbruchkriterium stellt FEHR [FEH11] für die automatische Modellordnungsreduktion vor. Da noch keine zufriedenstellende Approximation der Reduktionsabweichung bekannt ist, ist dies noch Gegenstand aktueller Forschung [SOP11, WOL11, KOU13, PAN13].

5.5.2 Heuristische Abschätzung

Für die klassischen Modellordnungsreduktionsverfahren aus Unterkapitel 2.5.3 existiert keine mathematisch korrekte Abschätzung in Form eines Approximationsfehlers, die während des Reduktionsprozesses verwendet werden kann. Denn hierfür ist die komplette Eigenvektormatrix nötigt. Grundsätzlich sind aber heuristische Abschätzungen möglich [SEK12]. Heuristische Abschätzungen werden auch für die Momentenabgleichsverfahren angewendet. Zur Abschätzung des Approximationsfehlers können Energienormen verwendet werden. Mit der $\mathcal{H}_2$-Norm aus Gleichung 2-31, als Energiemaß der Impulsantwort interpretiert werden kann, wird die relative Abweichung ε_2 in Form der normierten Energiedifferenz definiert. Bei dieser Energiedifferenz muss zuvor ein Frequenzbereich bestimmt werden:

$$\varepsilon_2 = \frac{\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{red}} \right\|_{\mathcal{H}_2}}{\left\| \boldsymbol{G} \right\|_{\mathcal{H}_2}} . \tag{5-45}$$

Analog dazu wird mit der $\mathcal{H}_\infty$-Norm aus Gleichung 2-33 die relative Abweichung ε_∞ wie folgt ermittelt:

$$\varepsilon_\infty = \frac{\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{red}} \right\|_{\mathcal{H}_\infty}}{\left\| \boldsymbol{G} \right\|_{\mathcal{H}_\infty}} . \tag{5-46}$$

Bei beiden Angaben muss die Energienorm des hochdimensionalen Referenzsystems berechnet werden. Dies ist mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden. Daher ist diese Angabe für das industrielle Umfeld nicht umsetzbar. Nach MEIER und LUENBERGER [MEI67] können im $\mathcal{H}_2$-optimalen Fall die Fehlernormen folgendermaßen angegeben werden:

$$\left\| \boldsymbol{G}_{\mathrm{e}} \right\|_2^2 = \left\| \boldsymbol{G} \right\|_2^2 - \left\| \boldsymbol{G}_{\mathrm{red}} \right\|_2^2 \tag{5-47}$$

Nach Gleichung 2-32 lässt sich die Fehlernorm durch die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}$ und die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}$ des Referenzsystems ermitteln. Dazu werden die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}$ des Referenzsystems, die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}$ des Referenzsystems, die Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{red}}$ und die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}}$ des reduzierten Systems benötigt.

$$\left\| \boldsymbol{G}_{\mathrm{e}} \right\|_2^2 = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{red}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{red}} \boldsymbol{B}_{\mathrm{red}} \tag{5-48}$$

Mit dieser Fehlernormdarstellung wird der numerische Aufwand nur minimal reduziert, da für die Berechnung der Beobachtungsmatrix $\boldsymbol{Q}$ des Referenzsystems das komplette hochdimensionale System berücksichtigt wird. Da sich aber die Beobachtungsmatrix $\boldsymbol{B}$ des Referenzsystems nicht ändert, muss diese nur einmalig berechnet werden. Im Gegensatz dazu wird bei der Übertragungsfunktion nämlich nur ein Berechnungsablauf benötigt. Die Berechnung der Übertragungsfunktion benötigt mehrere Berechnungsabläufe, nämlich für die jeweiligen Frequenzpunkte. Die Autoren WOLF ET AL. [WOL11] geben eine obere Fehlerschranke für die Krylov-Unterraummethode derart an:

$$\frac{\|\boldsymbol{G}_\mathrm{e}\|_2}{\|\boldsymbol{G}\|_2} \leq \sqrt{\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{red}^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}_\mathrm{red}\boldsymbol{B}_\mathrm{red}}{\boldsymbol{B}^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}}} \cdot \|\boldsymbol{G}_\mathrm{C}\|_\infty \,. \tag{5-49}$$

Der Reduktionsfehler des Gesamtsystems $\boldsymbol{G}_\mathrm{e}$ kann als Produkt aus den Fehleranteilen des Eingangs $\boldsymbol{G}_\mathrm{B}$ und des Ausgangs $\boldsymbol{G}_\mathrm{C}$ interpretiert werden. Somit entspricht die Energienorm $\|\boldsymbol{G}_\mathrm{C}\|_\infty$ dem Fehleranteil des Ausgangs. Auch bei dieser Darstellung muss die Lyapunov-Gleichung 2-27 gelöst werden. Diese Darstellung des Fehlers ist für den praktischen Umgang mit hochdimensionalen FE-Modellen ungeeignet, die bei der Untersuchung von Werkzeugmaschinen auftreten, da der numerische Aufwand zu hoch ist. Daher wird zur numerisch effizienten Bestimmung des Abbruchkriteriums eine andere Methode benötigt.

Eine günstigere Möglichkeit der Fehlerabschätzung liefert dagegen GRIMME [GRI97]. Hier dienen die relativen Abweichungen zwischen zwei reduzierten Systemen zur Ermittlung des Approximationsfehlers. Dieser Ansatz wurde durch die normierte Differenz der Übertragungsfunktionen zwei aufeinander folgender, iterativ erstellter Systeme erweitert [BEC07]:

$$\varepsilon_\mathrm{G} = \frac{\|\boldsymbol{H}_L(\omega) - \boldsymbol{H}_{L-1}(\omega)\|_\mathrm{F}}{\|\boldsymbol{H}_L(\omega)\|_\mathrm{F}} \tag{5-50}$$

Das Ergebnis der Fehlerabschätzung mittels relativer Abweichung ε_G in Abhängigkeit von der Dimension L ist in Bild 5-23 dargestellt. In der Abbildung ist zu erkennen, dass diese relative Abweichung ε_G aus Gleichung 5-50 starken Schwankungen unterworfen ist. Auffällig ist, dass für die Dimension $L < 20$ eine geringe relative Abweichung ermittelt wird, obwohl aus Unterkapitel 5.3.2 bekannt ist, dass die resultierenden reduzierten Systeme dieser Dimension eine hohe Abweichung bezüglich des Referenzsystems aufweisen. Der Grund für die hier dargestellte geringe relative Abweichung ist, dass die Gleichung 5-50 die relative Abweichung eines reduzierten Systems zum nächsten reduzierten System anzeigt, aber nicht die Abweichung bezüglich des Referenzsystems. Daher kann mit dieser Approximationsangabe der relativen Abweichung ε_G nur mit Erfahrung des Modellordnungsreduktionsnutzers ein Bereich für eine geeignete Dimensionsgröße L identifiziert werden. Ähnliche Verläufe der relativen Abweichungen ergeben sich auch für die anderen drei Teilsysteme. Aufgrund dieser Ergebnisse ist dieser Approximationsansatz für eine automatisierte Reduktion ungeeignet.

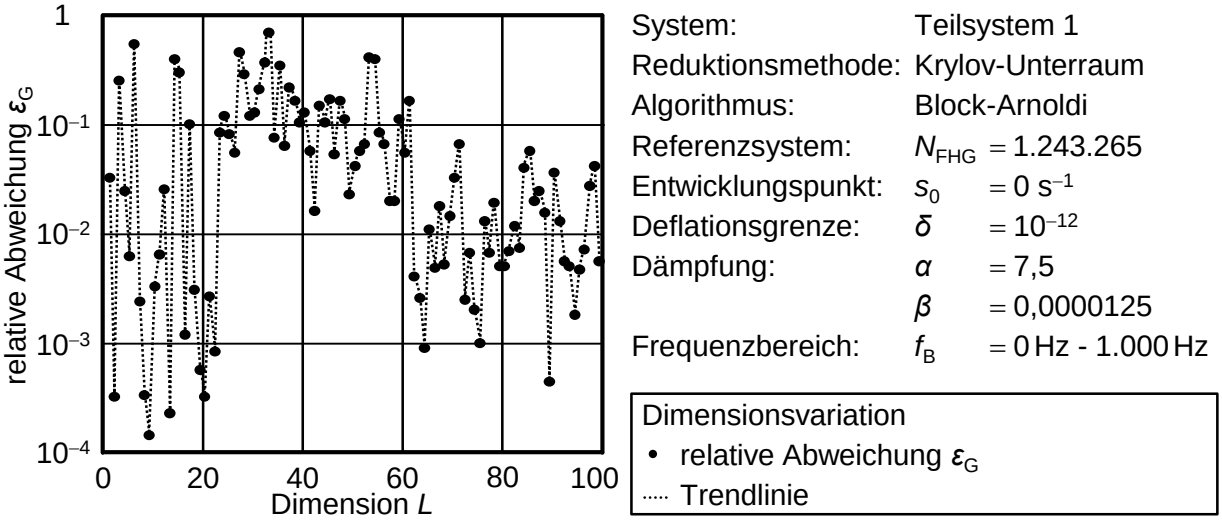


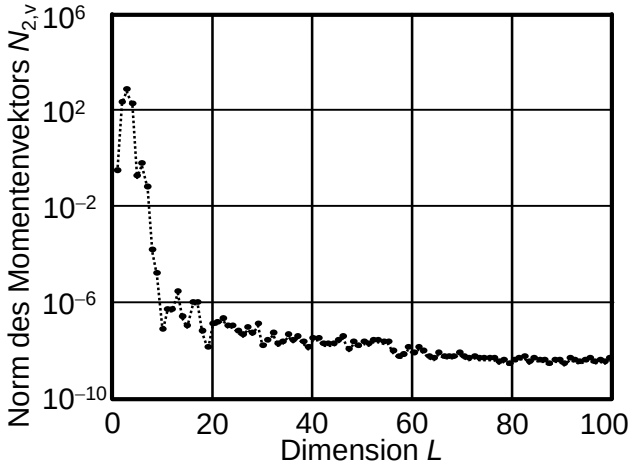
Bild 5-23: Relative Abweichung ε_G der Übertragungsfunktion iterativ aufeinander folgender, reduzierter Systemen

Eine andere Interpretation des Approximationsfehlers basiert auf zwei aufeinander folgenden reduzierten Systemen und wird durch die Formulierungsanpassung der Gleichung 5-48 gegeben [FEH11]. Bei einer iterativen Berechnung der Krylov-Unterräume erhält man die Energiedifferenz zwischen den jeweiligen Iterationsschritten j und $j-1$. Diese Differenz wird in der Folge als Indikator für den Approximationsfehler verwendet und auf diese Art berechnet:

$$\varepsilon_{e,j} = \left\| \widetilde{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{e}} \right\|_2^2 = \boldsymbol{B}_{\mathrm{red},j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{red},j} \boldsymbol{B}_{\mathrm{red},j} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{red},j-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{red},j-1} \boldsymbol{B}_{\mathrm{red},j-1} \,. \tag{5-51}$$

Diese Approximation des Fehlers kann als Schranke für das Abbruchkriterium verwendet werden, obwohl sie nicht den mathematisch korrekten Fehler als Abweichung des Referenzsystems vom reduzierten System darstellt [BEC07, FEH11]. In der Praxis lässt sich die Matrix $\boldsymbol{Q}$ für instabile Systeme nicht numerisch effizient ermitteln. Da aber durch die Krylov-Unterraummethode instabile Ersatzsysteme entstehen können, wie es in Unterkapitel 5.3 gezeigt wurde, ist diese Approximation des Fehlers nicht allgemein anwendbar.

Ein anderer numerisch effizienter Indikator für die Qualität des Reduktionsvorgangs ist die Angabe der Spektralnorm $N_{2,\mathrm{v}}$ des jeweiligen Momentenbasenvektors $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$. Diese Angabe ist numerisch günstig. Aus dem Verlauf der Norm $N_{2,\mathrm{v}}$ in Abhängigkeit von der Dimension L können Aussagen über die Qualität des Reduktionsvorgangs getroffen werden. Ein Beispiel für den Reduktionsvorgang von Teilsystem 1 ist in Bild 5-24 dargestellt.



System:	Teilsystem 1	
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum	
Algorithmus:	Block-Arnoldi	
Referenzsystem:	N_{FHG}	$= 1.243.265$
Entwicklungspunkt:	s_0	$= 0\ \mathrm{s}^{-1}$
Deflationsgrenze:	δ	$= 10^{-12}$
Dämpfung:	α	$= 7{,}5$
	β	$= 0{,}0000125$

Dimensionsvariation
- Norm des Momentenvektors $\boldsymbol{v}$
..... Trendlinie

Bild 5-24: Spektralnorm $N_{2,\mathrm{v}}$ der Momentenbasenvektoren $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ in Abhängigkeit von der Dimension L

Aus der Erfahrung ist bekannt, dass die Spektralnorm $N_{2,\mathrm{v}}$ der Basenvektoren mit steigender Anzahl der Dimension L abnimmt. Bei den ersten Iterationen sinkt der Wert der Spektralnorm $N_{2,\mathrm{v}}$ in der Regel um mehrere Größenordnungen. Ab einer bestimmten Dimension L ändern sich die Spektralnormwerte kaum mehr. Diese Dimension L kann als konservatives Abbruchkriterium interpretiert werden. Im vorliegenden Beispiel ist dies bei der Dimension $L = 62$ zu erkennen.

Im Gegensatz zu den Momentenabgleichsverfahren existieren beim balancierten Abschneiden allgemeingültige, exakte Fehlervorhersagen [WOL11, SOP11], die im folgenden Unterkapitel vorgestellt werden.

5.5.3 Singulärwertzerlegung

Der große Vorteil der singulärwertzerlegungsbasierten Verfahren ist neben der Garantie der Stabilitätserhaltung auch die genaue Kenntnis der Abweichung zwischen dem Referenzsystem und dem reduzierten System. Diese Abweichung ist bezüglich der $\mathcal{H}_\infty$-Norm aus Gleichung 2-33 beschränkt und wird durch die doppelte Summe der abgeschnittenen Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} aus Gleichung 2-30 charakterisiert [ANT05]:

$$\sigma_{HSV,L+1} \leq \left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_{red} \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2 \sum_{k=L+1}^{n} \sigma_{HSV,k} \,. \tag{5-52}$$

Beim balancierten Abschneiden fallen die Hankel-Singulärwerte als Nebenprodukt an und somit existiert zwangsläufige auch eine Fehlerschranke für die automatisierte Reduktion [ANT05]. Der Verlauf der ersten 125 Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} in Abhängigkeit von den Zuständen des Teilsystems 2 ist in Bild 5-25 dargestellt. Die ersten sechs Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} werden nicht abgebildet, da diese einen sehr hohen Wert besitzen. Diese Werte entstehen aufgrund der sechs Starrkörpermoden des nicht gefesselten Teilsystems 2. Analog zu Bild 5-25 existieren zwei unterschiedliche Möglichkeiten zur Definition einer geeigneten Fehlerschranke. Die Definition eines festen Zahlenwerts des Hankel-Singulärwerts σ_{HSV} bietet die Möglichkeit als Fehlerschranke.

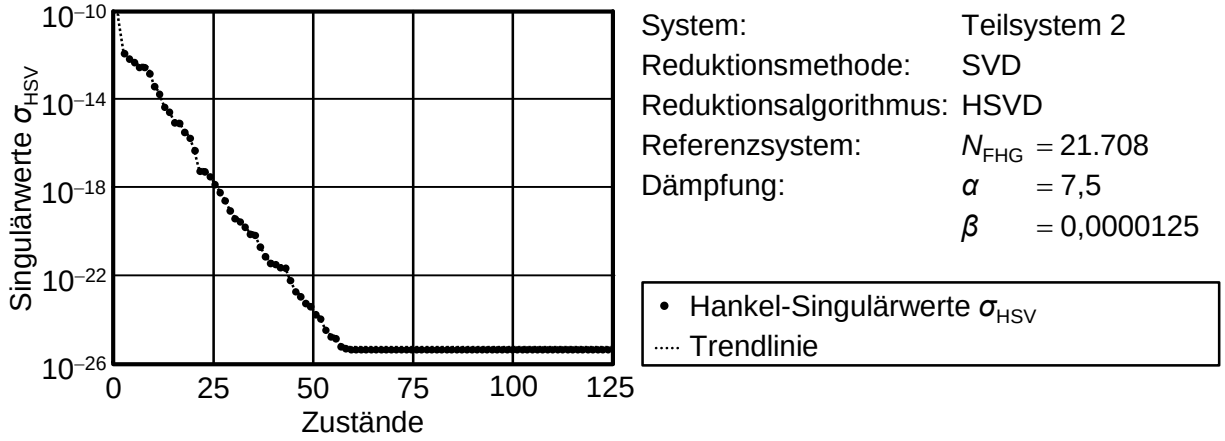


Bild 5-25: Verlauf der Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} in Abhängigkeit der Zustände

Die Berechnung der Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} ist aufgrund des hohen numerischen Aufwands nur am Teilsystem 2 und Teilsystem 4 möglich. Am Verlauf der Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} ist zu erkennen, dass die Werte schnell abfallen. Durch die Definition einer Schranke lässt sich die Anzahl der zu berücksichtigenden Zustände im Reduktionsvorgang automatisch ermitteln. Sobald der Wert dieser Schranke erreicht ist, kann der Reduktionsvorgang beendet werden.

5.6 Eigenschaften des reduzierten Systems

Die reduzierten Systemmatrizen besitzen im Gegensatz zu den originalen Systemmatrizen, die in Abschnitt 5.3.5 dargestellt worden sind, eine veränderte Struktur. Denn die reduzierten Matrizen eines SISO-Systems weisen keine ausgeprägte Bandstruktur mehr auf, sondern sind voll besetzt, wie es in Bild 5-26 dargestellt ist. Das bedeutet, dass das reduzierte SISO-System vollständig gekoppelt ist und grundsätzlich gegenüber einem entkoppelten System einen höheren numerischen Aufwand bei der Berechnung benötigt. In der Abbildung werden die Zahlenwerte mit einem Farbwert codiert. Wie zu sehen ist, zeigt die rechte untere Bildecke der jeweiligen Matrixabbildungen noch den Ansatz einer Bandstruktur, erkennbar aufgrund der

starken unterschiedlichen Zahlenwerte. Die Zahlenwerte im restlichen Matrizenbereich sind von der gleichen Größenordnung.

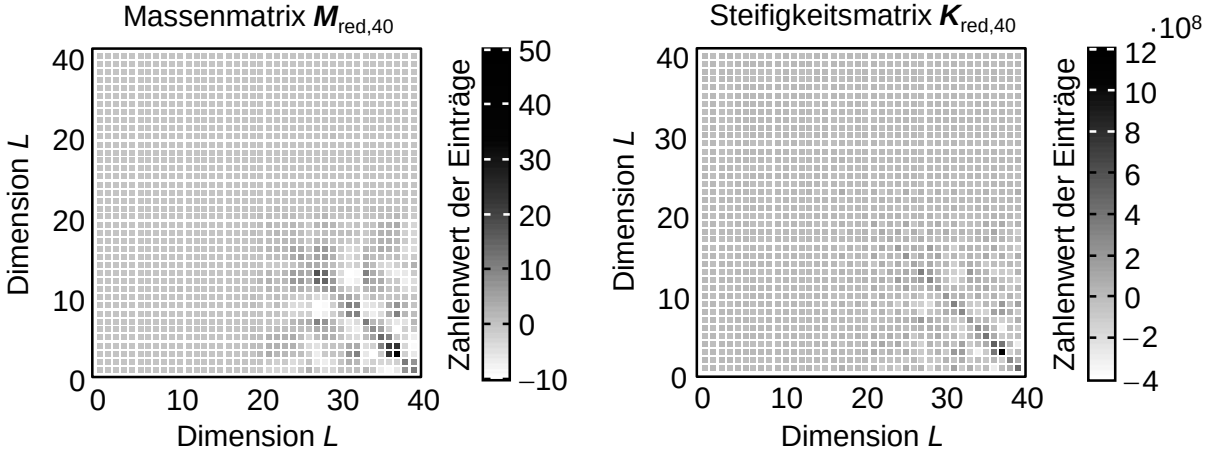


Bild 5-26: Besetzungsstruktur der Massen- und Steifigkeitsmatrix des reduzierten SISO-Systems am Beispiel von Teilsystem 1 für die Dimension $L = 40$

Durch die Modellordnungsreduktion mittels der Krylov-Unterraummethode sind zwar die Systemmatrizen voll besetzt, die Massenmatrix ist aber nicht mehr singulär. Dies ist an der Konditionszahl K_Z in Tabelle 5-8 zu erkennen. Im Vergleich zu Tabelle 5-5 fällt auf, dass neben der Konditionszahl K_Z auch die Spektralnorm N_2 sowie die minimalen und maximalen Zahlenwerte geringer ausfallen.

Tabelle 5-8: Statistik der reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrix des Teilsystems 1 am Beispiel der Systemdimension mit $L = 40$

Bezeichnung	Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{\mathrm{FE},1}$	Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{FE},1}$
Dimension L	40	40
Matrizeneinträge N_{ME}	1.600	1.600
Konditionszahl K_Z	$1{,}213 \cdot 10^{16}$	$3{,}137 \cdot 10^{15}$
Spektralnorm $N_{2,i}$	0,292	$1{,}953 \cdot 10^{10}$
Minimaler Wert $N_{\min}$	$-0{,}056$	$-3{,}604 \cdot 10^{9}$
Maximaler Wert $N_{\max}$	0,1363	$5{,}064 \cdot 10^{9}$
Bandbreite B_W	79	79

Bei einem MIMO-System setzen sich die Systemmatrizen aus den einzelnen SISO-Systemen zusammen. Der Grund ist die Superposition der Projektionsmatrizen, wie es in Unterkapitel 5.3.1 dargestellt ist. Dies lässt sich direkt an der Struktur der Systemmatrizen erkennen.

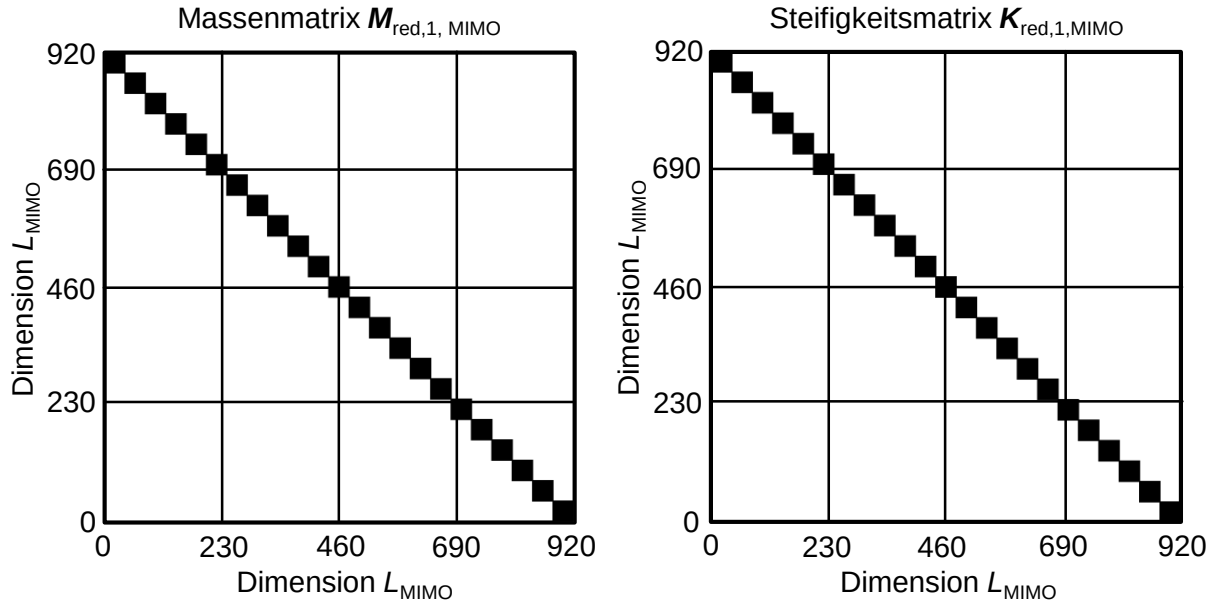


Bild 5-27: Besetzungsstruktur der Massen- und Steifigkeitsmatrix des reduzierten MIMO-Systems am Beispiel von Teilsystem 1 für die Dimension $L = 40$ der jeweiligen 23 Ein- und Ausgänge

Bild 5-27 zeigt die von Null verschiedenen Einträge der Massen- und Steifigkeitsmatrix des reduzierten Teilsystems 1 mit 23 Ein- und Ausgängen. Aufgrund der erhöhten Anzahl an Matrizeneinträgen werden die Zahlenwerte hier lediglich in schwarz dargestellt. Für die jeweiligen Ein- und Ausgangsbeschreibungen wurden zur Reduktion $L = 40$ Momente zum Aufspannen der Teilprojektionsmatrix $\boldsymbol{V}'$ verwendet. Für die jeweilige Beschreibung der Ein- und Ausgangsbeziehungen sind in der Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{\mathrm{red,1,MIMO}}$ und in der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{red,1,MIMO}}$ ein Schur-Komplement als Rechteck dargestellt. Die Struktur der jeweiligen Schur-Komplemente entsprechen der Besetzungsstruktur eines SISO-Systems, siehe hierzu auch Bild 5-26.

In Bild 5-27 wird deutlich, dass die jeweiligen Ein- und Ausgänge im reduzierten MIMO-System entkoppelt sind. In Tabelle 5-9 ist die Statistik der Massen- und Steifigkeitsmatrix verzeichnet. An der Dimension von $L_{\mathrm{MIMO}} = 920$ ist zu erkennen, dass die Dimension des MIMO-Systems mit der Anzahl der Ein- und Ausgänge ansteigt.

Tabelle 5-9: Statistik der reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrix des Teilsystems 1 am Beispiel der Systemdimension mit 23 Ein- und Ausgängen

Bezeichnung	Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{\mathrm{FE,1}}$	Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{FE,1}}$
Dimension L_{MIMO}	920	920
Matrizeneinträge N_{ME}	36.800	36.800
Konditionszahl K_{Z}	$9{,}923 \cdot 10^{17}$	$9{,}435 \cdot 10^{19}$
Spektralnorm $N_{2,i}$	$3{,}331 \cdot 10^{17}$	$8{,}813 \cdot 10^{11}$
Minimaler Wert N_{min}	$-6{,}512 \cdot 10^{16}$	$-2{,}042 \cdot 10^{11}$
Maximaler Wert N_{max}	$1{,}263 \cdot 10^{17}$	$6{,}127 \cdot 10^{11}$
Bandbreite B_{W}	79	79

5.7 Bewertung

In diesem Unterkapitel werden probate Kriterien der Modellordnungsreduktionsmethoden bezüglich ihrer Vor- und Nachteile bewertet. In Tabelle 5-1 wurden ausgewählte Modellordnungsreduktionsverfahren aufgelistet, die für mechanische Systeme anwendbar sind. In Tabelle 5-10 wird dann die Bewertungsmatrix für diese ausgewählten Modellordnungsreduktionsverfahren inklusive ESVDMOR-Verfahren aus Unterkapitel 5.4.2 gezeigt.

Tabelle 5-10: Bewertungsmatrix ausgewählter Modellordnungsreduktionsverfahren unter Berücksichtigung folgender Referenzen [ANT05, BEN05, BEC07, LEH07, EID09, FAS11]

Bewertungskriterium \ Reduktionsverfahren	Statische Reduktion	Modale Reduktion	Gemischte Reduktion	Krylov-Unterraum-methode	SVD-Verfahren	ESVDMOR-Verfahren
Genauigkeit im Frequenzbereich	○	◑	◕	●	●	●
Genauigkeit im Zeitbereich	○	◔	◕	●	●	●
Geringer numerischer Aufwand zur Erzeugung der Ersatzsysteme	●	◕	◕	◕	○	◔
Numerisch berechenbare Fehlerabschätzung	○	◔	◔	◑	●	◕
Reduktionsunabhängigkeit von der Ein- und Ausgangsdimension	◔	◑	○	○	●	◕
Anwendbarkeit auf sehr große Systeme	●	●	●	●	◔	◔
Onlinefähige Berechenbarkeit der reduzierten Systeme	◔	◑	◔	◕	●	●
Physikalische Interpretierbarkeit	●	●	●	◔	◔	◔
Erhaltung physikalischer Stabilität des Systems	●	●	●	◑	●	●
Qualitätsunabhängigkeit von der Benutzererfahrung	◔	◔	◔	◕	●	●
Endbewertung	2,5	3,4	3,4	3,7	4,0	3,8

● = 5 sehr gut erfüllt ◕ = 4 gut erfüllt ◑ = 3 teilweise erfüllt

◔ = 2 unter bestimmten Bedingungen erfüllt ○ = 1 nicht erfüllt

Die Bewertungsmatrix ist mittels der Referenzen [ANT05, BEC07, LEH07, EID09, FAS11, GAS12] und der Ergebnisse aus der vorliegenden Arbeit erstellt. Die Endbewertung entspricht dem Mittelwert der Kriterien, das heißt je höher der Wert ist, desto besser eignet sich das Modellordnungsreduktionsverfahren für die Anwendung in der Werkzeugmaschinenentwicklung. Die Kriterien können Werte von 1 bis 5 annehmen. Die Zahl 1 steht für ein nicht erfülltes Kriterium und die Zahl 5 dafür, dass das Kriterium sehr gut erfüllt wird.

Die ersten beiden Bewertungskriterien beschreiben die Genauigkeit im Frequenz- und im Zeitbereich. Aus Unterkapitel 5.3 ist bekannt, dass die Genauigkeit der Krylov-Unterraummethode von den Reduktionsparametern abhängt. Bei gut gewählten Reduktionsparametern besitzt dieses Verfahren eine sehr hohe Approximationsgenauigkeit. Die Ersatzsysteme, die mit singulärwertzerlegungsbasierten Modellordnungsreduktionsverfahren erzeugt werden, besitzen ebenfalls eine hervorragende Approximationsqualität trotz geringer Anzahl an berücksichtigter Zustände. Die klassischen Reduktionsverfahren weisen dagegen bei vergleichbarer Anzahl an Zuständen häufig eine geringe Approximationsqualität auf, dass auch von den Autoren SOPPA [SOP11] und KRENEK [KRE12] bestätigt werden. Die Genauigkeit im Zeitbereich hängt zudem sehr von der Modellierung der Dämpfung ab.

Der numerische Aufwand des Reduktionsvorgangs zur Erstellung niedrigdimensionaler Ersatzmodelle ist das dritte Bewertungskriterium. Wie in Unterkapitel 5.4 vorgestellt wurde, ist der numerische Aufwand der singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren im Vergleich zu den restlichen Verfahren sehr hoch. Mit einer kombinierten Reduktionsstrategie oder mit dem Alternating Direction Implicit(ADI)-Algorithmus [BEN10b] kann dieser Nachteil gemindert werden. Die iterative Berechnung der Basen durch die Krylov-Unterraummethode ist für hochdimensionale Systeme gut geeignet. Die Eigenwerte sehr großer Systeme werden ebenfalls mit iterativen Methoden ermittelt. Daher lässt sich auch die Modale Reduktion gut für hochdimensionale Systeme anwenden.

Das vierte Bewertungskriterium ist die Existenz einer numerisch berechenbaren Fehlerabschätzung für die Anwendung einer automatisierten Reduktion. Erst durch eine Vorhersage der Approximationsgenauigkeit kann eine Automatisierung des Reduktionsvorgangs realisiert werden. Aus Unterkapitel 5.5 folgt, dass für die klassischen Modellordnungsreduktionsverfahren und für die Krylov-Unterraummethode lediglich heuristische Abschätzungen möglich sind und keine mathematisch korrekten, berechenbaren Approximationsfehler existieren. Dagegen sind für die singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren exakte Abschätzungen des Reduktionsfehlers bekannt.

Die Abhängigkeit des reduzierten Systems von der Ein- und Ausgangsdimension des Referenzsystems ist das fünfte Bewertungskriterium. Im Gegensatz zur gemischten Reduktion aus Unterkapitel 2.5.3 sind bei den modernen Reduktionsmethoden keine Korrekturmoden nötig. Bisher wird bei der gemischten Reduktion für nachgiebige Strukturen eine hohe Anzahl zusätzlicher Eigenmoden benötigt, die auch als „free normal modes“ bekannt sind. Dadurch erhält das reduzierte System hohe Frequenzanteile. Aufgrund ungünstiger Steifigkeitsverhältnisse oder zu großer Kräfte können an den Krafteinleitungsstellen hohe lokale Deformationen entstehen, die zusätzliche Statikmoden erfordern. Wie schon WEIßENBERGER [WEI01] festhielt, wird eine erhöhte Anzahl an Statikmoden benötigt, wenn wechselnde kinematische Randbedingungen oder ortsveränderliche Krafteinleitungen vorliegen. Zusätzlich sind geometrische Steifigkeiten erforderlich, wenn eine hohe Steifigkeit in Belastungsrichtung und orthogonal

dazu eine sehr geringe Steifigkeit existieren. Diese zusätzlichen Freiheitsgrade der geometrischen Steifigkeit werden auch als „geometric modes“ bezeichnet. Sie werden ebenfalls unabkömmlich, wenn lastbedingte Versteifungseffekte zu erwarten sind. Aufgrund dieser zusätzlichen Moden besitzen die reduzierten Systeme aus der gemischten Reduktion eine verhältnismäßige hohe Dimension, insbesondere dann, wenn Verfahrbewegungen betrachtet werden müssen. In Unterkapitel 5.2 wurde dargestellt, dass die Dimension L des reduzierten Systems, die mit der Krylov-Unterraummethode erstellt wurde, auch eine hohe Abhängigkeit von der Ein- und Ausgangsdimension besitzt. Dieser Nachteil lässt sich durch die zusätzliche Anwendung des singulärwertzerlegungsbasierten ESVDMOR-Verfahrens aus Unterkapitel 5.4.2 mindern.

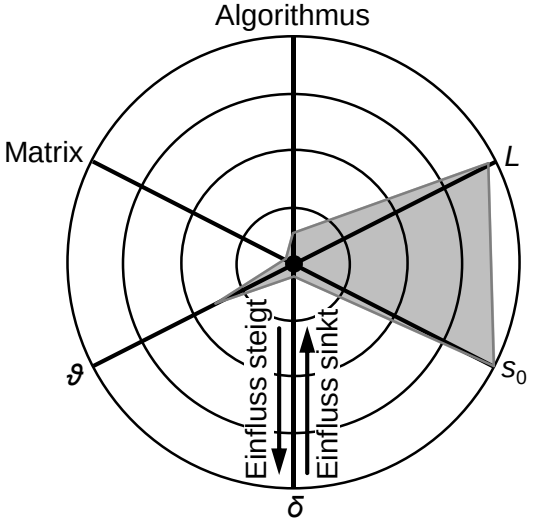
Das sechste Bewertungskriterium ist die Anwendbarkeit der Modellordnungsreduktionsverfahren auf hochdimensionale Systeme. Aufgrund des numerischen Aufwands der singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren, können diese auf sehr große Systeme nicht mehr praktikabel angewendet werden. Durch die Anwendung hybrider Reduktionsstrategien, wie sie in Unterkapitel 5.4.2 gezeigt werden, kann dieser Nachteil verringert werden. Außerdem bieten Permutationsalgorithmen, wie sie in Unterkapitel 5.3.5 benutzt werden, zusätzliche Möglichkeiten, die Anwendbarkeit der Reduktionsverfahren auf hochdimensionale Systeme zu erhöhen.

Die onlinefähige Berechenbarkeit bildet das siebte Bewertungskriterium. Ein Berechnungssystem ist onlinefähig, falls die Berechnung deterministisch durchgeführt werden kann. Dies ist in der Regel möglich, wenn es sich um ein niedrigdimensionales System handelt. Ansonsten wirkt es sich positiv auf die Onlinefähigkeit eines Berechnungssystems aus, wenn die Matrizen dünn besetzt sind. Die Bandbreite B_W aus Gleichung 5-25 und die Anzahl der Matrizeneinträge N_{ME} vermitteln einen Eindruck von der Besetzungsstruktur der Matrizen. Um eine Berechnung deterministisch zuverlässig durchzuführen, wie es für die HiLS verlangt wird, werden explizite Lösungsalgorithmen verwendet. Wie in Unterkapitel 2.4.3 festgestellt, müssen die Eigenwerte λ der Zustandsraummatrix $\boldsymbol{A}_{ZR}$ innerhalb des Stabilitätsgebiets $R(\mu)$ aus Gleichung 2-34 des expliziten Lösungsalgorithmus liegen. Mit den Krylov-Unterraummethoden und den singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren können gezielte Frequenzeigenschaften entsprechend berücksichtigt beziehungsweise vernachlässigt werden. Daher sind diese Verfahren sehr gut für deterministische Berechnungen mit expliziten Lösungsalgorithmen geeignet. Die gemischte Reduktion besitzt durch die Korrekturmodenhochfrequente Zustände, die zur Instabilität des expliziten Lösungsprozesses führen. Daher sind diese Modelle nicht nutzbar.

Das achte Bewertungskriterium besteht in der physikalischen Interpretierbarkeit der Ersatzsysteme. Die Ersatzsysteme, die mit den klassischen Modellordnungsreduktionsverfahren erstellt wurden, weisen noch ihren Bezug zum physikalischen System auf. Die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenformen, mit denen das modale Ersatzsystem zusammengestellt wird, entsprechen den physikalischen Eigenwerten λ und den Eigenmoden des Systems. Die statische Reduktion basiert auf der Beibehaltung von einzelnen physikalischen Zuständen. Daher besitzen diese Verfahren im Gegensatz zu den modernen Modellordnungsreduktionsverfahren ihre direkte physikalische Interpretierbarkeit. Da die modernen Modellordnungsreduktionsverfahren in einem frequenzabhängigen Raum arbeiten, ist eine direkte physikalische Interpretation der Zustände nicht mehr möglich.

Die Erhaltung der physikalischen Stabilität des Ersatzsystems stellt das neunte Bewertungskriterium dar. Die physikalische Stabilität, die in der Mechanik auch als dynamische Stabilität bekannt ist, wird in Unterkapitel 2.4.3 definiert. Alle klassischen Modellordnungsreduktionsverfahren erzeugen physikalisch stabile reduzierte Systeme vorausgesetzt, dass das Referenzsystem physikalisch stabil ist. Diese Eigenschaftserhaltung weisen auch die singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren auf. Lediglich die Krylov-Unterraummethode kann aus stabilen Originalsystemen instabile reduzierte Systeme erzeugen, wie in Unterkapitel 5.3 gezeigt wurde. Diese instabilen Zustände lassen sich aber mittels singulärwertzerlegungsbasierten Verfahren oder mittels Eigenwertanalyse aus dem System wieder entfernen, wie noch in Unterkapitel 6.2.2 zu zeigen ist.

Das zehnte Bewertungskriterium ist die Abhängigkeit von der Approximationsqualität vom Erfahrungshorizont des Benutzers oder, anders ausgedrückt, die Abhängigkeit von frei wählbaren Parametern. Dieses Kriterium beinhaltet die Sensibilität der Reduktionsergebnisse von den gewählten Parametern, wie es schematisch in Bild 5-28 visualisiert wird. Für die klassischen Modellordnungsreduktionsverfahren gibt es zwar Empfehlungen, aber keine festen Auswahlkriterien geeigneter Zustände, Schnittstellenknoten oder Moden. Bei der Modalen bzw. gemischten Reduktion besteht die Empfehlung, mindestens doppelt so viele Moden in einem Frequenzbereich zu berücksichtigen wie Frequenzspitzen im Untersuchungsfrequenzbereich enthalten sind [GAS12]. Diese Empfehlung ist aber keine Garantie dafür, dass die statische Genauigkeit des Ersatzmodells ausreicht. Die Anzahl und die Position der Korrekturmoden werden in der Regel durch die Erfahrung des Benutzers bestimmt, wie auch von den Autoren HOFFMANN [HOF08] und SIEDL [SIE08] bestätigt. Die singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren eignen sich dagegen sehr gut für eine automatische Reduktion. Denn diese Verfahren besitzen eine Fehlerschranke, wie in Unterkapitel 0 dargestellt, die im Vorfeld definiert werden kann. Somit wird die Anzahl der Singulärwerte σ_{SVD} beziehungsweise der Hankel-Singulärwerte σ_{HSV} automatisch bestimmt.



Algorithmus: Reduktionsalgorithmus
L: Anzahl der Entwicklungsglieder
s_0: Entwicklungspunkt
δ: Deflationsgrenze
ϑ: Dämpfungsart und -modellierung
Matrix: Zustand der Originalmatrizen

Bild 5-28: Sterndiagramm zur Darstellung des Einflusses der Reduktionsparameter auf die Approximationsqualität des reduzierten Systems

Die Reduktionsergebnisse der Krylov-Unterraummethode sind also abhängig von dem gewählten Reduktionsparameter. In Bild 5-28 wird die Abhängigkeit des Reduktionsergebnisses von den Einflussgrößen dargestellt. Die Abbildung wurde auf Grundlage der Mittelwerte der

absoluten Abweichungen $\overline{\varepsilon}_{abs}$ von Tabelle 5-2 bis Tabelle 5-4 und Tabelle 5-7 erstellt. Daraus ist zu erkennen, dass die Anzahl der Entwicklungsglieder L und der Entwicklungspunkt s_0 den höchsten Einfluss auf die Approximationsqualität des Reduktionsergebnisses besitzen. Zusätzlich beeinflussen die Dämpfungsart und -modellierung das Ergebnis insbesondere im Zeitbereich.

Durch die Analyse in Unterkapitel 5.3 wird gezeigt, dass mit steigender Dimension L die Approximationsgüte ausgehend vom Entwicklungspunkt s_0 ansteigt. Zur Identifizierung eines geeigneten Reduktionsgrads L können entweder die Kennzahlen des Mittelwerts der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ aus Gleichung 5-15 und die zugehörige Standardabweichung σ_ε für einen festgelegten Frequenzbereich f_B verwendet werden oder die frequenzabhängigen absoluten Abweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{abs}$ aus Gleichung 5-13 und die relativen Abweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{rel}$ aus Gleichung 5-14. Zur Bestimmung von Ersatzmodellen, die für ausgewählte Frequenzbereiche eine hohe Approximationsgüte aufweisen sollen, sind die frequenzabhängigen absoluten Abweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{abs}$ oder die relativen Abweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{rel}$ günstig. Im anderen Fall eignen sich die Kennzahlen, mit denen automatisiert geeignete Reduktionsparameter identifiziert werden können. Für dieses Vorgehen wird allerdings ein Amplitudenfrequenzgang $\boldsymbol{H}_{P,ref}$ des Referenzmodells für die Ermittlung der Kennzahlen benötigt, der häufig mit hohem numerischem Aufwand ermittelt werden muss. Wenn kein Frequenzgang des Referenzsystems vorliegt, bestehen zwei weitere Möglichkeiten, eine geeignete Entwicklungspunktanzahl L zu ermitteln. Ein erfahrender Benutzer kann die relative Abweichung $\boldsymbol{\varepsilon}_G$ von iterativ erstellten Systemen aus Gleichung 5-50 verwenden. Diese Abweichung birgt das Risiko falsch interpretiert zu werden. Die andere Möglichkeit zur Identifizierung einer geeigneten Entwicklungspunktanzahl L ist die Analyse des Spektralnormverlaufs $N_{2,v}$ des Momentenbasenvektors $\boldsymbol{v}$, wie in Bild 5-24 gezeigt wurde. Durch diese Identifizierungsstrategien einer geeigneten Entwicklungspunktanzahl L lässt sich die Benutzerabhängigkeit bezüglich L mindern.

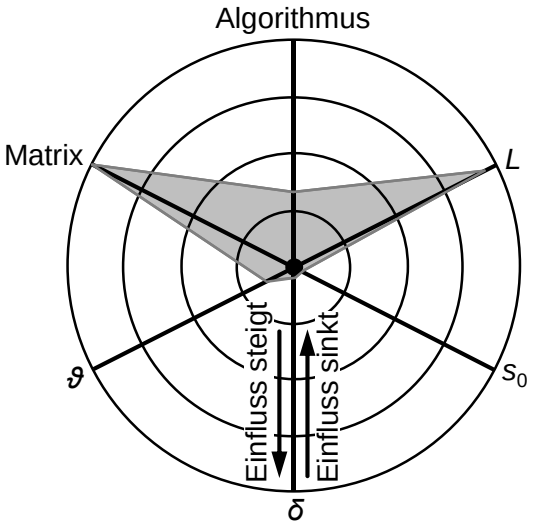
Die Wahl eines geeigneten Entwicklungspunkts s_0 wird durch den RK-ICOP-Algorithmus bzw. durch die Gleichung 5-24 unterstützt. Somit kann dieser Parameter unabhängig vom Erfahrungsschatz des Reduktionsnutzers bestimmt werden.

Anhand dieser zehn Bewertungskriterien, die in der Bewertungsmatrix in Tabelle 5-10 zusammengefasst werden, wird deutlich, dass die modernen Modellordnungsreduktionsverfahren gut für die Anwendung in der Werkzeugmaschinenentwicklung geeignet sind. Die singulärwertzerlegungsbasierten Modellordnungsreduktionsverfahren schneiden hierbei etwas besser ab als die Krylov-Unterraummethode. Da aber im Bereich der numerischen Werkzeugmaschinenuntersuchung in der Regel hochdimensionale Systeme entstehen, können diese Systeme schnell an die Grenze der numerischen Durchführbarkeit des Reduktionsvorgangs gelangen. Deshalb ist die Krylov-Unterraummethode insbesondere für hochdimensionale Systeme zu bevorzugen. Eine Kombination der Krylov-Unterraummethode mit den singulärwertzerlegungsbasierten Modellordnungsreduktionsverfahren stellt ein geeignetes Verfahren dar, effizient niedrigdimensionale Ersatzsysteme mit hoher Qualität zu erzeugen.

5.8 Fazit

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass sich die modernen Modellordnungsreduktionsverfahren für die Reduktion von hochdimensionalen Werkzeugmaschinenmodellen gut eignen. Die Approximationsqualität der reduzierten Systeme hängen von den Reduktionsparametern der Krylov-Unterraummethode ab. Die Einflussstärke der einzelnen Parameter auf die Approximationsqualität wurde in Bild 5-28 gezeigt. Zur Bestimmung der geeigneten Reduktionsparameter eignen sich unterschiedliche Techniken. So wurde aus dem hochdimensionalen FE-System mit $N_{FHG} = 1.243.256$ Freiheitgraden ein niedrigdimensionales SISO-System mit $L = 40$ Freiheitsgraden erstellt. Zwischen der Dimension des Referenzsystems und dem reduzierten SISO-System liegt ein Faktor von über 31.000. Der Speicherbedarf des reduzierten SISO-Systems wurde um den Faktor von über 1.900 verkleinert. Mit den reduzierten Systemen ist die Berechnungszeit der Sprungantwort, wie sie in Bild 4-38 und in Bild 5-6 gezeigt wurde, um den Faktor 780 geringer. Durch die Verwendung von schnelleren und geeigneteren Simulationsprogrammen beziehungsweise Lösungsalgorithmen kann dieser Faktor nochmals massiv erhöht werden. Am Beispiel der Sprungantwortberechnung des MIMO-Systems aus Unterkapitel 5.4.2 wurde die Berechnungszeit t_R um den Faktor von über 610 verringert. Die Berechnungszeit t_R des Amplitudenfrequenzgangs $\boldsymbol{H}_P$ mit 500 Stützpunkten im Frequenzbereich von $f_{Bu} = 0$ Hz bis $f_{Bo} = 1.000$ Hz konnte mit dem reduzierten SISO-System der Dimension $L = 40$ Freiheitsgraden um den Faktor 450 herabgesetzt werden. Beim reduzierten MIMO-System mit der Dimension $L_{MIMO} = 1.350$ Freiheitsgrade beträgt die Verkürzung der Berechnungszeit gegenüber dem originalen FE-Modell um den Faktor 290. Die Berechnungszeit t_R bei $L_{MIMO} = 300$ Freiheitsgrade ist 340-fach geringer als beim Referenzsystem.

Durch eine geeignete Wahl der Entwicklungsgliederanzahl L oder durch eine geschickte Neusortierung der Matrizen lässt sich der numerische Zeitaufwand zur Erstellung der reduzierten Systeme verringern. Die Einflussfaktoren, die den Zeitbedarf des Modellordnungsreduktionsvorgangs beeinflussen, sind in Bild 5-29 dargestellt.



Algorithmus: Reduktionsalgorithmus
L: Anzahl der Entwicklungsglieder
s_0: Entwicklungspunkt
δ: Deflationsgrenze
ϑ: Dämpfungsart und -modellierung
Matrix: Zustand der Originalmatrizen

Bild 5-29: Sterndiagramm zur Darstellung der Einflussgrößen auf die Berechnungszeit des Reduktionsvorgangs zur Erzeugung reduzierter Systeme

Die Wahl des Parameters L wird durch die gewünschte Approximationsqualität festgelegt. Der Einfluss des Reduktionsalgorithmus auf die Dauer des Reduktionsvorgangs ist im Vergleich zur Anwendung geeigneter Permutationsalgorithmen eher gering. In Unterkapitel 5.3.5 wurde

der Symmetric-Sparse-Reverse-Cuthill-McKee-Ordering-Algorithmus effektiv angewendet. Nach der Anwendung dieses Permutationsalgorithmus beschleunigte sich die Berechnungszeit t_V zur Erzeugung der reduzierten Systeme um mindestens den Faktor 24.

Zusammenfassend wurde mit diesem Kapitel gezeigt, dass die Krylov-Unterraummethode in Kombination mit singulärwertzerlegungsbasierten Reduktionsverfahren eine effiziente Methode zur Erzeugung niedrigdimensionaler Ersatzsysteme mit hochdimensionalen Ein- und Ausgangsräumen darstellt. Mit dieser Reduktionsstrategie werden numerisch günstige MIMO-Ersatzsysteme für dynamische Untersuchungen zur Verfügung gestellt. Mit diesen Ersatzsystemen können beispielhaft positionsabhängige Eigenschaften der Werkzeugmaschine untersucht werden, wie es im nächsten Kapitel dargestellt wird.

6 Mechatronische Simulation der Werkzeugmaschine

6.1 Einführung

Der Begriff Mechatronik bezeichnet ein Fachgebiet, das sich mit technischen Systemen beschäftigt, die aus eng miteinander verkoppelten Teilsystemen der Fachdisziplinen Mechanik, Elektrotechnik und Informationstechnik gebildet werden [NEU07]. Die Werkzeugmaschine wird als mechatronisches System betrachtet, da die Eigenschaften der kompletten Werkzeugmaschine stark vom Zusammenspiel der einzelnen Fachdisziplinen abhängen. Im Rahmen eines interdisziplinären Entwicklungsprozesses sind zum einen die Funktionalität der Teilsysteme selbst und zum anderen ihr Zusammenspiel im Gesamtsystem entscheidend. Aufgrund des engen Zusammenwirkens der einzelnen Teilsysteme und ihrer gegenseitigen Beeinflussung ist es nicht oder nur eingeschränkt möglich, die Teilsysteme getrennt voneinander zu entwickeln. Stattdessen muss bei einer ganzheitlichen numerischen Untersuchung der Werkzeugmaschine als mechatronisches Gesamtsystem eine integrative Betrachtung der Modellbestandteile für die Maschinenstruktur, die Steuerungs- und Regelungsstruktur sowie den Fertigungsprozess erfolgen. Diese mechatronische Simulation befähigt dazu, qualitative und quantitative Aussagen über das statische und dynamische Werkzeugmaschinenverhalten zu treffen, ohne dass ein physikalischer Prototyp existiert [ALT05, ZIR06, SCR11, WAB14].

Für die Beschreibung des Werkzeugmaschinenverhaltens muss das Zusammenspiel aus Regler, Motor, Maschinenmechanik und Fertigungsprozess als äußere Anregungskraft berücksichtigt werden. Dies wird schematisch in Bild 6-1 am Beispiel einer beliebigen Achse mit einem Kugelgewindetrieb gezeigt. Die vorliegende Arbeit fokussiert die effiziente Erzeugung der mechanischen Größen, um diese für die mechatronische Simulation zu verwenden.

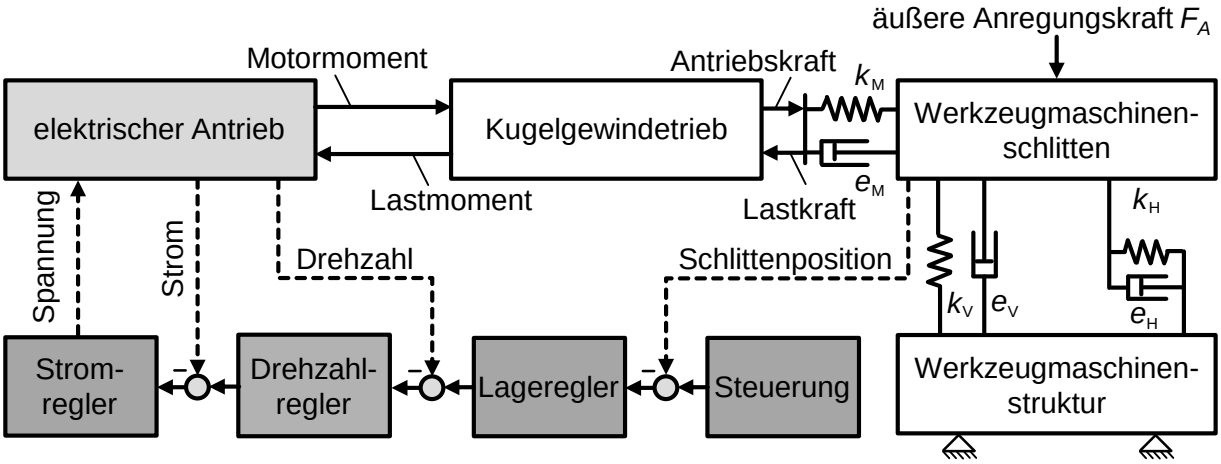


Bild 6-1: Kopplung eines mechanischen und elektrischen Systems mit einer Kaskaden-Regelung zu einem mechatronischen System

Für die effiziente Erstellung des mechanischen Ersatzsystems, basierend auf hochdimensionalen FE-Modellen, existieren unterschiedliche Herangehensweisen. Bei der Beschreibung des dynamischen Verhaltens am TCP kann grundsätzlich die komplette Werkzeugmaschine in einem Schritt reduziert werden, unter der Voraussetzung, dass eine Kopplung der Teilsysteme nicht benötigt wird. Die FE-Modelle einer Werkzeugmaschine bestehen häufig aus mehreren Millionen Freiheitsgraden [RUD12, BON11, FAS11, MAG10]. Die Mikrofräsmaschine aus Kapitel 4 besteht ebenfalls aus über einer Million Freiheitsgraden.

Prinzipiell können solche Systeme zur Beschreibung des TCPs mithilfe der klassischen Modellordnungsreduktionsverfahren oder modernen Modellordnungsreduktionsverfahren, die in Kapitel 5 beschrieben sind, in einem Schritt reduziert werden. Die genannten Verfahren benötigen aber für große Modelle eine höhere Rechenleistung zur Erzeugung der niedrigdimensionalen Modelle. Das resultierende niedrigdimensionale Modell besitzt seine Gültigkeit nur für die festgelegte Achsenkonstellation, die vor der Reduktion eingestellt war. Daher wird in dieser Arbeit eine komponentenorientierte Reduktion der Teilsysteme favorisiert und fokussiert, um die resultierenden Ersatzsysteme unter Berücksichtigung der Achsenposition dann zu einem Gesamtsystem zu koppeln. Die komponentenorientierte Zerteilung des Gesamtsystems in Teilsysteme wird durch den modularen Aufbau der Werkzeugmaschine unterstützt, wie in Unterkapitel 0 beschrieben.

Die komponentenorientierte FE-Modellierung der Teilsysteme ermöglicht den einfachen Austausch der Teilsysteme, sodass sich die unterschiedlichen Werkzeugmaschinenkonfigurationen untersuchen lassen. Ein anderer Vorteil besteht darin, dass die jeweiligen Teilsysteme hochauflösend modelliert werden können, ohne dass die Systemdimension beachten werden muss. Denn die Systemdimension besitzt im späteren Verlauf nur eine äußerst geringfügige Relevanz, da diese mit den Modellordnungsreduktionsverfahren reduziert wird. Außerdem können an den Koppelstellen zusätzliche Funktionen oder physikalische Effekte betrachtet werden. Beispiele für solche Effekte sind die nichtlinearen Phänomene wie Hysterese, Spiel oder eine Umkehrspanne in den Führungssystemen oder in den Kugelgewindeantriebssystemen [MAG10]. Weitere Vorteile ergeben sich aus der unabhängigen und parallelen Modellierung. Die Kopplung der einzelnen vorerst frei beweglichen Maschinenkomponenten erfolgt hier in der CACE-Umgebung von MATLAB.

6.2 Modellaufbereitung

6.2.1 Reduktion der Ein- und Ausgangsdimension im Finite-Elemente-Modell

In der Modellierungsphase des FE-Modells lässt sich die Anzahl der Ein- und Ausgänge im Vorfeld positiv beeinflussen. Eine effiziente Methode stellt die Verwendung von externen Punkten dar. Unter externen Punkten wird in ANSYS die Bündelung von Oberflächenknoten zu einem Knoten mittels MPC-Elementen verstanden. Bei der Bündelung der Flächen der einzelnen Führungsschienensegmente, wie in Bild 2-6 dargestellt, oder der Bündelung der Oberflächenknoten eines Kugelgewindespindelsegments, wie in Bild 6-2 gezeigt, werden die Flächensegmente durch einen Knotenpunkt repräsentiert. Durch die Zuweisung einer Knotennummer ist dann eine eindeutige Zuordnung möglich. Um Versteifungseffekten vorzubeugen, sollten die MPC-Elemente mit den RBE des Typs 2 realisiert werden, wie es in Unterkapitel 2.3 beschrieben wird. Der Nachteil dieser Modellierungsmethode ist, dass die Massenmatrix singulär wird. Da komplexe FE-Modelle häufig ohnehin singuläre Massenmatrizen hervorrufen, ist dieser Nachteil von geringer Relevanz. Bei der Positionierung der externen Punkte, die als Koppelknoten fungieren, muss bei der Spindel darauf geachtet werden, dass diese im Volumenschwerpunkt des Spindelsegments liegen. Die Position der Koppelknoten für die Kugelgewindemutter und für das Linearführungssystem muss ebenfalls konkret bestimmt werden. Bei diesen rotationssymmetrischen Bauteilen bilden die MPC-Elemente zur Bildung eines Koppelknotens eine sogenannte MPC-Spinne.

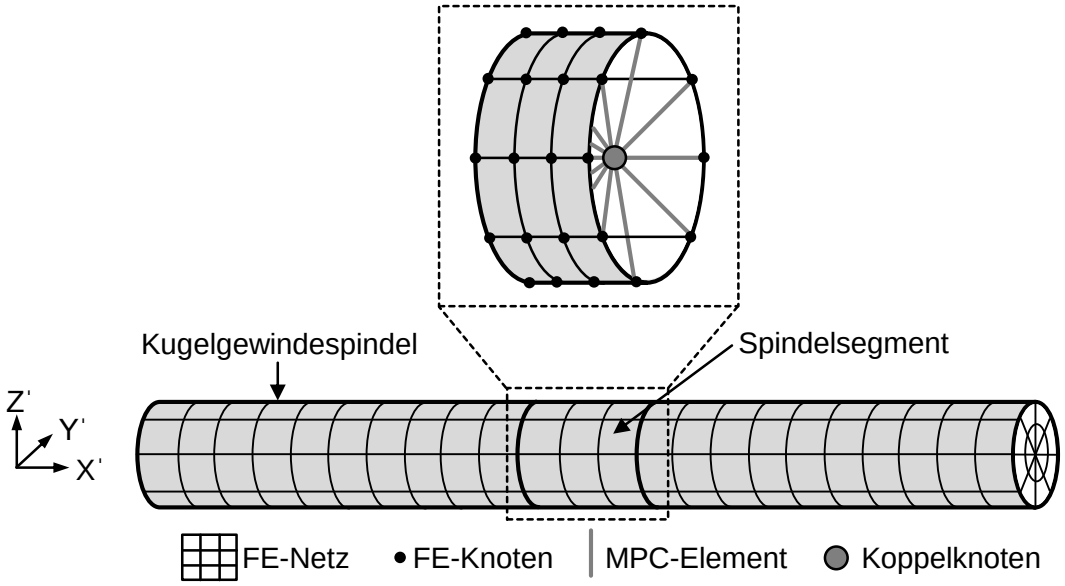


Bild 6-2: Bündelung der FE-Knoten mittels MPC-Elementen zu einem Koppelknoten am Beispiel der Kugelgewindespindel

Die Fläche des Tragkörpers, die durch die Maße l_{TK} und b_{TK} beschrieben wird, ist durch einen Koppelknoten repräsentiert, wie in Bild 6-3 dargestellt. Die Höhe $h_{TK,W}$ des Koppelknotens befindet sich bei einem zweireihigen Führungsschienensystem zwischen den beiden Laufbahnen. Die auf diese Art und Weise festgelegte Höhe ist zulässig, da die Laufbahnen der verwendeten Führungsschienen einen Druckwinkel von $\gamma_d = 45°$ aufweisen. Durch die gleiche Herangehensweise lässt sich das Maß $h_{FS,W}$ für die Koppelknoten der Führungsschiene ermitteln. Die Breite b_{FS} wird durch die geometrischen Abmaße der Führungsschiene bestimmt. Die Länge l_{FS} dagegen ist abhängig von der Anzahl der Kontaktknoten, die bei der Verfahrbewegung verwendet werden soll. Das Kopfstück und der Abstreifer haben nur einen geringfügigen Einfluss auf die Dynamik der Werkzeugmaschine. Daher werden deren geometrische Merkmale hierbei vernachlässigt.

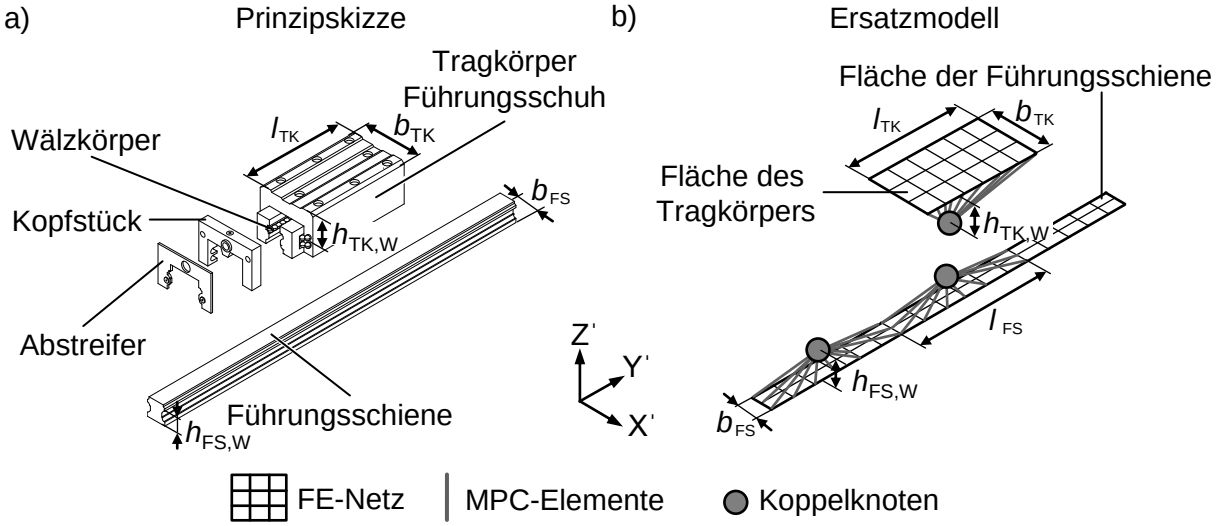


Bild 6-3: Bündelung der FE-Knoten mittels MPC-Elementen zu einem Koppelknoten am Beispiel der Linearführung

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die Anzahl der Ein- und Ausgänge des späteren reduzierten Systems verringert wird. Vorteilhaft ist auch, dass für die Strukturierung des Netzes der zu koppelnden Oberflächen kein Aufwand betrieben werden muss. Demgegenüber

steht der Nachteil, dass bisher bei dieser Modellierung ein manueller Aufwand zur Erstellung der Koppelknoten anfällt. Da dieser Prozess aber generell softwaretechnisch automatisierbar ist, lässt sich dieser Nachteil beheben.

Zusätzlich zu den Koppelknoten der Führungsschiene werden Knoten für die Einbringung der Antriebskraft und für die Ausgabe der Istposition am Messsystem benötigt. Erst dadurch kann die dynamische Steifigkeit korrekt abgebildet werden, die erheblich von der Regelung bestimmt wird. Somit kann der „mechatronische Steifigkeitspfad“ über das Messsystem und die Antriebe mit der Regelung geschlossen werden [NEU10], wie auch schematisch in Bild 6-1 gezeigt.

Die Ein- und Ausgangsanzahl der jeweiligen Teilsysteme nach der modellierungstechnischen Reduktion wird in Tabelle 6-1 aufgelistet. Die Koppelknoten fungieren als Ein- und Ausgangsknoten. Die Koppelknotenfreiheitsgrade der Kugelgewindemutter $N_{KFHG,KGM}$ und der Kugelgewindespindel $N_{KFHG,KGS}$ werden für alle drei Raumrichtungen definiert. Die Koppelknotenfreiheitsgrade der Führungsschuhe $N_{KFHG,TK}$ und der Führungsschiene $N_{KFHG,FS}$ setzen sich aus den Freiheitsgradrichtungen zusammen, die orthogonal zur Bewegungsrichtung sind. Die Anzahl der Koppelknotenfreiheitsgrade der Führungsschuhe $N_{KFHG,TK}$ wird mit der Anzahl der benötigten Koppelknoten für die Verfahrbewegung entlang der Führungsschienenfläche multipliziert. Zusätzlich werden drei Knotenausgänge am Messsystem für die drei Raumrichtungen benötigt, um den „mechatronischen Steifigkeitspfad“ zu schließen. Durch diese Berücksichtigung des Messsystems unterscheidet sich die Anzahl der Ein- und Ausgangsfreiheitsgrade voneinander.

Tabelle 6-1: Eigenschaften der Teilsysteme nach der modellierungstechnischen Reduktion der Ein- und Ausgangsknoten

Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4
Knotenanzahl N_{KA}	60.662	7.236	25.089	4.413
Koppelfreiheitsgradanzahl der Kugelgewindemutter $N_{KFHG,KGM}$	0	3	3	3
Koppelfreiheitsgradanzahl der Kugelgewindespindel $N_{KFHG,KGS}$	36	0	15	0
Koppelfreiheitsgradanzahl der vier Führungsschuhe $N_{KFHG,TK}$	0	8	8	8
Koppelfreiheitsgradanzahl der beiden Führungsschienen $N_{KFHG,FS}$	152	0	96	0
Freiheitsgradanzahl des Messsystems $N_{KFHG,MS}$	0	3	3	3
Freiheitsgradanzahl des Eingangs P	188	12	122	11
Freiheitsgradanzahl des Ausgangs Q	188	14	125	14
Gesamtanzahl der Koppelfreiheitsgrade $N_{KFHG,ges}$	188	14	125	14

6.2.2 Steigerung der Modellqualität und Nachbearbeitung reduzierter Systeme

Aus Unterkapitel 5.3 geht hervor, dass die reduzierten Systeme, die mittels der Krylov-Unterraummethode erstellt wurden, zwar instabile Zustände aufweisen, diese sich aber entfernen lassen. Dazu wird eine Transformation benötigt, die die zu entfernenden Zustände isoliert. Die Koordinatentransformation aus Gleichung 5-33 wird mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{T}_\mathrm{d} = \boldsymbol{T}_\mathrm{b}$ und eines Skalars v aufgestellt [MOO81]. Diese Transformation wird auf das Zustandsraummodell aus Gleichung 2-22 in Gleichung 6-1 angewendet, um einen numerisch günstigeren Zustand zu erhalten beziehungsweise die zu isolierenden Zustände in Schur-Komplemente zu bündeln. Mit dieser Transformation können auch die doppelten, die nicht beobachtbaren und die nicht steuerbaren Zustände getrennt werden.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR,d}} &= \boldsymbol{T}_\mathrm{d}\boldsymbol{A}_\mathrm{ZR}\boldsymbol{T}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,d}} + \boldsymbol{T}_\mathrm{d}\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{ZR}}{v}\boldsymbol{u}_\mathrm{ZR} \\ \boldsymbol{y}_\mathrm{ZR} &= v\boldsymbol{C}_\mathrm{ZR}\boldsymbol{T}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR,d}} + \boldsymbol{D}_\mathrm{ZR}\boldsymbol{u}_\mathrm{ZR} \end{aligned} \tag{6-1}$$

Von Gleichung 5-31 bis Gleichung 5-34 wird gezeigt, wie die Koordinatentransformation $\boldsymbol{T}_\mathrm{d}$ zu berechnen ist. Da diese Koordinatentransformation die Hankel-Singulärwerte σ_HSV in der Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ der Größe nach sortiert, erfolgt die Identifikation der zu entfernenden Zustände automatisiert, sodass diese Zustände dann durch balanciertes Abschneiden entfernt werden können [MOO81, LAU87, VAR01]. In Bild 5-25 ist ein beispielhafter Verlauf der ersten 125 nach der Größe sortierten Hankel- Singulärwerte σ_HSV des Teilsystems 2 dargestellt.

Das Programm MATLAB stellt unterschiedliche Funktionen zur Verfügung, mit denen die Ähnlichkeitstransformationsmatrix $\boldsymbol{T}_\mathrm{d}$ berechnet wird, um dann die nicht gewünschten Zustände entfernen zu können. Die MATLAB-Funktionen „ssbal“, „balreal“, „minreal“ und „sminreal“ unterscheiden sich jeweils dadurch, welche Zustände entfernt werden sollen. Hier wird die MATLAB-Funktion „minreal“ zur Bestimmung der Minimalkonfiguration verwendet, um die doppelt vorkommenden und die nicht beobachtbaren sowie die nicht steuerbaren Zustände zu entfernen.

Eine weitere Methode, die numerische Leistung der niedrigdimensionalen Ersatzmodelle zu steigern, ist die Verwendung der modalen Transformation aus Unterkapitel 2.4.1. Durch die Transformation der Systemgleichungen in den modalen Raum mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}_\mathrm{d} = \boldsymbol{T}_\mathrm{mod}$ können die numerisch stabilen und nicht stabilen Zustände separiert werden. Dazu bietet MATLAB die Funktion „stabsep“ an. Diese MATLAB-Funktion zerlegt das lineare System in ein stabiles und ein nicht stabiles System. Ob ein System stabil ist, wird durch das Vorzeichen der Eigenwerte λ der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_\mathrm{ZR}$ bestimmt. Da die niedrigdimensionalen Modelle aus dem hochdimensionalen linearen FE-Modell gewonnen werden, sind die niedrigdimensionalen Ersatzmodelle ebenfalls linear. Daher lässt sich die lineare Methode der modalen Transformation aus Gleichung 2-45 auch auf das reduzierte Modell anwenden. Hierbei besteht zusätzlich die Möglichkeit, das niedrigdimensionale Modell in ein niederfrequentes und ein hochfrequentes System zu zerteilen. Dies kann mit der MATLAB-Funktion „freqsep“ durchgeführt werden. Diese MATLAB-Funktion zerteilt das System anhand der Eigenwertzahlenwerte. Mit dieser Methode können die niedrigdimensionalen Ersatzmodelle speziell für die Echtzeitumgebung angepasst werden, um so die A-Stabilität zu gewährleisten, wie aus Unterkapitel 2.4.3 bekannt ist. So kann die Dimension des niedrigdimensionalen Systems L nochmals reduziert werden, wenn die hochfrequenten Anteile eine untergeordnete Rolle bei der numerischen Untersuchung spielen.

In Tabelle 6-2 sind die Eigenschaften der reduzierten SISO-Systeme und die Matrizenstatistikwerte zusammengefasst. Die Tabelle enthält die Dimension und die Anzahl der instabilen Pole im Zustandsraum der Teilsysteme von Teilsystem 1 bis Teilsystem 4 sowie des reduzierten Gesamtsystems. Die Statistikwerte der Matrizen, wie die Konditionszahlen K_Z der Systemmatrizen aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung sowie der Dynamikmatrizen, sind hier aufgelistet. Außerdem werden die Spektralnormen N_2 dieser Matrizen aufgeführt, um die Auswirkung der hybriden Reduktionsstrategie darzustellen. Überdies werden die betragsmäßig maximalen und minimalen Realteile der Eigenwerte λ von der reduzierten Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,red}$ gezeigt. Mit diesen Zahlenwerten kann festgestellt werden, ob ein System A-stabil ist, wie in Unterkapitel 2.4.3 erläutert. Die Position der Eigenwerte λ für das Gesamtsystem sind beispielhaft in Bild 6-5 visualisiert.

Tabelle 6-2: Eigenschaften der reduzierten Teilsysteme

Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4	Gesamt-system
Dimension L	40	10	25	10	60
Anzahl der instabilen Pole im Zustandsraum	0	1	1	0	3
Konditionszahl der red. Massenmatrix $K_{Z,M,r}$	$3{,}14\cdot10^{15}$	80,69	0,01	92,14	$1{,}65\cdot10^{15}$
Konditionszahl der red. Dämpfungsmatrix $K_{Z,E,r}$	$4{,}04\cdot10^{5}$	$1{,}29\cdot10^{5}$	$6{,}06\cdot10^{4}$	$2{,}32\cdot10^{5}$	$3{,}79\cdot10^{15}$
Konditionszahl der red. Steifigkeitsmatrix $K_{Z,K,r}$	$1{,}21\cdot10^{15}$	$1{,}18\cdot10^{16}$	$2{,}43\cdot10^{9}$	$1{,}45\cdot10^{18}$	$6{,}59\cdot10^{14}$
Spektralnorm der red. Massenmatrix $N_{2,M,r}$	0,29	0,06	0,18	0,05	0,29
Spektralnorm der red. Dämpfungsmatrix $N_{2,E,r}$	$2{,}50\cdot10^{10}$	$3{,}04\cdot10^{11}$	$2{,}50\cdot10^{15}$	$2{,}12\cdot10^{11}$	$2{,}66\cdot10^{6}$
Spektralnorm der red. Steifigkeitsmatrix $N_{2,K,r}$	$1{,}95\cdot10^{10}$	$7{,}61\cdot10^{6}$	$1\cdot10^{20}$	$5{,}29\cdot10^{6}$	$1{,}06\cdot10^{11}$
Konditionszahl der red. Dynamikmatrix $K_{Z,A,r}$	$5{,}80\cdot10^{24}$	$1{,}42\cdot10^{19}$	$1{,}01\cdot10^{20}$	$8{,}89\cdot10^{20}$	$7{,}18\cdot10^{21}$
Spektralnorm der red. Dynamikmatrix $N_{2,A,r}$	$3{,}04\cdot10^{19}$	$6{,}31\cdot10^{11}$	$3{,}30\cdot10^{18}$	$1{,}55\cdot10^{12}$	$1{,}26\cdot10^{20}$
Realteil des maximalen Eigenwerts der red. Dynamikmatrix $\lambda_{red,max}$	$-3{,}90\cdot10^{12}$	$-7{,}61\cdot10^{6}$	$-2{,}55\cdot10^{10}$	$-3{,}08\cdot10^{7}$	$-6{,}21\cdot10^{10}$
Realteil des minimalen Eigenwerts der red. Dynamikmatrix $\lambda_{red,min}$	$-2{,}18\cdot10^{-11}$	$1{,}74\cdot10^{-7}$	0,17	$-1{,}27\cdot10^{-8}$	0,31

Durch den Vergleich der Spektralnormen $N_{2,A}$ der reduzierten Dynamikmatrizen $\boldsymbol{A}_{ZR,red}$ in Tabelle 6-2 mit den Spektralnormen $N_{2,A,r,mod}$ der reduzierten modifizierten Dynamikmatrizen $\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod}$ in Tabelle 6-3 ist zu erkennen, dass das Balancieren einen positiven Nebeneffekt bezüglich der numerischen Eigenschaften auf das balancierte Modell hat. Denn bei der Koordinatentransformation $\boldsymbol{T}_d$ wird darauf geachtet, dass nur kleine Größenunterschiede der einzelnen Vektor- und Matrixelemente auftreten. Daraus ergibt sich eine Verbesserung der nachfolgenden Berechnungen, da die Matrizen in der Folge besser konditioniert sind. Die Verbesserung von der Konditionszahl $K_{Z,A,red}$ der reduzierten Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR}$ zur Konditionszahl $K_{Z,A,r,mod}$ der modifizierten reduzierten Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod}$ ist im Vergleich der Tabelle 6-2 mit der Tabelle 6-3 zu sehen.

Tabelle 6-3: Eigenschaften der modifizierten reduzierten Systeme nach der Erhöhung der Modellqualität durch Balancieren und Entfernung instabiler Zustände

Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4	Gesamt-system
Dimension des Zustandsraums nach der Modellqualitätserhöhung $L_{ZR,mod}$	58	15	44	14	91
Anzahl entfernter nicht beobachtbarer und steuerbarer sowie doppelt vorkommender Zustände	22	4	15	7	26
Anzahl entfernter instabiler Zustände	0	1	1	0	3
Prozentuale Reduktion des reduzierten Systems	~ 38 %	~ 33 %	~ 14 %	~ 43 %	~ 32 %
Konditionszahl der red. modifizierten Dynamikmatrix $K_{Z,A,r,mod}$	$1{,}65\cdot10^{15}$	$3{,}48\cdot10^{10}$	$1{,}22\cdot10^{13}$	$1{,}64\cdot10^{17}$	$1{,}43\cdot10^{15}$
Spektralnorm der red. modifizierten Dynamikmatrix $N_{2,A,r,mod}$	$7{,}44\cdot10^{16}$	$1{,}44\cdot10^{10}$	$7{,}07\cdot10^{8}$	$7{,}71\cdot10^{10}$	$1{,}48\cdot10^{13}$
Realteil des maximalen Eigenwerts der red. modifizierten Dynamikmatrix $\lambda_{max,r,mod}$	$-3{,}90\cdot10^{12}$	$-7{,}61\cdot10^{6}$	$-4{,}66\cdot10^{7}$	$-3{,}08\cdot10^{7}$	$-6{,}21\cdot10^{10}$
Realteil des minimalen Eigenwerts der red. modifizierten Dynamikmatrix $\lambda_{min,r,mod}$	$-0{,}05$	$-7{,}79$	$-4{,}16$	$-2{,}22\cdot10^{-6}$	$-0{,}11$

Zur Gegenüberstellung mit den Eigenschaften vor der Nachbearbeitung sind die Eigenschaften der modifizierten reduzierten SISO-Systeme nach der Modellaufbereitung in Tabelle 6-3 aufgelistet. Es wird ersichtlich, dass die mit der Krylov-Unterraummethode reduzierten Systeme nochmals durch die nachfolgende singulärwertzerlegungsbasierte Reduktionsmethode

des balancierten Abschneidens massiv reduziert wird. Durch das Balancieren werden die doppelt vorkommenden und nicht beobachtbaren sowie steuerbaren Zustände entfernt; durch die Separation der instabilen Zustände wird das System numerisch stabil. Somit lassen sich die reduzierten Systeme nochmals um 14 % bis 43 % verkleinern.

Die Schritte zur Modellqualitätserhöhung werden in Bild 6-4 am Beispiel der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r}$ des Gesamtsystems visualisiert. In diesem Bild sind die nicht nullwertigen Matrizeneinträge grau gefüllt. In der ersten Grafik ist die reduzierte Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r}$ mit der Dimension $N_{FHG} = 120$ Freiheitsgrade zu sehen. Hierbei ist der Aufbau der Dynamikmatrix durch die vier Submatrizen, wie in Gleichung 2-21 definiert, zu erkennen, wobei die obere und untere Matrizenzeile vertauscht sind. Im oberen rechten Quartal ist die Einheitsmatrix, im oberen linken Quartal die Nullmatrix zu sehen. Unten links in der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r}$ lässt sich die negative reduzierte Dämpfungsmatrix E_{red} erkennen die mit der inversen Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{red}$ multipliziert wurde. Die negative reduzierte Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{red}$, die ebenfalls mit der inversen Massenmatrix $\boldsymbol{M}_{red}$ multipliziert wurde, ist unten rechts in der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r}$ positioniert. Diese Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r}$ wird im ersten Schritt von den nicht beobachtbaren und nicht steuerbaren sowie den doppelt vorkommenden Zuständen befreit. Dies wird mit der MATLAB-Funktion „minreal“ durchgeführt. Damit entsteht eine neue modifizierte vollbesetzte Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod,l}$ mit der Dimension $N_{FHG} = 94$ Freiheitsgrade. Diese Matrix ist in der Mitte des Bildes zu sehen. Im zweiten Schritt werden dann die nicht stabilen Zustände der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod,l}$ mit der MATLAB-Funktion „stabsep“ separiert. Die daraus resultierende modifizierte reduzierte Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod}$ besitzt $N_{FHG} = 91$ Freiheitsgrade und ist rechts im Bild dargestellt. Durch diesen Schritt erhält die Matrix zusätzlich eine numerisch günstigere Darstellung in Form einer oberen Dreiecksmatrix.

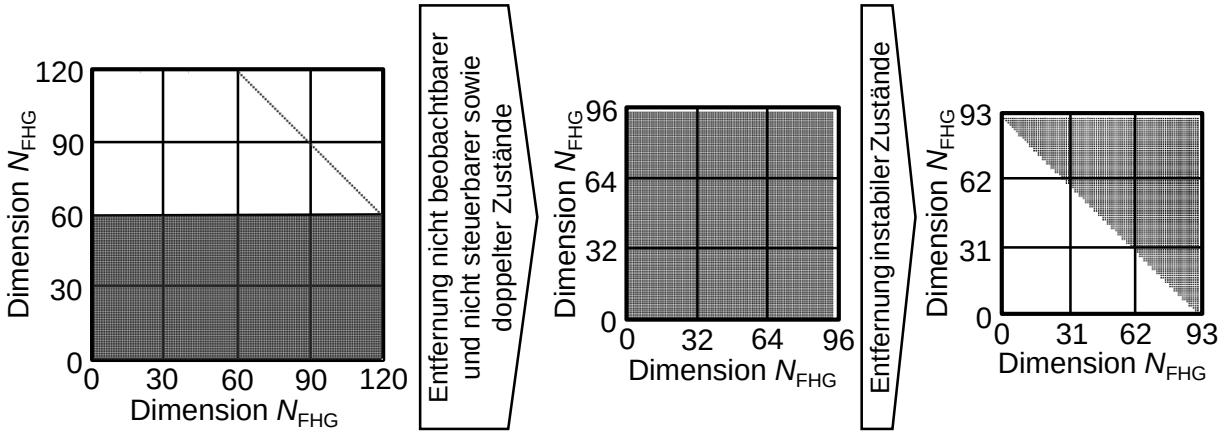


Bild 6-4: Besetzungsstruktur der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r}$ des reduzierten Gesamtsystems vor, während und nach der Steigerung der Modellqualität

In Bild 6-5 sind die Eigenwerte λ der Dynamikmatrizen in der komplexen Zahlenebene in den unterschiedlichen Modellqualitätserhöhungsschritten dargestellt. Aus Tabelle 6-2 ist bekannt, dass das reduzierte Gesamtsystem nicht stabil ist. Die Ursache hierfür sind drei instabile Eigenwerte λ_{ins}, die sich auf der positiven komplexen Zahlenebene befinden. Diese werden durch den ersten Modifikationsschritt entfernt. Die Eigenwerte $\lambda_{r,mod,l}$ der resultierenden Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR,r,mod,l}$ werden durch Rechtecke symbolisiert. Die Positionen der Eigenwerte $\lambda_{r,mod,l}$ in der komplexen Zahlenebene entsprechen mehrheitlich den Eigenwerten λ_{red} vor der Modifikation. Im letzten Modifikationsschritt verringert sich bei einigen Eigenwerten $\lambda_{r,mod}$ der imaginäre Anteil. Die grauen Dreiecke veranschaulichen diese Eigenwerte $\lambda_{r,mod}$.

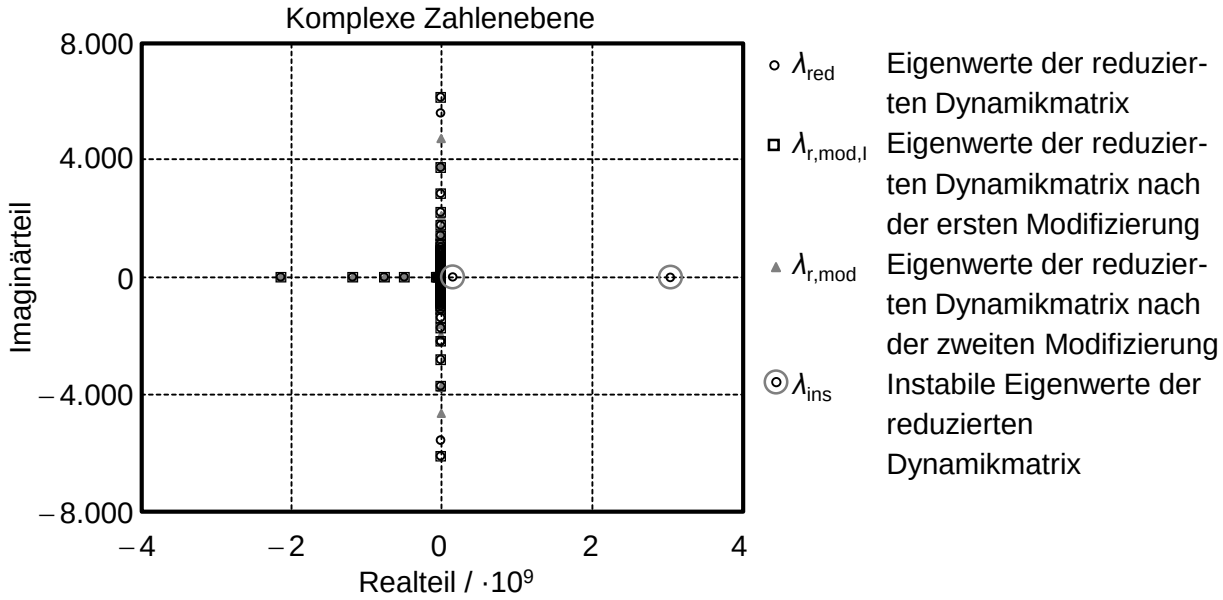


Bild 6-5: Position der Eigenwerte der unterschiedlichen Dynamikmatrizen des Gesamtsystems in der komplexen Ebene vor, während und nach der Steigerung der Modellqualität

6.2.3 Übertragung der Reduktionsergebnisse

Um für die mechatronische Simulation niedrigdimensionale mechanische Ersatzmodelle zu erhalten, werden die Erkenntnisse aus dem vorherigen Kapitel 5 auf die vier Teilsysteme sowie, für den Vergleich, auf das Gesamtsystem angewendet. Die Definition der Teilsysteme wurde in Unterkapitel 0 durchgeführt. Die verwendeten Reduktionsparameter sowie die resultierenden Mittelwerte der absoluten Abweichungen $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörigen Standardabweichungen σ_ε sind in Tabelle 6-4 aufgelistet.

Tabelle 6-4: Parameter zur Erstellung der reduzierten Systeme und resultierende Abweichung zum Referenzsystem

Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4	Gesamt-system
Dimension des Referenz-systems N	1.243.265	21.708	70.669	13.062	1.543.975
Reduktionsgrad L	40	10	25	10	60
Entwicklungspunkt s_0	0 s^{-1}	0 s^{-1}	240 s^{-1}	0 s^{-1}	0 s^{-1}
Deflationsgrenze δ	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}
Mittelwert der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$	1,447 dB	1,492 dB	1,328 dB	1,132 dB	1,394 dB
Standardabweichung der absoluten Abweichung σ_ε	2,232 dB	0,376 dB	1,042 dB	0,314 dB	0,998 dB

Das Ergebnis der ESVDMOR-Anwendung aus Unterkapitel 5.4.2 auf die vier Teilsysteme ist in Tabelle 6-5 aufgelistet. Die Freiheitsgradanzahl der reduzierten Ein- und Ausgänge wurde durch den Gradienten der Singulärwerte der Ein- und Ausgangsmomentenmatrizen ermittelt.

Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass sich das Reduktionsverhältnis mit steigender Freiheitsgradanzahl der Ein- und Ausgänge erhöht.

Tabelle 6-5: Übersicht der originalen sowie reduzierten Ein- und Ausgangsdimensionen der jeweiligen Teilsysteme

Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4
Freiheitsgradanzahl des Eingangs P	188	12	122	11
Freiheitsgradanzahl des Ausgangs Q	188	14	125	14
Freiheitsgradanzahl des reduzierten Eingangs ζ	16	4	12	4
Freiheitsgradanzahl des reduzierten Ausgangs δ	16	4	12	4
Reduktionsverhältnis des Eingangs	11,75	3	$10,1\overline{6}$	2,75
Reduktionsverhältnis des Ausgangs	11,75	3,5	$10,41\overline{6}$	3,5

Nach der Anwendung des ESVDMOR-Verfahrens und der Steigerung der Modellqualität durch Eliminierung instabiler, doppelter sowie nicht steuerbarer und beobachtbarer Zustände konnte die Dimension des Systems sowie der Ein- und Ausgänge reduziert werden. Das Ergebnis ist in Tabelle 6-6 aufgelistet.

Tabelle 6-6: Übersicht der MIMO-Systemdimensionen der jeweiligen modifizierten reduzierten Teilsysteme

Bezeichnung	Teil-system 1	Teil-system 2	Teil-system 3	Teil-system 4
Dimension des modifizierten reduzierten MIMO-Systems im Zustandsraum $L_{ZR,MIMO,r,mod}$	926	55	514	52
Freiheitsgradanzahl des reduzierten Eingangs ζ	16	4	12	4
Freiheitsgradanzahl des reduzierten Ausgangs δ	16	4	12	4

Diese Teilsysteme werden im Folgenden zu einem Gesamtsystem gekoppelt.

6.3 Kopplung von Teilsystemen

6.3.1 Einleitung und Definition

Die Kopplung von Teilsystemen zu einem Gesamtsystem kann in einem oder in mehreren unterschiedlichen Simulationsprogrammen erfolgen. In der vorliegenden Arbeit wird die Kopplung der Teilsysteme im Programm MATLAB realisiert. Die Teilsysteme können aus unterschiedlichen Fachdisziplinen oder Simulationsumgebungen stammen. Ein Vorteil der gekoppelten Simulation ist die Behandlung und Erstellung der Teilsysteme in den jeweils für die unterschiedlichen physikalischen Disziplinen optimierten Simulationsumgebungen. Zusätzlich bietet die Simulation der gekoppelten Teilsysteme die Möglichkeit, die einzelnen Teilsysteme

separat zu behandeln. Die Modellierung der unterschiedlichen Teilsysteme lässt sich zudem parallel durchführen, sodass letztlich auch die Zeitersparnis für diese Methode spricht.

In der Literatur gibt es unterschiedliche Ansätze zur gekoppelten Simulation, von denen hier lediglich eine geeignete Auswahl vorgestellt wird. So lassen sich die Teilsysteme bspw. in der mathematischen Darstellung der Differentialgleichung zweiter Ordnung oder in der numerisch günstigeren Darstellung des Zustandsraums koppeln. Diese Darstellungsformen sind ineinander überführbar. Zur Kopplung der Teilsysteme bietet sich auch die Schleifenbildung an, die in Unterkapitel 6.3.2 behandelt wird. Eine andere Methode zur Verkopplung der Teilsysteme erfolgt mittels der Systemeingangs- und -ausgangsvariablen, wie es aus der Referenz [VAL09] bekannt ist und in Unterkapitel 6.3.3 beschrieben wird. Eine Ausprägungsvariante der Ein- und Ausgangskopplung ist die Kraft-Verschiebung-Kopplung. Dieser Ansatz beruht auf dem Ursache-Wirkungsprinzip und kann daher grundsätzlich auf unterschiedliche physikalische Disziplinen übertragen werden.

Durch die direkte Kopplung der Ein- und Ausgänge, wie es Bild 6-6 schematisch zeigt, kann es zur Instabilität des Gesamtsystems kommen, obwohl die jeweiligen Teilsysteme stabil sind. Diese Situation tritt ein, wenn zwischen den Teilsystemen eine algebraische Schleife existiert, wie es auch schon von den Referenzen [KÜB00, SIE08, VAL09] beobachtet wurde. Daher werden die oben genannten Kopplungsvarianten im Folgenden vorgestellt und diskutiert.

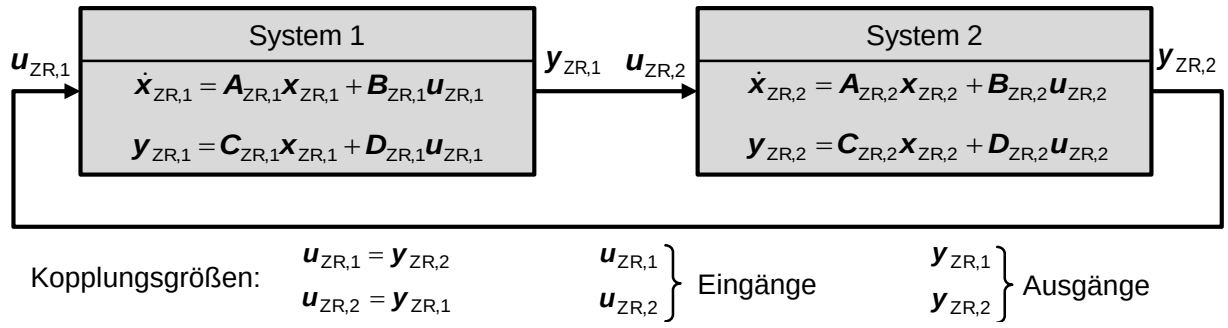


Bild 6-6: Algebraische Schleife zwischen zwei Teilsystemen mit einer direkten Kopplung der Ein- und Ausgänge

6.3.2 Schleifenbildung

Ein Vorteil der Schleifenbildung ist, dass die jeweiligen Teilsysteme mit einem problemspezifischen Integrator betrieben werden können. In der Folge können angepasste Zeitschrittweiten *h* verwendet und somit die Simulationen zeiteffizienter durchgeführt werden. Technisch werden diese entweder durch eine Co-Simulation oder durch eine Funktionskopplung realisiert, wie in Bild 6-7 schematisch dargestellt.

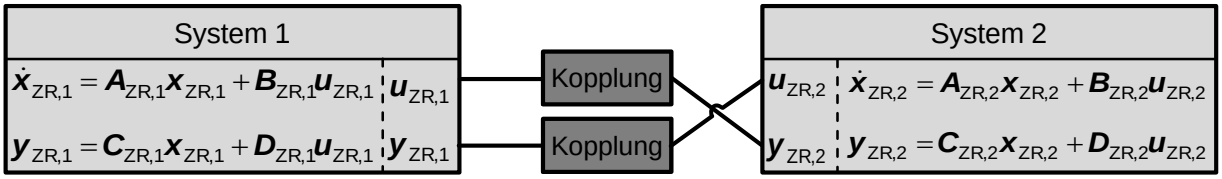


Bild 6-7: Berechnung des Gesamtsystems innerhalb einer Schleife

Ein Nachteil dieses Kopplungsansatzes ist, dass die Teilsysteme immer nur auf die berechneten Ergebnisse des vorherigen Zeitschritts des anderen Teilsystems zurückgreifen können. Bei der Berechnung des stationären Zustands wird dieser erst später erreicht als wenn er ohne Schleife berechnet würde. Hinzu kommt, dass häufig die Berechnung über die Schleifen in den

meisten Programmiersprachen verhältnismäßig langsam ist [KRE12]. Daher wird die Kopplung über die Ein- und Ausgänge bevorzugt. Die Problemstellung der algebraischen Schleifen muss aber beachtet werden.

6.3.3 Ein- und Ausgänge

Um eine Verkopplung der Teilsysteme mittels der Verbindung von Ein- und Ausgängen zu realisieren, werden Kopplungsbedingungen benötigt. Die Kopplung kann in einer Simulationsumgebung oder über mehrere Simulationsumgebungen hinweg erfolgen. Allgemein gilt zwischen den Koppelgrößen die Koppelbedingung in der folgenden Gleichung 6-2, die in den reellen Teilmatrizen $\boldsymbol{L}_{jk}$ zusammengefasst werden [KÜB00]:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{L}_{12} \\ \boldsymbol{L}_{22} & \boldsymbol{L}_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}. \tag{6-2}$$

Die Art der Kopplung unterscheidet sich hauptsächlich durch die Wahl der Koppelgrößen. Im Bereich der Mechanik wird zwischen der Kraftkopplung und der Kopplung über Zwangsbedingungen unterschieden. Wenn die Teilsysteme über die eingeprägten Kräfte gekoppelt werden, beispielsweise durch Feder- oder Dämpferkräfte, handelt es sich um eine Kraftkopplung. Diese Methode hat den Vorteil, dass eine Nullstabilität garantiert werden kann [KÜB00]. Durch die Nullstabilität wird gesichert, dass Fehler in den Startwerten und Rundungsfehler nicht zum Aufschwingen der Lösung führen. Dieser Kopplungsansatz kann noch weiter unterteilt werden in eine Kraft-Verschiebung-Kopplung, wie in Bild 6-8 dargestellt, und in eine Verschiebung-Verschiebung-Kopplung, wie in Bild 6-9 gezeigt. Statt dem Begriff Verschiebung ist in der Literatur im Zusammenhang mit der Kopplung auch der Begriff Weg gebräuchlich.

Bei der Kraft-Verschiebung-Kopplung liefert ein Teilsystem die Kraftinformation, während das andere Teilsystem die kinematischen Größen zur Verfügung stellt, wie in Bild 6-8 gezeigt. Wird die Reaktionskraft nur bei einem System berechnet, handelt es sich um eine Kopplung über Reaktionskräfte. In diesem Fall kann die Nullstabilität nicht gewährleistet werden [SCB09]. Diese Kopplung entspricht der Verknüpfung von Teilmodellen mittels unendlich steifen Federn [BUS12].

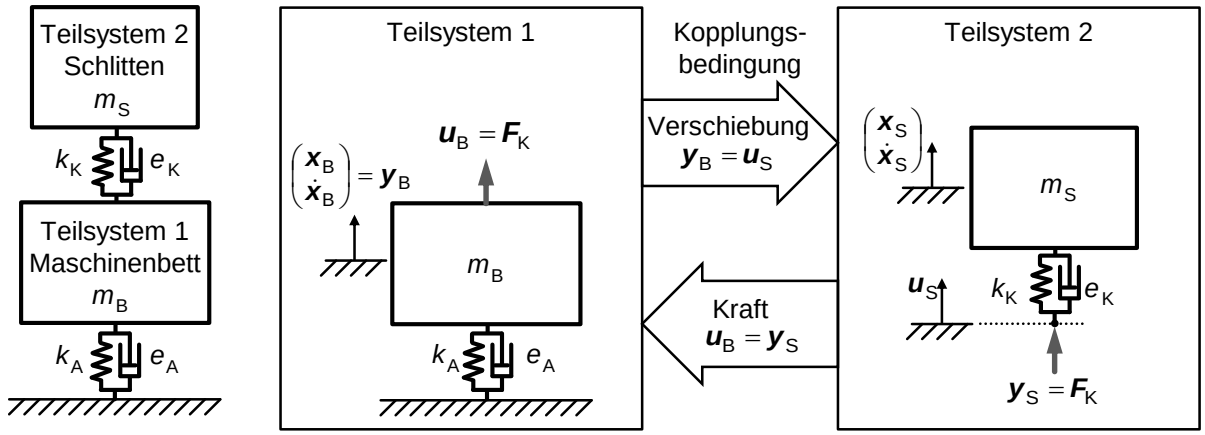


Bild 6-8: Schematische Darstellung von Aufbau und Wirkweise einer Kraft-Verschiebung-Kopplung

Bei der Verschiebung-Verschiebung-Kopplung liefern beide Teilsysteme die kinematischen Größen, wie in Bild 6-9 visualisiert. Die Kopplungskraft wird folglich auch in beiden Systemen berechnet. Bei der Kopplung über Zwangsbedingungen wird die Kopplung durch Reaktionskräfte zwischen den Systemen verwirklicht. Auch bei der letzten Variante kann die Nullstabilität

nicht gewährleistet werden [SCB09]. Diese Kopplung wird verwendet, wenn algebraische Nebenbedingungen oder Kontaktbedingungen erfüllt werden müssen. Hierbei können unter Umständen algebraische Schleifen entstehen, wie in Bild 6-6 skizziert. Wenn bei der Kraftkopplung die Federsteifigkeit unendlich hoch gesetzt wird, geht dieser Ansatz in die Kopplung mittels Zwangsbedingungen über, wie es in Bild 2-5 dargestellt ist [BUS12, FRI11].

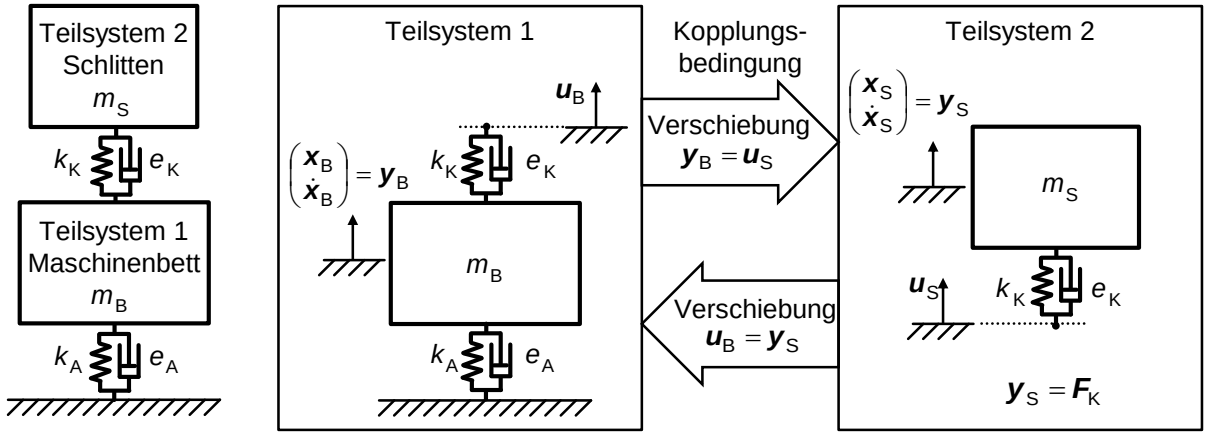


Bild 6-9: Schematische Darstellung über Aufbau und Wirkweise einer Verschiebung-Verschiebung-Kopplung

Bei einem zerteilten System im Zustandsraum liegen die jeweiligen Teilsysteme *j* in der Struktur der Gleichung 2-22 wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{ZR,j} &= \boldsymbol{A}_{ZR,j}\boldsymbol{x}_{ZR,j} + \boldsymbol{B}_{ZR,j}\boldsymbol{u}_{ZR,j} \\ \boldsymbol{y}_{ZR,j} &= \boldsymbol{C}_{ZR,j}\boldsymbol{x}_{ZR,j} + \boldsymbol{D}_{ZR,j}\boldsymbol{u}_{ZR,j}\,, \end{aligned} \tag{6-3}$$

wobei die Kopplungsbedingungen für $j = 1, 2$, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{y}_2$ und $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{y}_1$ erfüllt werden müssen.

Bei einer Kraft-Verschiebung-Kopplung sowie bei einer Verschiebung-Verschiebung-Kopplung unterscheiden sich die Dynamikmatrizen $\boldsymbol{A}_{ZR}$ nicht. Bei einer Verschiebung-Verschiebung-Kopplung sind die Durchgangsmatrizen $\boldsymbol{D}_{ZR}$ null. Die klassischen Ausgangsmatrizen sind mit Einsen und Nullen besetzt, da dort die Zuordnung der jeweiligen Zustände durchgeführt wird. Durch die Modellordnungsreduktion, die in Kapitel 5 durchgeführt wurde, und durch die Erhöhung der Modellqualität haben die Ausgangsmatrizen $\boldsymbol{C}_{ZR}$ eine andere Struktur. Dadurch sind diese nicht mehr nur mit Einsen und Nullen besetzt. Die notwendigen Transformationsschritte werden im späteren Verlauf erläutert und sind in Bild 6-10 dargestellt.

Die Eingangsmatrizen $\boldsymbol{B}_{ZR}$ der einzelnen Teilsysteme besitzen die gleiche Struktur, da bei beiden Teilsystemen die Verschiebung als Eingang vorliegt. Bei einer Kraft-Verschiebung-Kopplung unterscheiden sich die Matrizen. In diesem Fall ist bei mindestens einem Teilsystem die Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}_{ZR}$ nicht null. Für das Teilsystem, bei dem die Kraft als ein Ausgang definiert ist, muss die zugehörige Ausgangs- und Durchgangsmatrix modifiziert werden, so wie es in Gleichung 2-15 dargestellt ist. Diese modifizierten Matrizen werden mit einem Sternchen im Index gekennzeichnet. Für die Ausgangsmatrix gilt:

$$\boldsymbol{C}_{ZR,i*} = \boldsymbol{C}_{ZR,i} + \boldsymbol{C}_{K,i}, \tag{6-4}$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{C}_{K,i}$ die Kopplungsteilmatrix $\boldsymbol{L}_{ii}$ entspricht. Bei dem betrachteten System wird die Kreuzkopplungsmatrix nicht berücksichtigt. Die Kopplungsmatrix $\boldsymbol{C}_{K,i}$ enthält die Kopplungssteifigkeit und Kopplungsdämpfung. Liegen zwei gekoppelte Teilsysteme vor, gelten für die Ausgangsvektoren folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR},1} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},1*}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},1} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR},1} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},1*}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},1} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},2*}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},2} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR},2}) \\ &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},1*}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},1} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},2*}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},2} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR},1}) \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2*})^{-1}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},1*}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},1} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1*}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},2}). \end{aligned} \tag{6-5}$$

Diese Zusammenhänge gelten analog für den Ausgang $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR},2}$, wobei die Indizes 1 und 2 jeweils getauscht werden. Durch Einsetzen der beiden Zustandsgleichungen aus der Gleichung 6-2 entsteht die folgende gekoppelte Zustandsmatrix:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR,ges}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR},1} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR},1}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},1*} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR},1}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\right)^{-1}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},2*} \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR},2}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\right)^{-1}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},1*} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR},2} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR},2}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},2*} \end{bmatrix} \tag{6-6}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Matrizen $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1})$ und $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},2})$ nicht singulär und somit invertierbar sind. Daher dürfen die Eigenwerte λ dieser Matrizen nicht den Wert Eins einnehmen. In dieser Darstellung der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR,ges}}$ handelt es sich um ein stark gekoppeltes System, dass ein semi-explizites DAE-System mit dem Index 1 repräsentiert. Bei einer Kraft-Verschiebung-Kopplung ist mindestens eine Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR}}$ null, folglich sind die oben genannten Matrizen invertierbar. In diesem Fall kann eine Nullstabilität gewährleistet werden.

Zur Erstellung der Kopplungsmatrizen $\boldsymbol{C}_{\mathrm{K},i}$, sind einige Transformationen notwendig, die schematisch in Bild 6-10 dargestellt sind. Im ersten Schritt wird die Kopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{K,FE}}$ mittels der Allokationsmatrix und der Kopplungssteifigkeitselemente in der nodalen Darstellung aufgebaut. Mit der Allokationsmatrix wird die Zuordnung der Freiheitsgrade zu den jeweiligen Knoten im FE-Modell sichergestellt. An den zu koppelnden Freiheitsgraden werden in der Kopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{K,FE}}$ die zugehörigen Kopplungselemente eingetragen. Die Werte der einzelnen Kopplungssteifigkeitselemente sind für das Beispiel die Kugelschienenführungssysteme in Bild 4-28 und Bild 4-29 dargestellt. Für eine Zuordnung der Kopplungssteifigkeiten im reduzierten Krylov-Raum muss die Kopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{K,FE}}$ mit der reduzierten Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{red}}$ von links multipliziert werden. Die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{red}}$ enthält die Zuordnung des physikalischen nodalen Raums zum Krylov-Raum. Wird das System modifiziert, wie in Unterkapitel 6.2.2 durchgeführt, muss die reduzierte Kopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{K,red}}$ mit der Inversen der Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}_{\mathrm{bal}}$ von rechts multipliziert werden. Sind dann noch instabile Zustände im System enthalten, die entfernt werden müssen, ist im letzten Schritt eine weitere Transformation mittels der Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}_{\mathrm{mod}}$ notwendig. Die notwendigen Transformationsmatrizen werden von MATLAB zur Verfügung gestellt. Die genannten Arbeitsschritte werden für die Dämpfungskopplungsmatrix $\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$ analog durchgeführt.

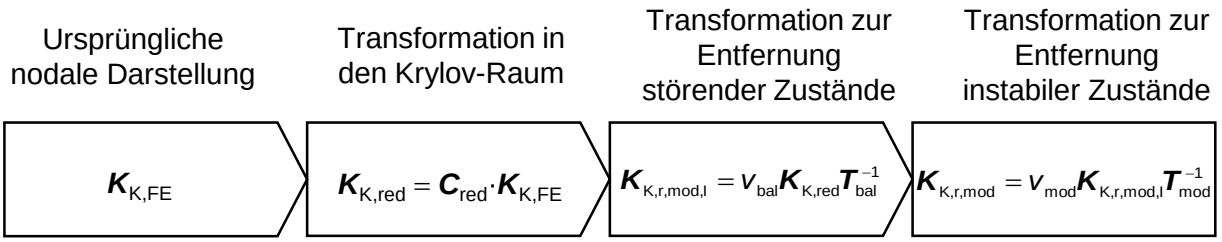


Bild 6-10: Schritte zur Transformation der Steifigkeitskopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{K}}$

Die Dämpfungskopplungsmatrix $\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$ und die Steifigkeitskopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_{\mathrm{K}}$ werden in der Kopplungsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{K},i}$ entsprechend zugeordnet. Mit dieser Kopplungsmatrix werden nun die Teilsysteme mittels der Gleichung 6-6 miteinander gekoppelt.

In Bild 6-11 ist das Ergebnis einer Kraft-Verschiebung-Kopplung am Beispiel der Übertragungsfunktion dargestellt. In diesem Bild werden die Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ am Auswertepunkt 9 bei einer Anregung mit einer Kraft von $F_{AY} = 1$ N am Werkstück für das Referenzsystem, für ein modifiziertes reduziertes SISO-System und für ein System, das aus modifizierten reduzierten MIMO-Systemen besteht, dargestellt. Bei allen drei Systemen befinden sich die Achsschlitten in der Null-Position. Das Referenzsystem ist das FE-Modell aus Kapitel 4 und besitzt ca. 1,5 Millionen Freiheitsgrade. Das modifizierte reduzierte SISO-System besitzt im Zustandsraum $L_{ZR,r,mod} = 91$ Freiheitsgrade. Dieses System wurde mittels der Krylov-Unterraummethode direkt aus dem Referenzsystem erstellt. Die zugehörigen Reduktionsparameter und der Mittelwert der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ sowie die Standardabweichung σ_ε sind in Tabelle 6-4 aufgeführt. Das dritte zu untersuchende System besteht aus den vier Teilsystemen die mittels der Gleichung 6-6 gekoppelt werden. Die Reduktionsparameter, der Mittelwert der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörige Standardabweichung σ_ε für die jeweiligen Teilsysteme sind ebenfalls in Tabelle 6-4 aufgelistet.

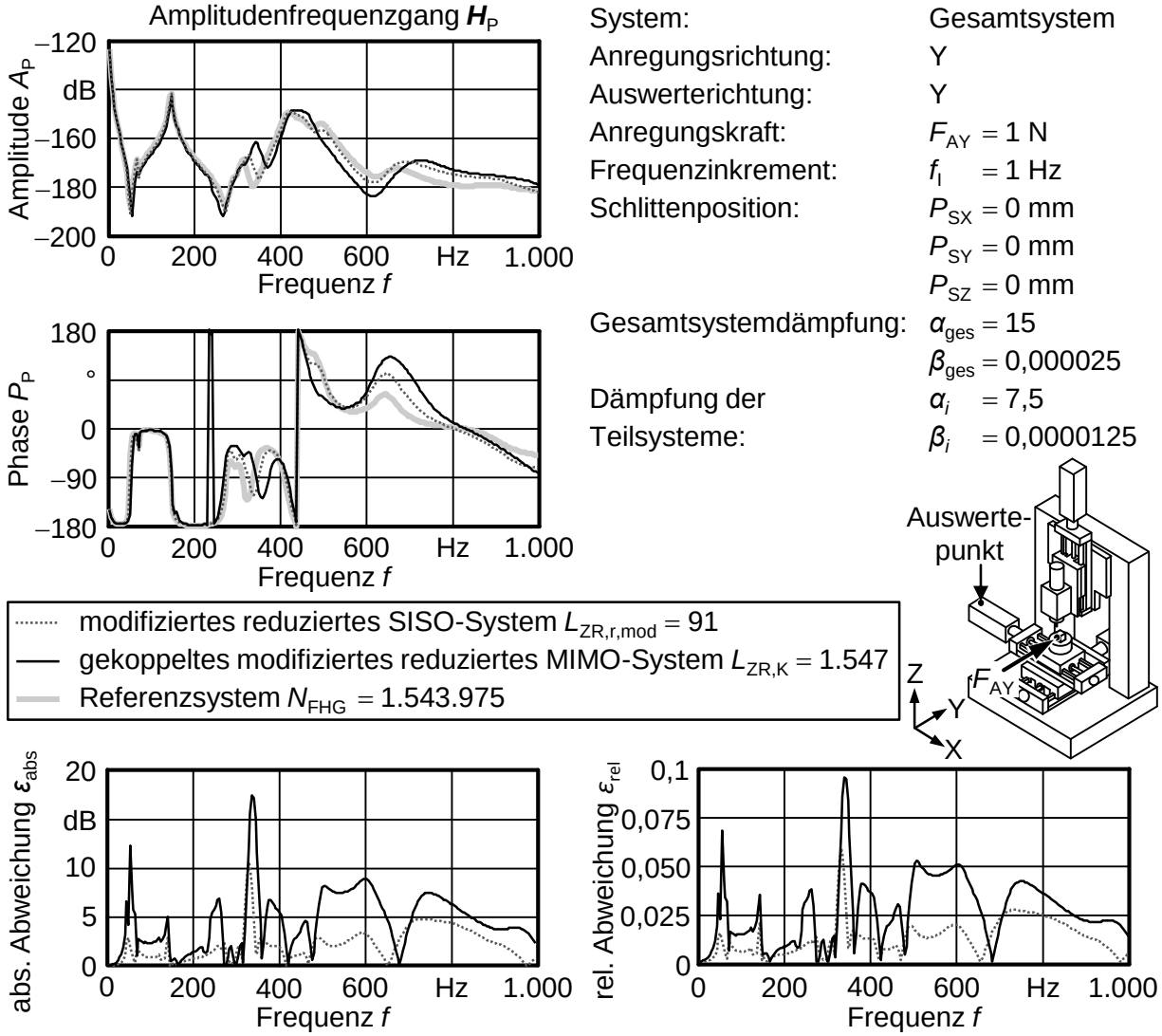


Bild 6-11: Vergleich der berechneten Amplitudenfrequenzgänge $\boldsymbol{H}_P$ vom Auswertepunkt 9 des Referenzsystems, des SISO-Systems und des Systems aus gekoppelten MIMO-Systemen

An den Amplitudenfrequenzgängen $\boldsymbol{H}_P$ ist zu erkennen, dass das gekoppelte modifizierte reduzierte MIMO-System eine stärkere Versteifung als das modifizierte reduzierte SISO-System aufweist. Dies ist daran zu erkennen, dass die dritte Frequenzspitze bei $f_{FE} = 314$ Hz einen zu

hohen Frequenzwert aufweist. Dies ist auch sehr deutlich am Diagramm der absoluten Abweichung ε_{abs} und der relativen Abweichung ε_{rel} zu erkennen. Der zugehörige Mittelwert der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ sowie die zugehörige Standardabweichung σ_ε sind in Tabelle 6-7 aufgelistet. Nichtsdestotrotz wird das globale Frequenz- und Phasenverhalten des Referenzsystems vom modifizierten reduzierten SISO-System und vom gekoppelten modifizierten reduzierten MIMO-System gut abgebildet.

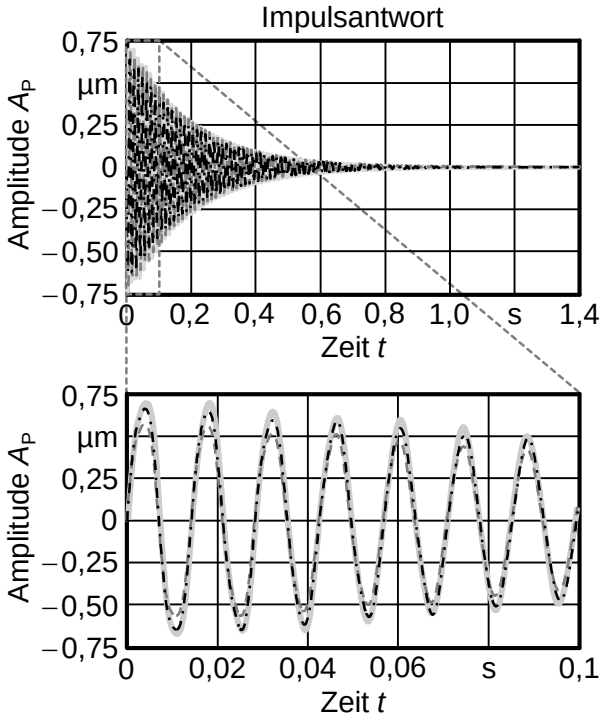
Tabelle 6-7: Übersicht der Mittelwerte der absoluten Abweichung $\overline{\varepsilon}_{abs}$ und die zugehörige Standardabweichung σ_ε des SISO-Systems und des gekoppelten MIMO-Systems

Bezeichnung	reduziertes SISO-System des Gesamtsystems	gekoppeltes System aus den MIMO-Teilsystemen
Dimension L	91	1.547
Mittelwert $\overline{\varepsilon}_{abs}$	1,394 dB	3,172 dB
Standardabweichung σ_ε	0,998 dB	2,673 dB

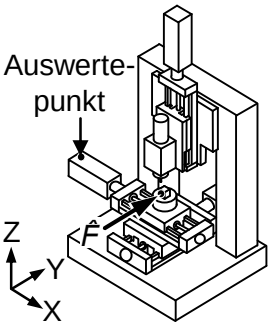
In Bild 6-12 ist der zugehörige Vergleich im Zeitbereich visualisiert. In dieser Darstellung werden die Impulsantworten für einen Zeitbereich von $t = 0$ s bis $t = 1{,}4$ s am Auswertepunkt 9 betrachtet, die aus einer Impulsanregung, wie in Gleichung 4-4 definiert, am Werkstückspannsystem entstehen. Dazu werden die Impulsantworten des Referenzsystems aus Bild 4-39, des modifizierten reduzierten SISO-Systems, das direkt aus dem Gesamtsystem erstellt wurde und des gekoppelten Gesamtsystems, das aus den modifizierten reduzierten Teilsystemen besteht, gegenübergestellt.

Es ist zu erkennen, dass die Amplitudenbeträge für die reduzierten Systeme geringer ausfallen als die des Referenzsystems. Die Abweichung des gekoppelten modifizierten reduzierten MIMO-Systems ist am stärksten ausgeprägt. Dafür sind zwei Effekte verantwortlich. Zum einen stimmt die Dämpfung des gekoppelten modifizierten reduzierten MIMO-Systems nicht mit dem Referenzsystem bzw. mit dem modifizierten reduzierten SISO-System überein. Zum anderen werden die jeweiligen Teilsysteme aufgrund des Reduktionsvorgangs steifer.

Die Dämpfung der jeweiligen Teilsysteme wird zwar auch mit der Bequemlichkeitshypothese modelliert, aber die jeweiligen Vorfaktoren wurden zur Vereinfachung lediglich mit den halben Zahlenwerten des Gesamtsystems ausgestattet. Mit der Dämpfungskopplungsmatrix $\boldsymbol{E}_K$ kann die Systemdämpfung entweder gezielt an das Referenzsystem oder an die gemessenen Daten angepasst werden. Diese Modellierung hat den Vorteil, dass die resultierenden Systeme sich physikalischer Verhalten, da ein hoher Anteil der Dämpfung aus den Führungsschienensystemen kommt, wie es vom Autor KUNC [KUN13] bekannt ist.



System:	Gesamtsystem
Reduktionsmethode:	Krylov-Unterraum
Algorithmus:	Block-Arnoldi
Anregungsart:	Impuls
Anregungskraft:	$\hat{F}$ = 10 N
Auswerterichtung:	Y
Schlittenposition:	P_{SX} = 0 mm
	P_{SY} = 0 mm
	P_{SZ} = 0 mm
Gesamtsystemdämpfung:	α_{ges} = 15
	β_{ges} = 0,000025
Dämpfung der Teilsysteme:	α_i = 7,5
	β_i = 0,0000125



- - - modifiziertes reduziertes SISO-System $L_{ZR,r,mod}$ = 91
- · - gekoppeltes modifiziertes reduziertes MIMO-System $L_{ZR,K}$ = 1.547
Referenzsystem N_{FHG} = 1.543.975

Bild 6-12: Zeitverhalten am Auswertepunkt 9 des Gesamtsystems bezüglich eines Impulses am Werkstückspannsystem

Die reduzierten Systeme verhalten sich steifer, da hochfrequente Systemanteile durch den Reduktionsvorgang nicht korrekt wiedergegeben werden. Es kommt hinzu, dass aufgrund der nodalen Kopplung lediglich einige wenige Punkte des Systems zur Kopplung zur Verfügung stehen. Folglich nehmen, im Gegensatz zum FE-Modell, die direkt benachbarten Knoten keinen Teil der Last auf. Folglich wird die Last über einen Koppelknoten übertragen und nicht, wie im FE-Modell, durch mehrere FE-Knoten. Dadurch wirkt das System versteifend. Auch hier könnten durch Einbringung von zusätzlichen Nachgiebigkeiten in der Steifigkeitskopplungsmatrix $\boldsymbol{K}_K$ die Ersatzsysteme an das Referenzsystem oder an gemessene Daten angepasst werden.

Bei dieser Art der Kopplung kann die Relativbewegung zwischen zwei Teilsystemen nicht berücksichtigt werden. Dazu sind weitere Modifikationen notwendig, wie im folgenden Unterkapitel dargestellt.

6.3.4 Berücksichtigung der Relativbewegung

Klassischerweise muss bei der Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften während großer Verfahrbewegungen durch Verschieben der Kontaktknoten eine Neuerstellung der Koeffizientenmatrix erfolgen. Die zeitaktuelle Anpassung der Kopplungsbedingungen von niedrigdimensionalen Ersatzmodellen mit niedrigdimensionalen Ein- und Ausgangsräumen ist dagegen deutlich effizienter.

Bei der Mikrofräsmaschine wird die Kraft der sich zueinander bewegenden Teile durch die Kugelgewindespindel sowie die Führungssysteme übertragen. Deshalb werden diese Maschi-

nenelemente im Simulationsmodell als Schnittstellen der einzelnen Teilsysteme für die Kraftübertragung verwendet. Die Modellierung dieser Schnittstellen für die FEM wurde in Unterkapitel 2.3 vorgestellt. Um eine Kopplung am reduzierten FE-Modell durchzuführen, sind kleine Änderungen des FE-Modells vorteilhaft, wie es in Unterkapitel 6.2.1 beschrieben ist. Dazu werden hier anders als in der Arbeit von MAGLIE [MAG12], die Schnittstellenkomponenten im FE-Modell unterdrückt und die Ersatzsteifigkeiten und Ersatzdämpfungen unmittelbar an den Flächen bzw. an den vorher definierten Koppelpunkten aus Bild 6-2 und Bild 6-3, den Schnittstellenkomponenten eingesetzt, wie es schematisch in Bild 6-13 gezeigt wird. Durch diese Vorgehensweise lassen sich die vom Lieferanten zur Verfügung gestellten Ersatzgrößen direkt einsetzen. Entlang der Bewegungsrichtung der Schnittstellenkomponente stehen nun die Koppelknoten zur Verfügung. Um eine numerisch effiziente Berechnung der Relativbewegung zu realisieren, ist es vorteilhaft, wenn der Abstand der Koppelknoten äquidistant ist.

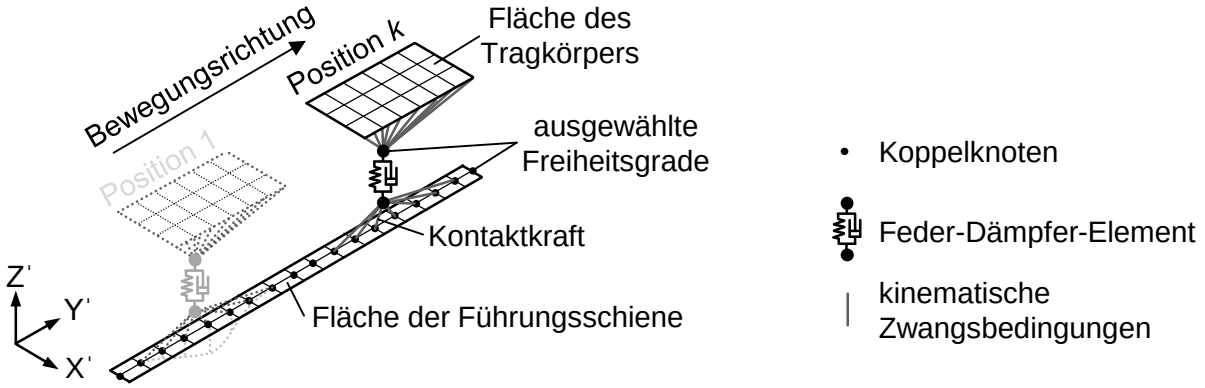


Bild 6-13: Schematische Darstellung der Stützknotenauswahl an den Schnittstellenkomponenten

Bei der traditionellen Kontaktmodellierung setzt sich die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$ am Tragkörper aus den einzelnen Kopplungsknotenkräften $\boldsymbol{F}_{\mathrm{K},i}$ der Führungsschiene zusammen. Die Länge l ergibt sich aus der Längendifferenz der Koppelknoten $\boldsymbol{P}_{\mathrm{K},2}$ und $\boldsymbol{P}_{\mathrm{K},1}$. Der Tangentenvektor $\boldsymbol{t}$ liegt in der Ebene des zweidimensionalen FE-Netzes und der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ steht orthogonal zu $\boldsymbol{t}$, wie in Bild 6-14 a) schematisch dargestellt. Aus der linearen Interpolation entlang des Führungsschlittennetzes ergibt sich die Projektion der Tragkörperposition als

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{K}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}_{\mathrm{K},1} + (\boldsymbol{P}_{\mathrm{K},2} - \boldsymbol{P}_{\mathrm{K},1})\xi \quad \text{mit} \quad \xi = \boldsymbol{t}^\mathrm{T}\frac{\boldsymbol{P}_{\mathrm{K},2} - \boldsymbol{P}_{\mathrm{K},1}}{l}\,. \tag{6-7}$$

Aus Gleichgewichtsgründen wirken die Kräfte $\boldsymbol{F}_{\mathrm{K},i}$ entgegen der Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$. Aus der Gleichgewichtsbedingung entsteht folgende Relation, die auch vom Autor WRIGGERS [WRI06] bekannt ist:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_\mathrm{T} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{K},1} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{K},2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_\mathrm{T}\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ -(1-\xi)\boldsymbol{n} \\ -\xi\,\boldsymbol{n} \end{bmatrix}. \tag{6-8}$$

Für die Kontaktbewegung werden mehrere Knoten benötigt, um eine glatte Verteilung der Kraft zu erreichen. Wird in der Simulation nicht darauf geachtet, kommt es beim Umschalten von einem Knoten auf den nächsten Knoten zur künstlichen Anregung des Systems. Aus der Praxis sowie von den Autoren ZÄH und SIEDL [ZAE07] ist bekannt, dass für eine glatte Kraftverteilung mindestens sechs Kontaktknoten im Eingriff sein müssen, da sonst das Steifigkeitsverhältnis der Kontaktelemente und der Struktur ungünstig ist. Die Gestalt der Verteilungsfunktion hat einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Kontaktsteifigkeit und kann für Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Werkzeugmaschine vereinfacht werden. Deshalb wird die Kraftverteilungsfunktion durch eine Parabelfunktion beschrieben, so wie in der Arbeit von

SIEDL [SIE08]. In Bild 6-14 b) wird eine momentane Kraftverteilung zwischen dem bewegten Tragkörper und sieben Kontaktknoten für die Kopplung dargestellt.

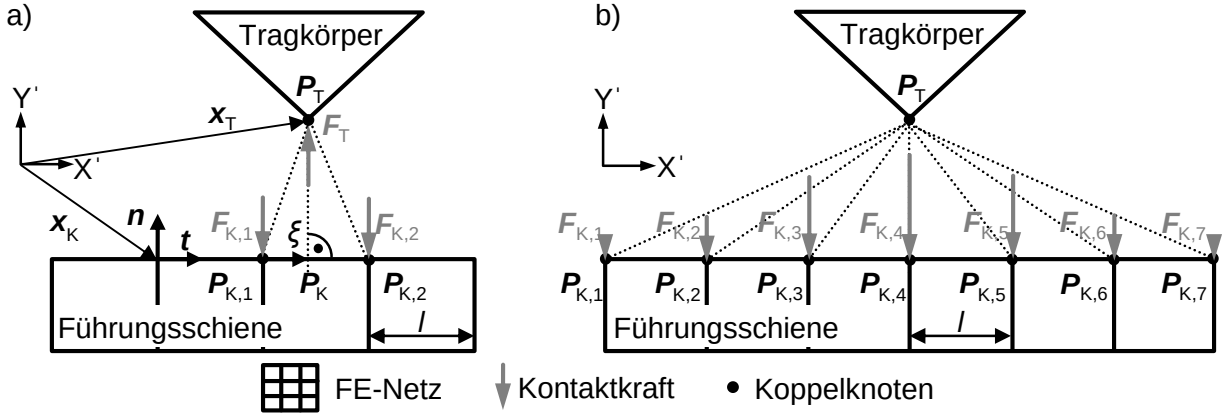


Bild 6-14: a) Klassische ebene Kontaktbedingung zwischen Schlitten und Führungsschiene
b) Verteilung der Last auf sieben Koppelknoten

Die Modellierung eines Rotationslagers und eines Kugelgewindetriebs wird analog zur Linearführung umgesetzt. Die Grundlagen der Modellierung für einen Kugelgewindetrieb werden in der Referenz [ZAE04] gezeigt. Auf eine ausführliche Darstellung wird hier verzichtet und auf die zusätzlichen Referenzen BAUDISCH [BAU03] und SIEDL [SIE08] verwiesen.

Bei der diskreten Kopplung der einzelnen Teilsysteme *j* an den jeweiligen Ein- und Ausgängen werden die Kräfte beziehungsweise die Verschiebungen an den Koppelknoten mit diskreten Feder-Dämpfer-Elementen eingeprägt, wie es auch ähnlicher Weise von HOHER [HOH11] dargestellt wird. Dazu wird die Gleichung 2-22 um einen ortsvektorabhängigen Koppelvektor $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}(t))$ erweitert:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZR},j} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{ZR},j}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},j} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{ZR},j}\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR},j} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{ZR},j}(\boldsymbol{r}(t))\right) \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{ZR},j} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},j}\boldsymbol{x}_{\mathrm{ZR},j} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{ZR},j}\boldsymbol{u}_{\mathrm{ZR},j}\ . \end{aligned} \tag{6-9}$$

In dem Koppelvektor werden die Koppelkräfte bei einer digitalen Blocksimulation, wie bspw. Simulink, einem Produkt von MATLAB, als diskrete Feder-Dämpfer-Elemente zwischen den Koppelknoten realisiert. Bei dieser Kopplungsvariante handelt es sich um eine positionsabhängige Nichtlinearität, da die jeweiligen Koppelknoten in Abhängigkeit von ihrer Position miteinander verbunden sind.

Die Kraftgleichung für eine beliebige Kopplung g durch das Feder-Element zwischen zwei Teilsystemen *i* und *j* an den diskreten Ausgängen l und m wird wie folgt aufgestellt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_{\mathrm{q,g},j}(\boldsymbol{r}) &= k_{i,j}^{\mathrm{l,m}}(\boldsymbol{r})\cdot\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{g},j}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{y}_{\mathrm{g},i}^{\mathrm{l}}\right) = k_{i,j}^{\mathrm{l,m}}(\boldsymbol{r})\cdot\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR,q,g},j}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR,q,g},i}^{\mathrm{l}}\boldsymbol{x}_i\right) \\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{q,g},j}(\boldsymbol{r}) &= -\boldsymbol{j}_{\mathrm{q,g},i}(\boldsymbol{r})\ . \end{aligned} \tag{6-10}$$

Analog dazu lässt sich die Kraftgleichung für die Dämpferkraft aufstellen.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_{\dot{\mathrm{q}},\mathrm{g},j}(\boldsymbol{r}) &= e_{i,j}^{\mathrm{l,m}}(\boldsymbol{r})\cdot\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{g},j}^{\mathrm{m}} - \boldsymbol{y}_{\mathrm{g},i}^{\mathrm{l}}\right) = e_{i,j}^{\mathrm{l,m}}(\boldsymbol{r})\cdot\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},\dot{\mathrm{q}},\mathrm{g},j}^{\mathrm{m}}\dot{\boldsymbol{x}}_j - \boldsymbol{C}_{\mathrm{ZR},\dot{\mathrm{q}},\mathrm{g},i}^{\mathrm{l}}\dot{\boldsymbol{x}}_i\right) \\ \boldsymbol{j}_{\dot{\mathrm{q}},\mathrm{g},j}(\boldsymbol{r}) &= -\boldsymbol{j}_{\dot{\mathrm{q}},\mathrm{g},i}(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{6-11}$$

Der Koppelvektor setzt sich somit aus einem verlagerungs- und einem geschwindigkeitsabhängigen Anteil zusammen.

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{g},j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}_{\mathrm{q,g},j}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_{\dot{\mathrm{q}},\mathrm{g},j}(\boldsymbol{r}) \tag{6-12}$$

Der gesamte Kopplungsvektor lässt sich schließlich für die Komponenten g aus der Summe der Einzelkopplungen für das System berechnen mit der Anzahl der Federn $\kappa_k \in \mathbb{N}$ und mit der Anzahl der Dämpfungen $\delta_d \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{j}_g(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{\kappa_k} \boldsymbol{j}_{q,g,j} + \sum_{j=1}^{\delta_d} \boldsymbol{j}_{\dot{q},g,j} \tag{6-13}$$

Die Kopplungsmatrix berechnet sich unter Berücksichtigung der Gleichung 6-9 wie folgt:

$$\boldsymbol{B}_{ZR,j} \cdot \boldsymbol{j}_{g,j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{L}_{ZR,j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r}(t) \tag{6-14}$$

Für die Kopplung zweier Teilsysteme entsteht somit die folgende gesamte Zustandsraumdarstellung.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{ZR,1} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{ZR,2} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{ZR,1} + \boldsymbol{L}_{ZR,11}(\boldsymbol{r}) & \boldsymbol{L}_{ZR,12}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{L}_{ZR,21}(\boldsymbol{r}) & \boldsymbol{A}_{ZR,2} + \boldsymbol{L}_{ZR,22}(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{ZR,1} \\ \boldsymbol{x}_{ZR,2} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{ZR,1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{ZR,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{ZR,1} \\ \boldsymbol{u}_{ZR,2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{ZR,1} \\ \boldsymbol{y}_{ZR,2} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{ZR,1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{ZR,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{ZR,1} \\ \boldsymbol{x}_{ZR,2} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{ZR,1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{ZR,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{ZR,1} \\ \boldsymbol{u}_{ZR,2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6-15}$$

Diese positionsabhängige Kopplung kann nun für die Simulation einer Verfahrbewegung genutzt werden. Die Kopplungsmatrix $\boldsymbol{L}_{ZR,j}(\boldsymbol{r})$ wird von der Regelung beeinflusst. In der mechatronischen Simulation wird das Zusammenspiel zwischen der Informationstechnik, der Regelung und der Mechanik untersucht, wie es im Folgenden dargestellt wird.

6.4 Modellierung und Durchführung der mechatronischen Simulation

6.4.1 Regelung und Sollgrößeninterpolation

Die Sollgrößen der Achsen werden vom Interpolator zur Verfügung gestellt, um sie dann der Regelung als Führungsgröße zu übergeben. Die Regelung wird mit elementaren Übertragungsgliedern modelliert. Für Werkzeugmaschinen werden häufig kaskadierte Lageregelkreise verwendet, wie auch bei der für die vorliegende Arbeit verwendeten Mikrofräsmaschine. Ein solcher Kaskaden-Regler für eine Achse wird schematisch in Bild 6-1 abgebildet. Dieser Regelkreis besteht aus einem proportionalen verstärkenden Lageregler, der mit einem P-Glied modelliert wird. Zusätzlich enthält der Regelkreis einen unterlagerten Drehzahl- und Stromregler mit Proportional- und Integralanteil, der durch ein PI-Glied realisiert wird.

Diese modellierte Regelung berechnet aus den Rückführgrößen der mechanischen und elektrischen Teilsysteme, wie Lage, Geschwindigkeiten und Strömen, die Regeldifferenz. Daraus werden für die Stellglieder die Reglerausgangsgrößen abgeleitet. Die Aktuatoren überführen diese Ausgangsgrößen in Stellgrößen, wie beispielsweise Kräfte und Momente, die der mechanischen Struktur über die Kopplungsmatrix $\boldsymbol{L}_{ZR,j}(\boldsymbol{r})$ zur Verfügung gestellt werden. Diese Stellgrößen sorgen für die gewünschte Verfahrbewegung. Zusätzlich werden Störgrößen mit dem mechanischen System gekoppelt, die zum Beispiel aus dem Fertigungsprozess oder der Reibung, die zwischen den relativ zueinander bewegten Körpern entsteht, stammen.

Der Regleraufbau sowie die benötigten Reglerfaktoren werden aus der Dokumentation entnommen, um diese dann in Simulink zu überführen. Der Aufbau des Modells und die Interpolation der Sollgrößen erfolgt analog, wie es von den Autoren ZIRN und WEIKERT [ZIR06] gezeigt wird.

6.4.2 Sprungantwort

In Bild 6-15 wird die Schwingungsantwort des Gesamtsystems aufgrund einer kleinräumigen, primär dynamischen Bewegung der Z-Achse in die negative Z-Richtung dargestellt. Das Sys-

tem wird durch die Verfahrbewegung der Z-Achse um $l_\Delta = 1$ mm in negative Z-Richtung angeregt. Diese Bewegung erfolgt mit dem maximalen Vorschub von $v_B = 1.000$ mm·min^{-1}, ohne dass Ruckbegrenzung erreicht wird. In der Abbildung ist der Vergleich zwischen dem simulierten und gemessenen Schwingungsverlauf in Y-Richtung am Auswertepunkt 8 zu sehen. Der experimentelle Schwingungsverlauf stammt aus Bild 4-22. In Bild 6-15 wird der zeitliche Ausschnitt von $t = 2$ s bis $t = 4$ s des gemessenen Amplitudenverlaufs verwendet. Der simulierte Schwingungsverlauf wird gepunktet dargestellt, um den gemessenen Amplitudenverlauf noch zu erkennen. Die globale Charakteristik der Überschwingung wird vom gekoppelten modifizierten reduzierten MIMO-System mit $L = 1.547$ Freiheitsgraden korrekt abgebildet. Die Schwingungscharakteristik ist hauptsächlich von den Regelparametern abhängig. Beispielsweise beeinflusst der K_V-Faktor im Wesentlichen die Position und Stärke der Überschwingung.

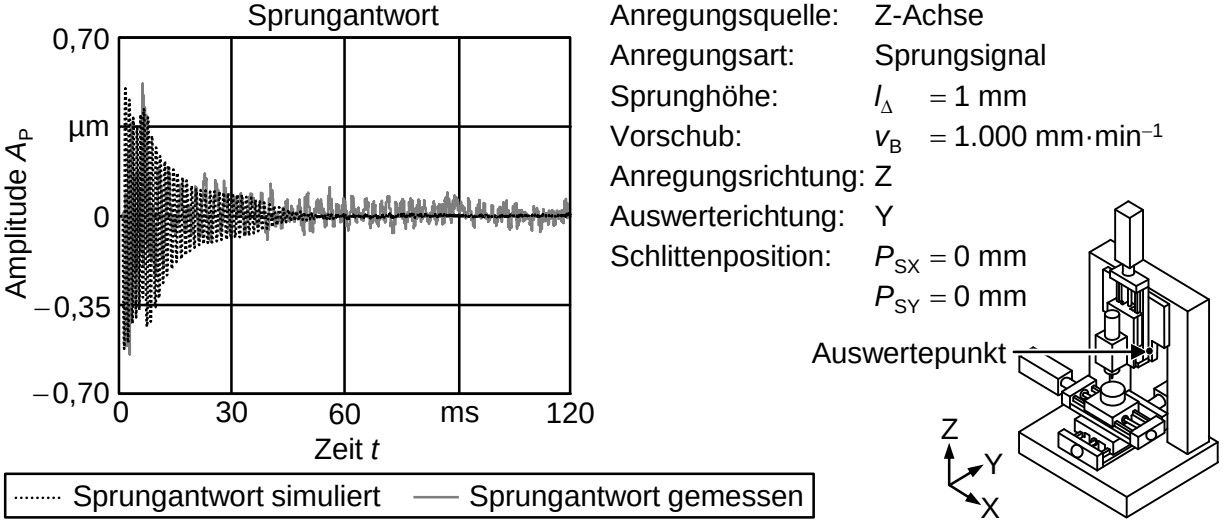


Bild 6-15: Schwingungen am Auswertepunkt 8 aufgrund eines Z-Achsensprungs von 1 mm bei einem Vorschub von 1.000 mm·min^{-1}

Das ausgeprägte simulierte Abklingverhalten ist im gemessenen Schwingungsverlauf nicht zu erkennen. Das Abklingverhalten wird vorrangig von der Dämpfung ϑ bestimmt. Die Dämpfung ϑ der jeweiligen Teilsysteme wird mit der Bequemlichkeitshypothese modelliert mit den Vorfakten $\alpha_i = 7{,}5$ und $\beta_i = 0{,}0000125$. Bessere Ergebnisse werden erreicht, wenn zusätzliche Dämpfung im Bereich der Führungsschiene in der Kopplungsmatrix integriert wird. Das Schwingverhalten nach $t = 50$ ms wird beim gemessenen Schwingungsverlauf durch Messrauschen überlagert. Dieses Rauschen wird im Simulationsmodell nicht berücksichtigt. Das Schwingungsamplitudenminimum nach dem zweiten Aufschwingen zwischen $t = 10$ ms bis $t = 20$ ms wird vom Simulationsmodell nicht korrekt wiedergegeben.

Die Berechnung der Sprungantwort benötigt ca. $t_R \approx 16$ min unter Verwendung eines 4-Kern Computers mit einer CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher. Die Simulation wurde in Simulink mit einem impliziten Lösungsalgorithmus, den Dormand-Prince (ODE45), mit variabler Rechenschrittweite h durchgeführt.

Die Anzahl der Ein- und Ausgangsknoten der bei der Bewegung beteiligten Achsen beeinflusst die Qualität des Schwingungsverlaufs sowie das Abklingverhalten. Bei zu geringer Anzahl der Ein- und Ausgangsknoten beim Teilsystem 1 und 2 stimmen die Amplitude sowie die Schwingungsform nicht. Zusätzlich ist im Schwingungsverlauf eine nicht physikalische Anregung in Form von überlagerten kleinen Schwingungen zu erkennen. Diese wird durch die künstliche

Anregung durch das Umschalten der Kraft von einem Knoten zum nächsten Knoten verursacht, wie es in Unterkapitel 6.3.4 beschrieben ist. Der Knotenabstand für die jeweiligen Ein- und Ausgänge wurde auf $l = 0{,}25$ mm gesetzt, um den Z-Achsensprung von $l_\Delta = 1$ mm zu realisieren.

Grundsätzlich kann die Antwortcharakteristik bezüglich einer kleinräumigen, primär dynamischen Bewegung einer Achse auch mit einem SISO-System ohne Relativbewegung berechnet werden. Die Verhaltensänderung des Systems bei so einer kleinen Positionsänderung ist vernachlässigbar klein. Aber durch die Modellierungsmethode, mehrere MIMO-Teilsysteme zu verwenden, können zusätzliche physikalische Phänomene wie Slip-Stick-Effekte berücksichtigt werden. Für den Nachweis, dass größere Relativbewegung der Achsen mit den MIMO-Systemen möglich ist, wird im Folgenden der numerische Kreisformtest durchgeführt.

6.4.3 Numerischer Kreisformtest

Beim numerischen Kreisformtest interagieren die beiden bewegten Achsen miteinander. Das Verhalten wird durch die Informationstechnik, Regelung und Mechanik bestimmt. Dieses mechatronische Verhalten kann gezielt ausgenutzt werden, um einzelne Effekte zu untersuchen. Um diese Simulation durchführen zu können, wird eine hohe Anzahl an Koppelstellen an den Teilsystem 1, 3 und 4 benötigt. Der Koppelknotenabstand an der Führungsschiene beträgt $l = 1{,}5$ mm. Die Koppelknoten sind so positioniert, dass sich dann auf einer Länge von $l = 57$ mm auf der Führungsschienenfläche 38 Koppelknoten befinden. Dieses Maß ist 7 mm länger als die benötigte Verfahrbewegung, um eine Lastverteilung an den Koppelknoten zu realisieren, wie es in Bild 6-14 b) schematisch gezeigt wird. Das Vorgehen wird analog für die Kugelgewindespindel durchgeführt. Die resultierenden MIMO-Systeme mit der geometrischen Positionierung der Ein- und Ausgansknoten, wie in Unterkapitel 6.2.1 beschrieben, werden mittels des ESVDMOR-Verfahren in Verbindung mit der Krylov-Unterraummethode reduziert. Diese reduzierten MIMO-Systeme werden zur Steigerung der Modellqualität modifiziert, so wie es in Unterkapitel 6.2.2 dargestellt ist. Die am Ende erreichten Dimensionsgrößen der Teilsysteme sind in Tabelle 6-6 aufgelistet.

Die Berechnung mit diesem gekoppelten modifizierten reduzierten MIMO-System dauerte bei einem 4-Kern Computer mit einer CPU von 2,8 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher ungefähr $t_R \approx 1$ Std. Die Simulation wurde mit Simulink mit einem impliziten Lösungsalgorithmus Dormand-Prince (ODE 45) durchgeführt. Zur weiteren Verkürzung der Berechnungszeit bietet sich die Kompilierung des Berechnungscodes an.

In Bild 6-16 ist das Ergebnis des berechneten und des gemessenen Kreisformtests zu sehen. Der Messfehler, der einen Mittelpunktversatz hervorruft, ist im Simulationsmodell nicht berücksichtigt. Im Simulationsmodell ist ein hoher Rechtwinkligkeitsfehler von 300 $\mu m \cdot m^{-1}$ implementiert. Dieser Fehler wird durch die Positionsumrechnung des TCPs um diesen Winkel realisiert. Die schwach erkennbaren Schwingungen des simulierten Kreisformtests an den jeweiligen Quadrantenübergängen haben ihre Ursache in der Lastverteilungsmodellierung an der Führungsschiene und der Kugelgewindespindel. Die Schwingungsstärke wird durch die Anzahl der Ein- und Ausgänge beeinflusst. Bei einer zu geringen Anzahl von Koppelknoten sind die Schwingungen an den Umkehrpunkten stärker ausgeprägt. Der Grund dafür ist die numerisch künstliche Anregung durch das Umschalten der Kraft von einem Koppelknoten zum nächsten Koppelknoten. Dieser Effekt wird nochmals verstärkt, wenn ein expliziter Lösungsalgorithmus

verwendet wird. Umgekehrt wird dieser Effekt durch eine höhere Anzahl an Koppelknoten, durch Verwendung eines impliziten Lösungsalgorithmus und durch Erhöhung der Dämpfung abgeschwächt.

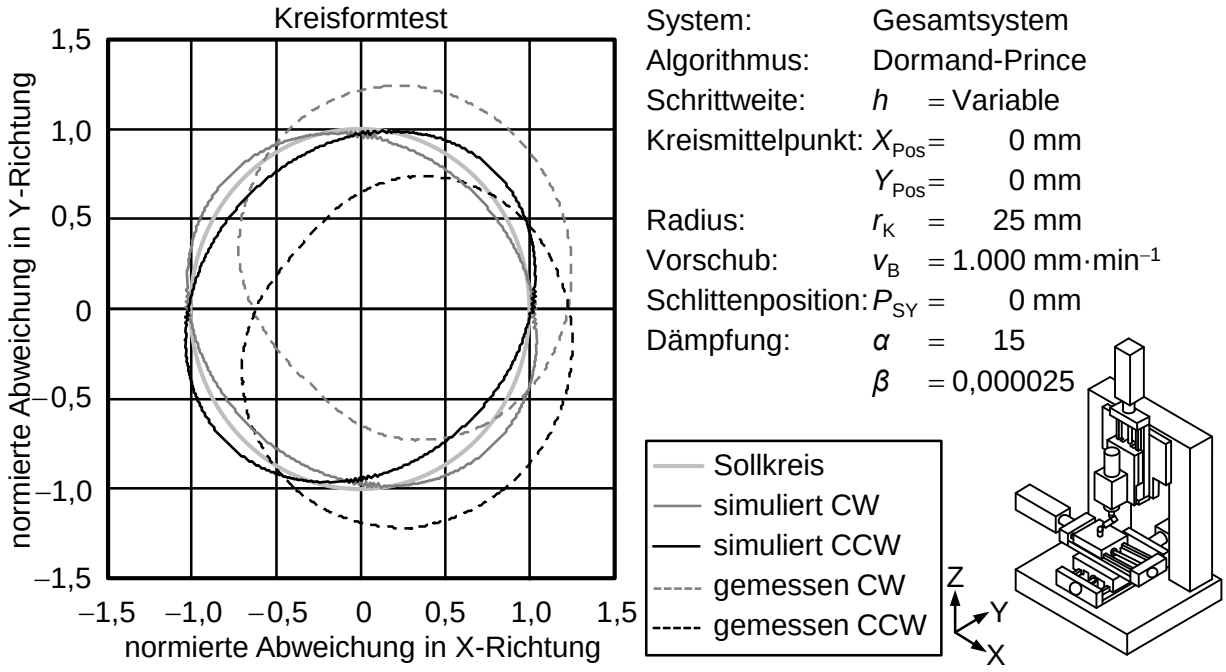


Bild 6-16: Simulation des numerischen Kreisformtests mit dem gekoppelten modifizierten reduzierten MIMO-System

Grundsätzlich können mit diesem Modell Maschinenfehler vom Typ Umkehrfehler, Master-Slave-Fehlverhalten, Spitzen am Quadrantenübergang und Maßfehler abgebildet werden. Der Umkehrfehler hat seinen Ursprung häufig im Führungsspiel, dass durch ein Verzögerungsglied nachgebildet werden kann. Durch die Modellierung von Haftreibung können Spitzen an den Quadrantenübergängen erzeugt werden. Das Master-Slave-Fehlverhalten wird realisiert, wenn die Rolle der Masterachse, die mit einer konstanten Vorschubgeschwindigkeit fährt, zu spät die Rolle der Slave-Achse übernimmt. Die Slave-Achse passt die Vorschubgeschwindigkeit an die Master-Achse an. Bei einer simulierten Kreisfahrt ist dann ein Sprung an der Winkelhalbierenden der einzelnen Quadranten zu erkennen. Der Maßfehler wird mit einem Vorfaktor vor der jeweiligen Achse realisiert.

6.5 Zusammenfassung und Fazit

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie mit den niedrigdimensionalen Ersatzmodellen, die hochdimensionale Ein- und Ausgangsräume besitzen, eine mechatronische Simulation durchgeführt werden kann. Der Fokus wurde auf die Erstellung der mechanischen Ersatzmodelle gesetzt. Die Zeiteffizienz der Simulation wird durch die Anzahl der Freiheitsgrade und durch den numerischen Zustand des Systems bestimmt. Um die Freiheitsgradanzahl des Ersatzsystems gering zu halten, ist es vorteilhaft, wenn die Ein- und Ausgangsanzahl schon im FE-Modell minimal gehalten wird. Dies wird durch eine geschickte Modellierung der Koppelknoten erreicht, wie es in Unterkapitel 6.2.1 gezeigt wird. Die Ein- und Ausgänge werden mittels ESVDMOR-Verfahren aus Unterkapitel 5.4.2 in den niedrigdimensionalen Raum projiziert, um diese Systeme dann mit der Krylov-Unterraummethode zu reduzieren und im Anschluss die

ursprüngliche Ein- und Ausgangsdimension durch Rückprojektion zu erhalten. Die daraus entstandenen niedrigdimensionalen MIMO-Systeme werden nachfolgend von instabilen, doppelten sowie nicht beobachtbaren und nicht steuerbaren Zuständen durch singulärwertzerlegungsbasierte Methoden befreit. Das Vorgehen und der positive Effekt auf die numerischen Eigenschaften des Systems werden in Unterkapitel 6.2.2 gezeigt.

Zur Kopplung der mechanischen Teilsysteme existieren unterschiedliche Herangehensweisen. Eine Auswahl wurde in Unterkapitel 6.3 gezeigt. Für die Verfahrbewegung von Werkzeugmaschinenachsen ist die Kopplung über Ein- und Ausgänge zielführend. Grundsätzlich können dabei die Kopplungsbedingungen der Verschiebung-Kraft-Kopplung oder der Verschiebung-Verschiebung-Kopplung angewendet werden. Bei diesen Kopplungsmethoden werden die Ein- und Ausgangsmatrizen sowie bei der Verschiebung-Kraft-Kopplung die Durchgangsmatrix angepasst. Die Zustandsmatrizen müssen nicht verändert werden. Durch die Modellordnungsreduktion und die darauffolgende Steigerung der Modellqualität ist eine Transformation der Kopplungsmatrizen notwendig. Die notwendigen Transformationsschritte sind in Bild 6-10 zu sehen.

Durch die direkte Kopplung der Teilsysteme zu einem Gesamtsystem in einer Matrixdarstellung wurde gezeigt, dass die resultierenden Systeme eine leichte Versteifung im höheren Frequenzberiech aufweisen. Der Frequenzbereich kann durch Hinzufügen von Entwicklungsgliedern L erhöht werden. Die Modellqualität mit der gewählten Dimension L reicht für den praktischen Anwendungsbereich aus. Um Relativbewegungen zu berücksichtigen, muss die Kopplungsmatrix um einen ortsabhängigen Kopplungsvektor erweitert werden. Durch diese Herangehensweise entsteht eine positionsabhängige Zustandsraummatrix, die für die Simulation verwendet werden kann.

Mit diesem Kapitel 6 wurde gezeigt, dass mit den reduzierten MIMO-Systemen aus Kapitel 5 eine mechatronische Simulation durchgeführt werden kann. Zusätzlich konnte die Qualität des reduzierten MIMO-Systems erhöht und die Dimension nochmals reduziert werden.

7 Praxisorientierte Anwendung moderner Modellordnungsreduktionsverfahren

7.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie ausgehend von FE-Modellen niedrigdimensionale mechanische Ersatzsysteme mit hoher Ein- und Ausgangsdimension erstellt werden. Die Dimension N und die numerischen Eigenschaften der Systemmatrizen des FE-Modells werden durch die Geometrie, die Elementenanzahl n_{EA}, die Elementenqualität n_{EQ}, des Elementtyps, die Dämpfung ϑ, die Werkstoffeigenschaften und die Modellierungsart der Randbedingungen bestimmt. Die FE-Software liefert die Massenmatrix $\boldsymbol{M}$, die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}$, die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ sowie die Allokationsmatrix. Um eine Relativbewegung zu realisieren, ist eine Trennung der beweglichen Baugruppen in Teilsysteme notwendig. Durch eine geschickte Modellierung kann die Anzahl der Ein- und Ausgänge verringert werden. Diese hochdimensionalen Systeme mit einer hohen Anzahl an Ein- und Ausgängen werden durch die Kombination singulärwertzerlegungsbasierter Modellordnungsreduktionsverfahren mit der Krylov-Unterraummethode in niedrigdimensionale Systeme mit einer hohen Anzahl an Ein- und Ausgängen reduziert. Die Systemeigenschaften sind von den Reduktionsparametern abhängig. Die Qualität niedrigdimensionaler Modelle kann mit singulärwertzerlegungsbasierten Methoden gesteigert werden, um eine zeiteffizientere und ressourcenschonendere Simulation durchzuführen. Die notwendigen Arbeitsschritte werden in Bild 7-1 schematisch dargestellt.

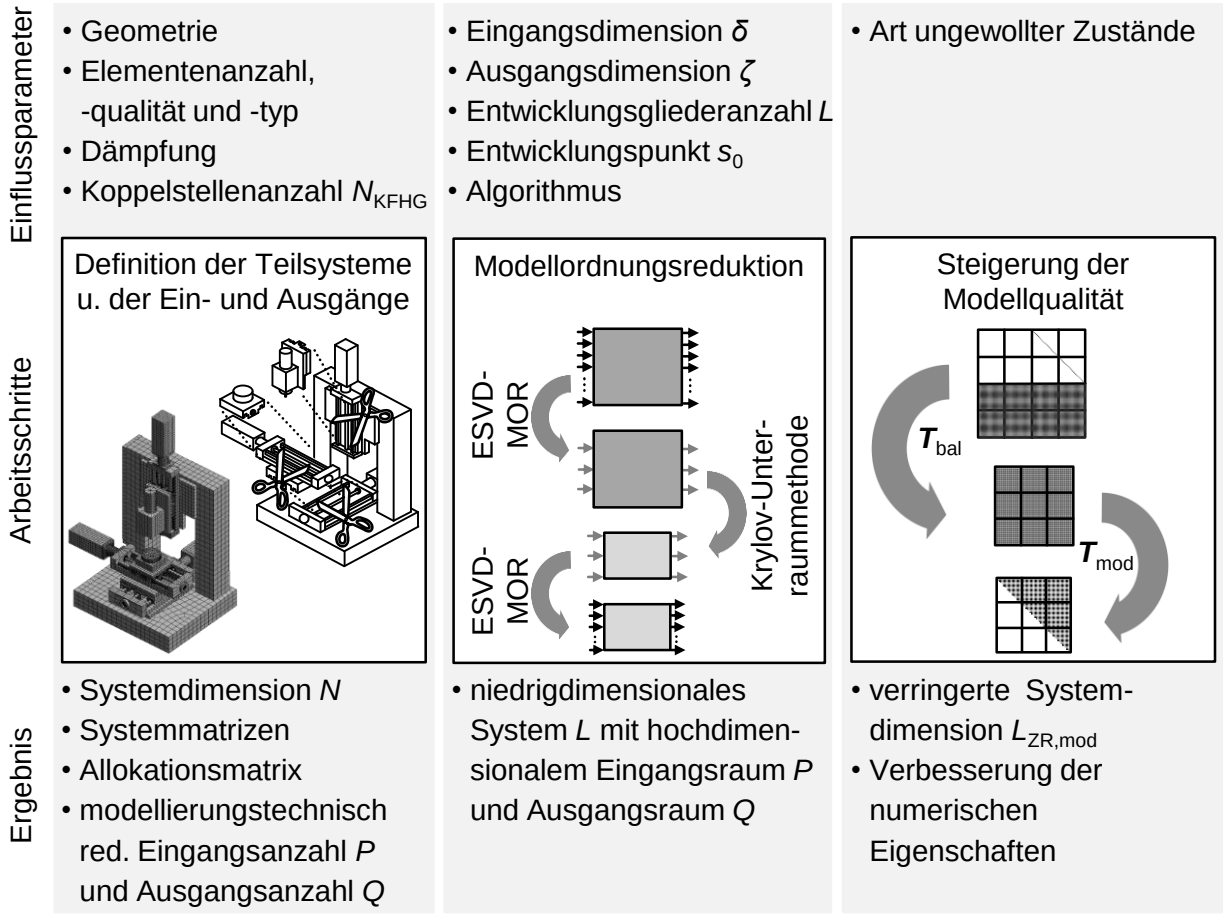


Bild 7-1: Arbeitsschritte zum Erreichen niedrigdimensionaler Ersatzmodelle

7.2 Modellierung und Anforderung an das Finite-Elemente-Modell

Die zu reduzierenden FE-Modelle benötigen für eine effiziente Reduktion eine minimale Änderung des Modells. Bei der Vernetzung der Geometrie sollten möglichst Elementtypen verwendet werden, die keine Elementmittelknoten aufweisen, um numerische Probleme beim Reduktionsvorgang selbst zu umgehen. Diese Einschränkung ist zulässig, da mit dem reduzierten Modell keine Spannungsaussagen getroffen werden. Die zulässige Dimension sowie die Art des Elementtyps, bspw. ob es sich um ein Solid- oder ein Shell-Element bzw. um ein Tetraeder- oder ein Hexaeder-Element handelt, haben keinen Einfluss auf den Reduktionsvorgang. Auch die Verwendung von Punktmassen beeinflusst diesen Reduktionsvorgang nicht.

Die Geometrie des FE-Modells muss eine Trennung der beweglichen Komponenten zulassen. Typische Maschinenelemente, an denen die Trennung durchgeführt wird, sind die Koppel- und Schnittstellen der Schienenführungssysteme und der Kugelgewindeantriebsysteme, wie es in Unterkapitel 2.3.3 dargestellt ist. An den angrenzenden Flächen dieser Systeme lassen sich durch eine geschickte Anwendung von externen Punkten die spätere Eingangsanzahl P und Ausgangsanzahl Q reduzieren, wie es in Unterkapitel 6.2.1 beschrieben wird. Der Abstand dieser Koppelstellen sollte äquidistant sein. Die Koppelknotenanzahl wird so gewählt, dass bei der Bewegungssimulation immer mindestens sechs Knoten im Eingriff sind, wie ausführlich in Unterkapitel 6.3.4 dargestellt. Zwischen den externen Punkten bzw. zwischen den Koppelelementflächen können die FE-Systeme durch MPC-Elementen oder Feder-Dämpfer-Elementen miteinander verbunden werden, wie es Bild 2-5 visualisiert. Die zur Verknüpfung genutzten Ersatzsteifigkeiten und -dämpfungen werden für die spätere Kopplung der niedrigdimensionalen Systeme ebenfalls benötigt.

Die Dämpfung ϑ des FE-Modells kann mittels Bequemlichkeitshypothese nach Gleichung 2-2 modelliert werden. Überdies lässt sich die Dämpfung ϑ mit annähernd konstanter Dämpfung nach Gleichung 2-4 oder mit diskreten Dämpferelementen erstellen. Die letzten beiden Modellierungsvarianten schränken die Auswahl der möglichen Reduktionsalgorithmen ein. Werden derartige Dämpfungsmodellierungen verwendet, ist deshalb darauf zu achten, dass sich die Reduktionsalgorithmen für Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung eignen sind und dass die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{E}$ beim Reduktionsvorgang berücksichtigt wird. Ein zweckmäßiger Reduktionsalgorithmus ist der Block-Arnoldi-Algorithmus, der in Bild 5-4 beschrieben wird.

Es existieren mehrere Möglichkeiten, die Systemmatrizen aus dem Programm ANSYS zu erhalten. Eine Möglichkeit ist das Abspeichern der binären Full-Dateien mit dem ANSYS-Befehl „wrfull“. Diese Dateien enthalten neben den Systemmatrizen auch die Lastvektoren, die Allokationsmatrix sowie die Rand- und Zwangsbedingungen. Eine andere, speicherintensivere Methode ist das Herausschreiben der Full-Dateien in eine bearbeitbare Textdatei mit dem ANSYS-Befehl „/aux2“. Im Gegensatz zur erstgenannten Methode können die hieraus resultierenden Dateien auch problemlos von anderen Programmen genutzt werden. Zusätzlich bietet ANSYS das Herausschreiben der Systemmatrizen als Harwell-Boing-Format an. Dieses Format ist ebenfalls für andere Software weiter verwendbar. Allerdings wird bei dieser Methode die Freiheitsgradzuordnung nicht mitgeliefert. Die Freiheitsgradsortierung kann bspw. aus der Allokationsmatrix oder aus einer Knotentabelle entnommen werden. Erst damit ist eine eindeutige Zuordnung der Ein- und Ausgänge des Systems gewährleistet.

7.3 Parameter und Einstellung der Reduktionsalgorithmen

Die Approximationsqualität und Dimension der Ersatzmodelle werden von den gewählten Reduktionsparametern und Algorithmen beeinflusst. Um niedrigdimensionale Ersatzsysteme mit hochdimensionalen Ein- und Ausgangsräumen zu erstellen, wird die Modellordnungsreduktionsstrategie des ESVDMOR-Verfahrens kombiniert mit der Krylov-Unterraummethode durchgeführt.

Im ersten Schritt wird hierbei die Anzahl der Ein- und Ausgänge mit dem singulärwertzerlegungsbasierten ESVDMOR-Verfahren aus Unterkapitel 5.4.2 reduziert. Eine geeignete Ein- und Ausgangsanzahl liefert der Verlauf der Singulärwerte σ_{SVD} aus den Ein- und Ausgangsmomentenmatrizen $\boldsymbol{m}_E$ und $\boldsymbol{m}_A$, wie es exemplarisch in Bild 5-20 gezeigt wird. Zur Identifizierung kann die Definition einer Schranke oder eines Gradienten genutzt werden.

Im zweiten Schritt wird dann die Dimension N mit der Krylov-Unterraummethode reduziert. Für diesen Reduktionsschritt lässt sich die kommerzielle Software MOR for ANSYS verwenden. Faktoren, die wesentlichen Einfluss auf die Qualität des reduzierten Systems haben, sind die Entwicklungsgliederanzahl L, der Entwicklungspunkt s_0, die Dämpfungsmodellierung und der Reduktionsalgorithmus. Geeignete Reduktionsalgorithmen sind die Verfahren für Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung. Ein solcher Reduktionsalgorithmus ist der Block-Arnoldi-Algorithmus aus Bild 5-4. Die Dämpfungsmodellierung wird in der Regel durch das FE-Modell vorgegeben. Mit dem angepassten RK-ICOP-Algorithmus aus Bild 5-14 kann ein geeigneter Entwicklungspunkt s_0 ermittelt werden. Das Verhalten des reduzierten Systems, dass in Abhängigkeit vom Entwicklungspunkt $s_0 = 0\ s^{-1}$ erstellt wurde, entspricht dem Referenzmodell im stationären Fall. Für kleine Entwicklungspunktwerte ist das Modell im niedrigen Frequenzbereich häufig genauer. Bei großen Entwicklungspunktwerten stellt das niedrigdimensionale System vielfach eine gute Approximation im hohen Frequenzbereich dar. Die Identifizierung einer geeigneten Dimension L des reduzierten Systems ist dagegen aufwendiger, da keine numerischen, effizient berechenbaren Fehlerabschätzungen existieren. Für den Fall, dass die Übertragungsfunktion $\boldsymbol{H}_P$ des Referenzsystems vorliegt, eignet sich die frequenzabhängige, absolute Abweichung $\boldsymbol{\varepsilon}_{abs}$ aus Gleichung 5-13 zur Ermittlung einer geeigneten Dimension L. Ist aber keine Übertragungsfunktion des Referenzsystems vorhanden, muss der Verlauf der Spektralnorm des Momentenvektors $\boldsymbol{v}$ verwendet werden, wie in Bild 5-24 dargestellt. Diese Herangehensweise setzt jedoch langjährige Erfahrung des Modellordnungsreduktionsbenutzers voraus, da dieses Kriterium keine Garantie für eine geeignete Dimension L bietet.

Anschließend werden im dritten Schritt die hochdimensionalen Ein- und Ausgangsmatrizen durch eine Rücktransformation der niedrigdimensionalen Ein- und Ausgangsmatrizen wiederhergestellt. Die Transformationsmatrizen liefert das ESVDMOR-Verfahren, wie es in Gleichung 5-42 gezeigt ist.

Sollte das ESVDMOR-Verfahren aufgrund der hohen Dimension des Referenzsystems numerisch nicht durchführbar sein, ist eine Reduktion dieser Systemdimension mittels Krylov-Unterraummethode vor dem ersten Schritt zielführend. Dieses Vorgehen wird in Unterkapitel 5.4.2 beschrieben.

7.4 Verringerung der Rechenzeiten und Steigerung der numerischen Effizienz

Zur Verringerung der Berechnungsressourcen und -zeiten bei der Herstellung niedrigdimensionaler Ersatzsysteme bieten sich Permutationsalgorithmen zur Minimierung der Bandbreite an. Mit dem Symmetric-Sparse-Reverse-Cuthill-McKee-Ordering-Algorithmus werden die Bandbreite B_W und die Kompaktheit der Systemmatrizen verbessert, wie in Unterkapitel 5.3.5 beschrieben. Durch eine vorherige Sortierung der Matrizen mit diesem Algorithmus reduziert sich der numerische Aufwand zur Erzeugung der Krylov-Basen $\boldsymbol{v}$ bei der Krylov-Unterraummethode oder die Singulärwertzerlegung beim ESVDMOR-Verfahren. Eine weitere Verkürzung der Berechnungsressourcen und -zeiten bei den singulärwertzerlegungsbasierten Verfahren wird durch die Verwendung der Alternating direction implicit(ADI)-Methode erreicht. Zur praktischen Anwendung dieser Methode empfiehlt sich beispielsweise die Matrix Equation Sparse Solver(MESS)-Bibliothek.

Nach der Anwendung der Krylov-Unterraummethode können Systeme entstehen, die nicht A-stabil sind, obwohl das Referenzsystem physikalisch stabil ist. Die Ursache für diese Instabilität liegt in den Eigenwerten λ der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR}$ auf der rechten komplexen Zahlenebene. Solche instabilen Systeme lassen sich durch Entfernen dieser instabilen Zustände mit der Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{T}_{mod}$ stabilisieren, zum Beispiel mit der MATLAB-Funktion „stabsep“. Diese Funktion hat zudem den positiven Nebeneffekt, dass die Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}_{ZR}$ nach ihrer Anwendung in einer numerisch günstigeren oberen Dreiecksmatrix sortiert ist.

Die Dimension L der reduzierten Systeme, die mittels Krylov-Unterraummethode erstellt wurden, kann durch eine nachfolgende singulärwertzerlegungsbasierte Modellordnungsreduktion nochmals verringert werden. Durch das Entfernen der nichtgewünschten Zustände mittels Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{T}_{bal}$ wird die Dimension auf $L_{ZR,mod}$ reduziert. Bei dieser Reduktionsmethode handelt es sich um das balancierte Abschneiden, mit dem die doppelten sowie nicht beobachtbaren und nicht steuerbaren Zustände entfernt werden.

Die Praxis hat gezeigt, dass die Reihenfolge der Ähnlichkeitstransformationen die numerischen Eigenschaften des Modells beeinflusst. Im Gegensatz zu anderen Transformationsreihenfolge sind die numerischen Eigenschaften, charakterisiert durch die Konditionszahl K_Z und die Spektralnorm N_2, besser, wenn zuerst die Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{T}_{bal}$ zur Entfernung nicht gewünschter Zustände und danach die Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{T}_{mod}$ zur Entfernung instabiler Zustände angewendet werden.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Für die Optimierung der Werkzeugmaschine ist die gesamte mechatronische Kette zu berücksichtigen. Diese beinhaltet neben der Strukturmechanik auch die elektrischen Antriebe inklusive Regler sowie die Informationstechnik. Ohne eine geeignete Simulationsmethodik ist die ganzheitliche Betrachtung der Werkzeugmaschine nicht effizient möglich. In der klassischen Finite-Elemente-Analyse wird der Einfluss der Antriebe und der Regelung auf die mechanische Struktur bisher nur bedingt berücksichtigt. Auch die positionsabhängigen Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsverteilungen sowie die Lastverteilung werden in der FE-Berechnung nicht einkalkuliert. Insbesondere die Berücksichtigung von Verfahrbewegungen inklusive der elastischen Struktureigenschaften ist nur mit hohem Aufwand möglich. Daher wurde ein Verfahren entwickelt, mit dem eine mechatronische Simulation unter Berücksichtigung der komplexen Strukturdynamik und der Achsstellungen umsetzbar ist.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Analyse der positionsabhängigen, dynamischen Eigenschaften einer Werkzeugmaschine, die sich relativ zueinander bewegende Komponenten aufweist. In Kapitel 4 wurde die positionsabhängige, dynamische Eigenschaft der Mikrofräsmaschine messtechnisch nachgewiesen. Die Relativbewegungen der Maschinenachsen führen zu strukturellen Veränderungen der gesamten Maschine und zu damit einhergehenden veränderten Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsverteilungen. Gleichermaßen ändert sich auch die Position der Krafteinleitung, wenn sie auf der zu bewegenden Achse liegt. Experimentell wurde gezeigt, wie sich einige Amplitudenfrequenzspitzen in Abhängigkeit von der Achsposition ändern. Diese Eigenschaft konnte mit einem FE-Modell für bestimmte Achskonstellationen nachgebildet werden. Durch Model-Updating wurde das FE-Modell an die experimentellen Daten angepasst. Es wird als Repräsentant von Modellen betrachtet, die in der Entwicklung anzutreffen sind.

In der Werkzeugmaschinenentwicklung besteht ein großes Interesse daran, sowohl die positionsabhängigen strukturellen Veränderungen als auch die dynamischen Eigenschaften der gesamten Maschine zu berücksichtigen. Dazu werden die einzelnen reduzierten und linearelastischen Komponenten in einer CACE-Umgebung integriert, um dann eine Simulation im Zeitbereich durchzuführen. Die Systeme werden mittels moderner Modellordnungsreduktionsverfahren aus hochdimensionalen FE-Modellen reduziert. Ein weiteres Forschungsinteresse dieser Arbeit besteht in der effizienten Erzeugung von genauen, niedrigdimensionalen Modellen mit hoher Ein- und Ausgangsdimension, die für die Simulation von Verfahrbewegungen benötigt werden.

Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren, wie die Krylov-Unterraummethode, sind effiziente Methoden zur Erzeugung niedrigdimensionaler Ersatzsysteme von diskret gewählten Punkten. Im Bereich der Werkzeugmaschine wirken die äußeren Kräfte, also Eingänge, oft nur an wenigen Knoten. Außerdem sind oftmals nur Verschiebungsinformationen an einzelnen Knotenpunkten, also Ausgängen, wie zum Beispiel dem Messsystem oder dem TCP, interessant. Für solche Fälle ist das Verfahren der Krylov-Unterraummethode besonders gut geeignet. Sobald aber eine höhere Anzahl an Ein- und Ausgangsknoten benötigt wird, ist die Krylov-Unterraummethode nicht mehr effizient. Daher muss eine vorherige Reduktion der Ein- und Ausgangsfreiheitsgrade erfolgen, um dennoch effiziente Modelle zu erhalten. Dies wird mit

dem singulärwertzerlegungsbasierten ESVDMOR-Verfahren realisiert. Durch diese Kombination der beiden Reduktionsverfahren wird eine Methode zur Erstellung effizienter Modelle für die transiente Simulation von Werkzeugmaschinen zur Verfügung gestellt.

Mit einer anschließenden singulärwertzerlegungsbasierten Modellordnungsreduktion in Form des balancierten Abschneidens können zusätzlich ungewünschte Zustände gezielt entfernt werden. Solche Zustände sind instabile, doppelte, nicht steuerbare und nicht regelbare Zustände. Die zu entfernenden instabilen Zustände können durch die Krylov-Unterraummethode entstehen, obwohl das Referenzsystem physikalisch stabil ist. Durch das balancierte Abschneiden lässt sich die Dimension des reduzierten Systems nochmals reduzieren und die numerischen Eigenschaften verbessern.

Mit dem dargestellten Verfahren wird ein Modell für die zeiteffiziente Überprüfung und Optimierung der Maschinenkomponenten in der Entwicklung zur Verfügung gestellt. Dieses ermöglicht beispielsweise dazu, die konstruktive Gestalt von Werkzeugmaschinenkomponenten bezüglich der vorgegeben Randbedingungen auf das dynamische Verhalten zeiteffizient zu überprüfen. Aber auch in anderen Entwicklungsphasen ist der Einsatz von reduzierten Modellen vorteilhaft. Beispiele dafür sind die zeiteffektive Analyse der Auswirkungen von Steuerungseigenschaften und -funktionen auf das Bewegungsverhalten. Außerdem bieten sich zeitnahe und ressourceneffiziente Tests von Bewegungsprogrammen zur Ermittlung der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrenzen bei kritischen Konturbereichen an. Überdies können diese reduzierten Systeme in der modellbasierten Vorsteuerung verwendet werden. In vielen Anwendungen zur gezielten Beeinflussung des Führungsverhaltens einer Folgeregelung erhöhen die reduzierten Modelle den Vorsteuerungsentwurf in ihrer Genauigkeit, da die reduzierten Systeme häufig eine hohe Präzision aufweisen. Ferner können sie zur Überwachung und für die Kompensation definierter Zustände der Maschine verwendet werden. Derzeit werden reduzierte Modelle für die Echtzeit-Kompensation von dynamischen oder thermischen Verlagerungen eingesetzt.

Diese Arbeit zeigt, dass durch eine hybride Reduktionsstrategie genaue niedrigdimensionale Systeme mit hoher Ein- und Ausgangsanzahl hergestellt werden können. Die Approximationsqualität hängt hierbei von den Reduktionsparametern ab. Bis auf die Bestimmung einer geeigneten Entwicklungsgliederanzahl, mit denen die Krylov-Basen erstellt werden, konnten Verfahren entwickelt werden, die geeignete Reduktionsparameter zur Verfügung stellen. Um diesen Prozess zu optimieren, wird eine automatisierte und anwendungsangepasste Modellordnungsreduktionsmethode benötigt. Mit dieser noch zu entwickelnden neuartigen Methode soll unter Beibehaltung inhärenter Systemeigenschaften, wie beispielsweise Stabilität und stationäre Genauigkeit, und für eine festgelegte Zeitschrittweite eine niedrigdimensionale Approximation des Referenzmodells mit zugehöriger Fehlerabschätzung geliefert werden. Die Fehlerabschätzung liefert ein Abbruchkriterium, wodurch eine automatisierte Modellreduktion ermöglicht wird. Mit diesem Modellordnungsreduktionsverfahren könnte die Entwicklung beschleunigt und die Leistungsfähigkeit der Werkzeugmaschinen erhöht werden.

9 Literaturverzeichnis

ALB95 Albertz, F.: *Dynamikgerechter Entwurf von Werkzeugmaschinen-Gestellstrukturen*. Berichte aus dem Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität München. Hrsg.: Reinhart, G.; Milberg, J. Berlin u. a.: Springer, 1995.

ALT05 Altintas, Y.; Brecher, C.; Weck, M.; Witt, S.: *Virtual Machine Tool*. In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 54 (2005) 1, S. 115 - 138.

ANT05 Antoulas, A. C.: *Approximation of large-scale dynamical systems*. Philadelphia: Society for Industrial Applied Mathematics, 2005.

BÄN12 Bänninger, U.: *Mechanische Simulation an Werkzeugmaschinen*. In: CADFEM Users Meeting & ANSYS Conference Proceedings, Kassel: 24. - 26.10.2012.

BAI05 Bai, Z.; Su, Y.: *Dimension reduction of large-scale second-order dynamical systems via a second-order Arnoldi Method*. In: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 26 (2005) 5, S. 1692 - 1709.

BAU03 Baudisch, T.: *Simulationsumgebung zur Auslegung der Bewegungsdynamik des mechatronischen Systems Werkzeugmaschine*. Forschungsbericht iwb. Band 179. Hrsg.: Zäh, M.; Reinhart, G. München: Herbert Utz, 2003.

BEC07 Bechtold, T.; Rudnyi, E. B.; Korvink, J. G.: *Fast Simulation of Electro-Thermal MEMS - Efficient Dynamic Compact Models*. Berlin u. a.: Springer, 2007.

BEN05 Benner, P.; Mehrmann, V.; Sorensen, D. C.: *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*. Berlin u. a.: Springer, 2005.

BEN09 Benner, P.; Bonin, T.; Faßbender, H.; Saak, J.; Soppa, J.; Zäh, M. F.: *Novel Model Reduction Techniques for Control of Machine Tools*. In: CADFEM Users Meeting & ANSYS Conference Proceedings, Leipzig 18. - 20.11.2009.

BEN10a Benner, P.; Schneider, A.: *Model Order and Terminal Reduction Approaches via Matrix Decomposition and Low Rank Approximation*. In: Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2008, Hrsg.: Roos, J.; Costa, L. R. J. Berlin u. a.: Springer, 2010, S. 523 - 530.

BEN10b Benner, P.; Schneider, A.: *Balanced Truncation Model Order Reduction for LTI Systems with many Inputs or Outputs*. In: Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Network and Systems - MTNS, Budapest: 5. - 9. 6. 2010.

BEN11 Benner, P.; Saak, J.: *Efficient balancing-based MOR for large-scale second-order systems*. In: Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems 17 (2011) 2, S. 123 - 143.

BEN13 Benner, P.; Lang, N.; Saak, J.: *Modeling structural variability in reduced order models of machine tool assembly groups via parametric MOR*. In: PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 13 (2013) 1, S. 481 - 482.

BER03 Berkemer, J.: *Gekoppelte Simulation von Maschinendynamik und Antriebsregelung unter Verwendung linearer Finite-Elemente-Modelle*. Berichte aus dem Institut für Statik und Dynamik der Luft und Raumfahrkonstruktion. Band 39. Hrsg.: Kröplin, B. Stuttgart: Eigenverlag, 2003.

BON11 Bonin, T.; Soppa, A.; Saak, J.; Zäh, M.; Faßbender, H.; Benner, P.: *Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren für Finite-Elemente-Modelle zur Simulation von Werkzeugmaschinen*. In: Tagungsband der VDI-Fachtagung Mechatronik 2011, Hrsg.: Bertram, T.; Corves, B. Dresden: TU Dresden, S. 333 - 338.

BRE02 Brecher, C.; Denkena, B.; Giesler, M.; Gölzer, P.; Hamann, J.; Kelichhaus, T.; Prier, M.; Prust, D.; Reinhart, G.; Queins, M.; Weck, M.: *Effiziente Entwicklung von Werkzeugmaschinen - Mit virtuellen Prototypen direkt zum marktfähigen Produkt*. In: AWK Tagungsband Aachener Werkzeugmaschinen Kolloquium, Hrsg.: Wettbewerbsfaktor Produktionstechnik - Aachener Perspektiven Aachen: Shaker, 2002, S. 157 - 190.

BRE06 Brecher, C.; Witt, S.: *Interaktive Analyse des strukturmechanischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen - Automatisierte Analysemethoden erlauben die Beurteilung positionsabhängiger Maschineneigenschaften*. In: wt Werkstattstechnik online 96 (2006) 7 - 8, S. 502 - 508.

BRE08 Brecher, C.; Witt, S.: *Ganzheitliche Simulation und Optimierung von Werkzeugmaschinen für die Hochleistungszerspanung*. In: Spanende Fertigung - Prozesse Innovation Werkstoffe. 5. Aufl., Hrsg.: Biermann, D.; Weinert, K. Essen: Vulkan, 2008, S. 300 - 310.

BUS12 Busch, M.: *Zur effizienten Kopplung von Simulationsprogrammen*. Kassel: Universität Kassel, Diss, Kassel: kassel university press, 2012.

CAI02 Cai, C.; Zheng, H.; Khan, M. S.; Hung, K. C.: *Modeling of Material Damping Properties in ANSYS*. In: CADFEM Users Meeting & ANSYS Conference Proceedings, Friedrichshafen, 9 - 11.11.2002.

CHR03 Christoph, F.: *Durchgängige simulationsgestützte Planung von Fertigungseinrichtungen in der Elektronikproduktion*. Bamberg: Meisenbach, 2003.

CRA68 Craig, R. R.; Bampton M. C. C.: *Coupling of Substructures for Dynamic Analysis*. In: AIAA Journal 6 (1968) 7, S. 1313 - 1319.

CUT69 Cuthill, E.; McKee, J.: *Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices.* In: ACM‘ Proceedings of the 24th National Conference, 1969, S. 157 - 172.

CZI08 Czichos, H.; Hennecke, M.: *Hütte, Das Ingenieurwissen*. Berlin u. a.: Springer, 2008.

DAD10a Dadalau, A.; Mottahedi, M; Groh, K.; Verl, A.: *Parametric modeling of ball screw spindles*. In: Production Engineering - Research and Development (2010) 4, S. 625 - 631.

DAD10b Dadalau, A.; Verl, A.: *Automatische Generierung von MPC-Kontakt anhand der Kontaktknoten zwischen FE-Baugruppen*. In: ZWF Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 105 (2010) 6, S. 589 - 593.

DAD12 Dadalau, A.; Verl, A.: *Modeling linear guide systems with CoFEM: experimental validation*. In: Production Engineering - Research and Development 6 (2012), S. 259 - 265.

DOY92 Doyle, J.C.; Francis, B.; Tannembaum, A.: *Feedback Control Theory*. Maxwell: Macmillian, 1992.

DIN230-1 DIN ISO 230-1, Teil 1, (07.1999) *Prüfregeln für Werkzeugmaschinen; Teil 1: Geometrische Genauigkeit von Maschinen, die ohne Last oder unter Schlichtbedingungen arbeiten*. Berlin: Beuth.

DIN230-2 DIN ISO 230-2, Teil 2, (05.2000) *Prüfregeln für Werkzeugmaschinen; Teil 2: Bestimmung der Positionierunsicherheit und der Wiederholpräzision der Positionierung von numerisch gesteuerten Achsen*. Berlin: Beuth.

DIN230-4 DIN ISO 230-4, Teil 4, (05.2001) *Prüfregeln für Werkzeugmaschinen; Teil 4: Kreisformprüfung für numerisch gesteuerte Werkzeugmaschinen*. Berlin: Beuth.

DIN1311-1 DIN 1311-1, Teil 1, (02.2000) *Schwingungen und schwingfähige Systeme; Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung*. Berlin: Beuth.

DIN1311-2 DIN 1311-2, Teil 2, (08.2002) *Schwingungen und schwingfähige Systeme; Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad*. Berlin: Beuth.

DIN3408 DIN ISO 3408-4, Teil 4, (04.2011) *Kugelgewindetriebe; Teil 4: Statische axiale Steifigkeit*. Berlin: Beuth.

DIN69051 DIN 69051, Teil 6, (04.1998) *Werkzeugmaschinen - Kugelgewindetriebe; Teil 6: Berechnung der statischen Steifigkeit*. Berlin: Beuth.

DIN8373 DIN EN ISO 8373, (04.2011) *Roboter und Robotikgeräte - Wörterbuch*. Berlin Beuth.

DRO04 Dronka, S.: *Die Simulation gekoppelter Mehrkörper- und Hydraulik-Modelle mit Erweiterungen für Echtzeitsimulation*. Berichte aus der Fahrzeugtechnik. Aachen: Shaker, 2004.

EIB90 Eibelshäuser, P.: *Rechnerunterstützte experimentelle Modalanalyse mittels gestufter Sinusanregung*. Forschungsbericht iwb. Band 26. Hrsg.: Milberg, J. Berlin u. a.: Springer, 1990.

EID09 Eid, R.: *Time Domain Model Reduction by Moment Matching*. München: Technische Universität München, Diss, München: Verlag Dr. Hut, 2009.

ESS13 Eßmann, J.: *Kompensation der Verlagerung an nachgiebigen Werkzeugmaschinengestellen am Beispiel von Fräsmaschinen für die Mikrobearbeitung.* Berichte aus dem Produktionstechnischen Zentrum Berlin. Hrsg.: Uhlmann, E. Stuttgart: Fraunhofer IRB, 2013.

EWI84 Ewins, D. J.: *Modal Testing: Theory and Practice*. New York u. a.: John Wiley & Sons Inc., 1984.

FAS11 Faßbender, H.; Soppa, A.: *Machine tool simulation based on reduced order FE models*. In: Mathematics and Computers in Simulation 82 (2011), S. 404 - 413.

FEH11 Fehr, J.: *Automated and Error Controlled Model Reduction in Elastic Multibody Systems*. Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart. Hrsg.: Eberhard, P. Aachen: Shaker, 2011.

FEL04 Feldmann, P: *Model order reduction techniques for linear systems with large numbers of terminals*. In: Proceedings of the European Design and Test Conference (DATE), 2004, S. 944 - 947.

FIN77 Finke, R.: *Berechnung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen*. Aachen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Diss, 1977.

FRE12 Frey, S.; Dadalau, A.; Verl, A.: *Expedient modeling of ball screw feed drives*. In: Production Engineering - Research and Development 6 (2012), S. 205 - 211.

FRI11 Friedrich, M*.: Parallel Co-Simulation for Mechatronic Systems*. München: Technische Universität München, Diss, 2011, URL: http://media-tum.ub.tum.de/node? id=1063436 (Zugriff: 2012-04-14).

FON00 Fonseca, P.: *Simulation and optimisation of the dynamic behaviour of mechatronic systems*. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, Diss, 2000.

GAS12 Gasch, R.; Knothe, K.; Liebich, R.: *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua.* 2. Auflage, Berlin u. a.: Springer, 2012.

GAW04 Gawronski, W.K.: *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures.* New York u. a.: Springer, 2004.

GEB11 Gebhard, P.: *Dynamisches Verhalten von Werkzeugmaschinen bei Anwendung für das Rührreibschweißen*. Forschungsbericht iwb. Band 253. Hrsg.: Zäh, M. München: Herbert Utz, 2011.

GEI06 Geimer, M.; Krüger, T.; Linsel, P.: *Co-Simulation, gekoppelte Simulation oder Simulatorkopplung? Ein Versuch der Begriffsvereinheitlichung*. In: O+P Zeitschrift für Fluidtechnik - Aktorik, Steuerelektronik und Sensorik 50 (2006), S. 572 - 576.

GEK06 Gekeler, E. W.: *Mathematische Methoden zur Mechanik*. Berlin: Springer, 2006.

GIL92 Gilbert, J. R.; Moler, C.; Schreiber, R.: *Sparse Matrices in MATLAB: Design And Implementation*. In: SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 13 (1992) 1, S. 333 - 356.

GRI97 Grimme, E. J.: *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. Dep. of Electrica Eng.; Uni Illinois at Urbana Champaign, PhD thesis, 1997: URL: perso.uclouvain.be/paul.vandooren/ThesisGrimme.pdf (Zugriff: 2011-03-11).

GRO04 Großmann, K.; Rudolph, H.: *Dynamische Strukturanalyse und Simulation an Werkzeugmaschinen mit dem Balkenmodell*. In: ZWF Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 99 (2004) 7 - 8, S. 390 - 397.

GRO06a Großmann, K.; Neidhardt, L.: *FEM-gestützte Analyse von Profilschienen-Führungssystemen – Teil 1: Technologien und Beispiele zur Untersuchung von Profilschienenführungen und geführten Bauteilen*. In: ZWF Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 101 (2006) 9, S. 517 - 521.

GRO06b Großmann, K.: Neidhardt, L.: *FEM-gestützte Analyse von Profilschienen-Führungssystemen – Teil 2: Technologien und Beispiele zur Untersuchung von Profilschienenführungen.* In: ZWF Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 101 (2006) 10, S. 574 - 578.

GRO09 Großmann, K.; Rudolph, H.: *Die virtuelle Werkzeugmaschine in einer Simulationsumgebung - Prozessgerecht bewegte Baugruppen in der Simulation der Werkzeugmaschinen-Dynamik*. In: ZWF Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 104 (2009) 9, S. 693 - 697.

GUG08 Gugercin, S.: *An iterative SVD-Krylov based method for model reduction of large-scale dynamical systems.* In: Linear Algebra and its Applications 428 (2008) 8 - 9, S. 1964 - 1986.

GUY65 Guyan, R. J.: *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*. In: AIAA Journal 3 (1965) 2, S. 380.

HAG84 Hager, W.: *Condition Estimates*. In: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 5 (1984) 2, S. 311 - 316.

HIG00 Higham, N. J; Tisseur, F.: *A Block Algorithm for Matrix 1-Norm Estimation with an Application to 1-Norm Pseudospectra*. In: SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 21 (2000) 4, S. 1185 - 1201.

HIR05 Hiramoto, K.; Hansel, A.; Ding, S.; Yamazaki, K.: *A Study on the Drive at Center of Gravity (DCG) Feed Principle and Its Application for Development of High Performance Machine Tool Systems.* In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 54 (2005) 01, S. 333 - 336.

HOF05 Hoffmann, F.; Brecher, C.: *Simulation von Verfahroperationen - Verfahrbare flexible Mehrkörpermodelle von Werkzeugmaschinen*. In: wt Werkstattstechnik online 95 (2005) 7 - 8, S. 506 - 512.

HOF08 Hoffmann, F.: *Optimierung der dynamischen Bahngenauigkeit von Werkzeugmaschinen mit der Mehrkörpersimulation*. Ergebnisse aus der Produktionstechnik. Hrsg.: Brecher, C. Aachen: Apprimus, 2008.

HOH11 Hoher, S.; Röck, S.: *A Contribution to the Real-time Simulation of Coupled Finite Element Models of Machine Tools - a Numerical Comparison*. In: Journal of Simulation Modelling Practice and Theory 19 (2011), S. 1627 - 1639.

ISP97 Ispaylar, M. H.: *Betriebseigenschaften von Profilschienen-Wälzführungen*. Aachen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Diss, 1997.

JÖN05 Jönnson, A.; Wall, J.; Broman, G.: *A virtual machine concept for real-time simulation of machine tool dynamics*. In: International Journal of machine tools and manufacture 45 (2005), S. 795 - 801.

KNO09 Knorr, M.: *Integration von Direktantrieben in Werkzeugmaschinen*. In: Tagungsband zum 14. Dresdner Werkzeugmaschinen-Fachseminar „Lineardirektantriebe in Werkzeugmaschinen“ der DWM e. V. Dresdner Freundeskreis der Werkzeugmaschinen- und Steuerungstechnik, Dresden, 3. - 4.12.2009.

KRA93 Krämer, E.: *Dynamics of rotors an foundation*, Berlin u. a.: Springer, 1993

KRE12 Krenek, K.: *Modellordnungsreduktion großer Systeme unter rotordynamischen Einfluss*. München, Technische Universität München, Diss, München: Verlag Dr. Hut, 2012.

KIP09 Kipfmüller, M.: *Aufwandsoptimierte Simulation von Werkzeugmaschinen*. Forschungsberichte aus dem wbk Institut für Produktionstechnik Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Band 153, Hrsg.: Fleischer et al. Aachen: Shaker, 2009.

KOU13 Koutsovasilis, P.: *Improved component mode synthesis and variants*. In: Multibody System Dynamics 29 (2013) 4, S. 343 - 359.

KÜB00 Kübler, R.; Schiehlen, W.: *Two methods of simulator coupling. In: Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 6 (2000) 2, S. 93 - 113.

KUN13 Kunc, M.: *Identifikation und Modellierung von nichtlinearen Dämpfungseffekten in Vorschubachsen für Werkzeugmaschinen*. Ergebnisse aus der Produktionstechnik. Hrsg. Klocke et al. Aachen: Apprimus, 2013.

LAU87 Laub, A. J.; Heath, M. T.; Paige, C. C.; Ward, R. C.: *Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms*. In: IEEE Transactions on Automatic Control 32 (1987) 2, S. 115 - 122.

LEH07 Lehner, M.: *Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen*. Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart. Hrsg.: Eberhard, P. Aachen: Shaker, 2007.

LIE07 Lienemann, J.: *Complexity reduction techniques for advanced MEMS actuators simulations*. Freiburg: Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Diss, 2007. URL: http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/2897/ (Zugriff: 2011-04-05).

LIU06 Liu, P.; Tan, S. X. D.; Yan, B.; McGaughy, B.: *An extended SVD-based terminal and model order reduction algorithm*. In: Proceedings of the IEEE International Behavioral Modeling and Simulation Workshop (2006), S. 44 - 49.

LIU08 Liu, P.; Tan, S. X. D.; Yan, B.; McGaughy, B.: *An efficient terminal and model order reduction algorithm*. In: Integration, the VLSI Journal 41 (2008) 2, S. 210 - 218.

LOH04 Lohamm, B.; Salimbahrami, B.: *Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden*. In: at - Automatisierungstechnik 52 (2004) 1, S. 30 - 38.

LUN05 Lunze, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Berlin u. a.: Springer, 2006.

MAG10 Maglie, P.; Carbini, R .; Weikert, S.; Wegener, K.: *Efficient mechatronic evaluation of machine tool designs using model reduction*. In: 12th Mechatronics Forum Biennial International Conference, Zürich, 28.-30.06.2010. S. 285 - 292.

MAG12 Maglie, P.: *Parallelization of Design and Simulation: Virtual Machine Tools in Real Product Development*. Zürcher Schriften zur Produktionstechnik - IWF - Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung. Hrsg.: Fortschritt-Berichte VDI. Reihe 2, Fertigungstechnik Nr. 683, 2012.

MEA08 Meister, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. Wiesbaden: Vieweg, 2008.

MEI08 Meidlinger, R.: *Einfluss der Aufstellung auf das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen*. Berichte aus der Produktionstechnik. Hrsg.: Eversheim, W. et al. Aachen: Shaker, 2008.

MEI67 Meier, L.; Luenberger, D. G.: *Approximation of linear constant systems*. In: IEEE Transaction on Automatic Control 12 (1967) 5, S. 585 - 588.

MOO81 Moore, B.: *Principal component analysis in linear systems*: *Controllability, and observability, and model reduction*. In: IEEE Transacton on Automatic Control 26 (1981) 1, S. 17 - 32.

NEB98 Nebeling, P. H.: *Abgleich der dynamischen Eigenschaften numerischer Modelle mit realen mechanischen Strukturen*. Berichte aus der Produktionstechnik. Hrsg.: Eversheim, W. et al. Aachen: Shaker, 1998.

NEU07 Neugebauer, R.; Denkena, B.; Wegener, K.: *Mechatronic Systems for Machine*. In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 56 (2007) 2, S. 657- 686.

NEU10 Negebauer, R.; Scheffler, C.; Zwingenberger, C.; Wabner, M.: *Verbesserte Berechnung von statischen und dynamischen Steifigkeiten an Werkzeugmaschinen*. In: wt Werkstattstechnik online 100 (2010) 5, S. 345 - 361.

NEU11 Neugebauer, R. et al.: *Optimierung des Energiebedarfs der CNC-gesteuerten Bearbeitung*. In: ZWF Zeitschrift für wirtschaftlichen Fabrikbetrieb 106 (2011) 7 - 8, S. 491 - 495.

NEU12 Neugebauer, R.: *Werkzeugmaschinen - Aufbau, Funktion und Anwendung von spanenden und abtragenden Werkzeugmaschinen*, Berlin u. a.: Springer, 2012.

NOW11 Nowakowski, C.; Fehr, J.; Eberhard, P.: *Einfluss von Schnittstellenmodellierung bei der Reduktion elastischer Mehrkörpersysteme*. In: at - Automatisierungstechnik 59 (2011) 8, S. 512 - 519.

ODA98 Odabasioglu, A.; Celik, M.; Pileggi, L.: *PRIMA: Passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm*. In: IEEE Transaction on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 12 (1998) 8, S. 645 - 654.

OER08 Oertli, T.: *Strukturmechanische Berechnung und Regelungssimulation von Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Vorschubantrieben*. Forschungsbericht iwb. Band 216. Hrsg.: Zäh, M. München: Herbert Utz, 2008.

OKW09 Okwudire, C.: *Modeling and Control of High Speed Tool Feed Drives*. Columbia, Kanada, PhD Thesis, 2009. ULR: https://circle.ubc.ca/handle/2429/12551 (Zugriff: 2013-03-22).

OPH86 Ophey, L.: *Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften vorgespannter Schrägkugellager*. VDI Fortschrittbericht Reihe 1, Band 138, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1986.

PAN09 Panzer, H.: *Entwicklung eines vollautomatischen Krylov-basierten Verfahrens der Modellreduktion*. München: Diplomarbeit, 2009. URL: http://www.rt.mw.tum.de/fileadmin/w00bhf/www/publikationen/2009_Panzer_Diplomarbeit.pdf (Zugriff: 2010-10-14).

PAN13 Panzer, H.; Wolf, T.; Lohmann, B.: *H_2 and H_∞ Error Bounds for Model Order Reduction of Second Order Systems by Krylov Subspace Methods*. In: Proceedings of the European Control Conference (ECC), Zürich, 17. - 19.07.2013.

PEN55 Penrose, R.: *A generalized inverse for matrices*. In: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosphical Society 51 (1995) 3, S. 406 - 413.

PET83 Petuelli, G.: *Theoretische und experimentelle Bestimmung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften normalbelasteter Fügestellen*. Aachen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Diss, Aachen: Fotodruck J. Mainz GmbH, 1983.

PRI04 Pritschow, G.; Röck, S.: *Hardware in the Loop Simulation of Machine Tools.* In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 52 (2004) 1, S. 295 - 298.

PRI05 Pritschow, G.; Röck, S.; Rüdele, H.: *Echtzeitfähige Simulation von Werkzeugmaschinen - Anforderungen und Eigenschaften einer Hardware-in-the-Loop-Simulationsumgebung für Werkzeugmaschinen*. In: wt Werkstattstechnik online 95 (2005) 5, S. 302 - 308.

QUE05 Queins, M.: *Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen mit Hilfe flexibler Mehrkörpermodelle*. Berichte aus der Produktion. Hrsg.: Eversheim, W. et al. Aachen: Shaker, 2005.

REI07 Reinhart, G.; Wünsch, G.: *Economic application of virtual commissioning to mechatronic production systems*. In: Production Engineering 4 (2007) 1, S. 371 - 379.

RON14 Roncarati, L.: *Modellordnungsreduktion und Systemsimulation einer Werkzeugmaschine zur Echtzeit-Kompensation der thermisch induzierten Verformungen - Model order reduction and system simulation of a machine tool for real-time compensation of thermally induced deformations*, ANSYS Conference & 32. CADFEM Users` Meeting, Nürnberg, 4. - 6.06.2014.

ROS10 Rossetti, R.: *Berechnung von Werkzeugmaschinen in der ANSYS Umgebung*, ANSYS Conference & 28. CADFEM Users` Meeting, Aachen, 3. - 5.11.2010.

RUD12 Rudolph, H.: *Ein Beitrag zur Analyse der nichtlinearen Systemdynamik in der Entwurfsphase von Werkzeugmaschinen*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diss, Dresden: Technische Uni Dresden, 2012.

SAA03 Saad, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

SAL05 Salimbahrami, B.; Lohmann, B.: *Reduction of Second Order Systems using Second Order Krylov Subspace*. IFAC World Congress, Prag, 2005.

SCB09 Schweizer, B.; Busch, M.: *Numerische Ansätze zur gekoppelten Simulation*. Vortrag Fluidon Konferenz - Simulation im mechatronischen Umfeld, Aachen, 10. - 11.11.2009.

SCC00 Schneider, C.: *Strukturmechanische Berechnungen in der Werkzeugmaschinenkonstruktion*. Forschungsberichte aus dem Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften. Hrsg.: Reinhart, G. München: Herbert Utz, 2000.

SCD09 Schröder, D.: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Berlin u. a.: Springer, 2009.

SCR11 Schmidt, R. M.; Schitter, G.; Eijk, van J.: *The Design of High Performance Mechatronics - High-Tech Functionality by Multidisciplinary System Integration*. Amsterdam: IOS Press BV, 2011.

SCW09 Schweizer, W.: *MATLAB kompakt*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2009.

SEK09 Sekler, P.: *Real-Time Computation of the System Behaviour of Lightweight Machines*. First International Conference on Advances in System Simulation, Porto, Portugal, 20. - 25.09.2009.

SEK12 Sekler, P.: *Modellbasierte Berechnung der Systemeigenschaften von Maschinenstrukturen auf der Steuerung*. ISW/IPA Forschung und Praxis. Hrsg.: Verl, A. Heimsheim: Jost Jetter, 2012.

SHA03 Shabana, A. A.; Mikkola, A. M.: *Use of the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation in Modeling Slope Discontinuity*. In: Journal of Mechanical Design 125 (2003) 2, S. 342 - 350.

SHA05 Shabana, A. A.: *Dynamics of multibody systems*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2005.

SHA06 Shampine, L. F.; Gahinet, P.: *Delay-differential-algebraic equations in control theory*. In: Applied Numerical Mathematics 56 (2006) 3 - 4, S. 574 - 588.

SIE08 Siedl, D. J.: *Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen während Verfahrbewegungen*. Forschungsberichte iwb. Hrsg.: Reinhart, G. München: Herbert Utz, 2008.

SOP11 Soppa, A.: *Krylov-Unterraum basierte Modellreduktion zur Simulation von Werkzeugmaschinen*. Braunschweig, Technische Universität Carola-Wilhelmina zu Braunschweig, Diss, 2011.

SPI09 Spitzweg, M.: *Methode und Konzeption für den Einsatz eines physikalischen Modells in der Entwicklung von Produktionsanlagen*. Forschungsberichte iwb. Hrsg.: Reinhart, G. München: Herbert Utz Verlag, 2009.

SUL14 Sulitka, M.; Šindler, J.; Sušeň, J. Smolík, J.: *Application of Krylov Reduction Technique for a Machine Tool Multibody Modelling*. In: Advances in Mechanical Engineering (2014). URL: www.hindawi.com/journals/ame/2014/592628/ (Zugriff: 2014-03-04).

SUM86 Summer, H.: *Modell zur Berechnung verzweigter Antriebsstrukturen*. Forschungsberichte iwb. Band 4. Hrsg.: Milberg, J. München: Herbert Utz, 1986.

TAN07 Tan, S. X.-D.; He, L.: *Advanced Model Order Reduction Techniques in VLSI Design.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

TEU05 Teutsch, R.: *Kontaktmodelle und Strategien zur Simulation von Wälzlagern und Wälzführungen*. Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte. Hrsg.: Sauer, B.: Kaiserslautern: Technische Universität Kaiserslautern, 2005.

UHL06 Uhlmann, E.; Mense, C.: *New Structure Optimisation Procedure for Improving the Dynamic Behaviour of HPC-milling Machines*, 5th CIRP International Seminar on Intelligent Computation in Manufacturing Engineering, Ischia, Italien, 25. - 28.6.2006.

UHL12a Uhlmann, E.; Eßmann, J.; Wintering, J. H.: *Design- and control-concept for compliant machine tools bases on controller integrated models*. In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 61 (2012) 1, S. 347 - 350.

UHL12b Uhlmann, E.; Rasper, P.: *Parametrisierung von Prozess-Struktur-Modellen - Analyse von Fehlereinflüssen in der messtechnischen Parametererfassung und Modellierung*. In: wt Werkstattstechnik online 102 (2012) 5, S. 267 - 275.

UHL12c Uhlmann, E.; Jiangmin, H.: *Thermal modelling of an HSC machining centre to predict thermal error of the feed system*. In: Production Engineering - Research and Development (2012) 6, S. 603 - 610.

UNB07 Unbehauen, H.: *Regelungstechnik 2: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Wiesbaden: Vieweg, 2007.

VAJ09 Vajna, S.; Weber, C.; Bley, H.; Zeman, K.: *CAx für Ingenieure - Eine praxisbezogene Einführung*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

VAL09 Valasek, M.: *Modeling, simulation and control of mechatronical systems*. In: Simulation Techniques for Applied Dynamics, Hrsg.: Arnold, M.; Schiehlen, W. Wien u. a.: Springer, 2009, S. 75 - 140.

VIL87 Villemagne, C.; Skelton, R. E.: *Model Reduction using a Projection Formulation.* In: International Journal of Control 46 (1987), S. 2141 - 2169.

VDI2221 VDI 2221, (05.1993) *Methodik zum Entwickeln und Konstruieren technischer Systeme und Produkte*. Berlin: Beuth.

VDI3441 VDI/DGQ 3441, (03.1977) *Statistische Prüfung der Arbeits- und Positionsgenauigkeit von Werkzeugmaschinen - Grundlagen*. Berlin: Beuth.

VDI3633 VDI 3633, Teil 2, (12.1997) *Lastenheft/Pflichtenheft und Leistungsbeschreibung für die Simulationsstudie*. Berlin: Beuth.

WAB14 Wabner, M; Frieß, U.; Hofmann, S.; Hellmich, A.; Quellmalz, J.: *Optimierte Inbetriebnahme durch Simulation*. In: wt Werkstattstechnik online 104 (2014) 1 - 2, S. 97 - 99.

WAT05 Watkins, D. S.: *Fundamentals of Matrix Computations*. New York u. a.: Wiley, 2005.

WEC06 Weck, M.; Brecher, C.: *Werkzeugmaschinen - Konstruktion und Berechnung*. Berlin u. a.: Springer, 2006.

WEI00 Weikert, S.: *Beitrag zur Analyse des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen*. Zürich, Technische Wissenschaften ETH Zürich, Diss, 2000.

WEI01 Weißenberger, M.: *Optimierung der Bewegungsdynamik von Werkzeugmaschinen im rechnergestützten Entwicklungsprozess*. Forschungsberichte iwb. Hrsg.: Reinhart, G. München: Herbert Utz, 2001.

WIS06 Wissmann, J.; Sarnes, K.-D.: *Finite Elemente in der Strukturmechanik*. Berlin u. a.: Springer, 2006.

WIT07 Witt, S. T.: *Integrierte Simulation von Maschine, Werkstück und spanendem Fertigungsprozess*. Berichte aus der Produktionstechnik. Hrsg.: Eversheim, W. et al. Aachen: Shaker, 2007.

WOD04 Wodek, K. G.: *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structure*. New York: Springer, 2004.

WOL11 Wolf, T.; Panzer, H.; Lohmann, B.: *Gramian-based error bound in model reduction by Krylov-subspace methods*. In: Presented at the 18th IFAC World Congress 2011, S. 3587 - 3592.

WRI06 Wriggers, P.: *Computational Contact Mechanics*. Second Edition. Berlin u.a.: Springer, 2006.

ZAE04 Zaeh, M.; Oertli, T.: *Finite Element Modeling of Ball Screw Feed Drive Systems.* In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 53 (2004) 1, S. 289 - 294.

ZAE07 Zaeh, M.; Siedl, D.: *A New Method for Simulation of Machining Performance by Integrating Finite Element and Multi-body Simulation for Machine Tools.* In: CIRP Annals - Manufacturing Technology 56 (2007) 1, S. 383 - 386.

ZIR06 Zirn, O.; Weikert, S.: *Modellbildung und Simulation hochdynamischer Fertigungssysteme*. Heidelberg: Springer, 2006.

Berichte aus dem Produktionstechnischen Zentrum Berlin

Wissensbasierte Diagnose technischer Systeme mit konnektionistischen Modellen
Hartwig Weber. 201 Seiten, 46 Abb., 7 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4496-6

Untersuchung der Einsatzmöglichkeiten industrieller Qualitätstechniken im Dienstleistungsbereich
Alexander Gogoll. 173 Seiten, 71 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4498-2

Perforierschneiden mit Nd:YAG-Festkörper hoher Impulsenergien
Jürgen Betz. 167 Seiten, 97 Abb., 5 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4499-0

Analyse der Werkstückhaltekräfte am Dreibackenfutter im Rahmen einer Maschinen- und Prozeßüberwachung
Rolf Thiel. 130 Seiten, 69 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4495-8

Gestaltung von Entscheidungsstrukturen zur Optimierung von Produktentwicklungsprozessen
Florian Golm. 173 Seiten, 83 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4497-4

Fehlersensitive Produktgestaltung in integrierten Systemarchitekturen
Michael Stephan. 164 Seiten, 58 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4512-1

Wirtschaftliche Einführung der rechnerintegrierten Produktion in kleinen Unternehmen mit komplexer Produktionsstruktur
Wolfgang Bilger. 174 Seiten, 42 Abb., 1 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4511-3

Beitrag zur Organisation von Demontagesystemen
Claudia Hentschel. 160 Seiten, 54 Abb., 16 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4513-X

Entwicklung eines Modells für eine rechnerunterstützte Qualitätswissensbasis
Jörg-Peter Brauer. 150 Seiten, 40 Abb., 2 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4520-2

Kühlschmierung beim Schleifen keramischer Werkstoffe
Thomas Brücher. 330 Seiten, 124 Abb., 17 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4523-7

Einführen und Umsetzen von Total Quality Management
Christian Malorny. 310 Seiten, 68 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4524-5

Qualitätsmanagement für die Einführung bestandsarmer Produktionskonzepte
Torsten Walter. 143 Seiten, 37 Abb., 13 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4525-3

Virtuelle Tonmodellierung zur skizzierenden Formgestaltung im Industriedesign
Jörg Lüddemann. 166 Seiten, 76 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4519-9

Konzept zur Steigerung der Effektivität von Produktionsanlagen
Mehdi Al-Radhi, 165 Seiten, 45 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4528-8

Produktionsstrukturierung auf der Basis strategischer Eigenfertigungskomponenten
Olaf Sauer, 144 Seiten, 62 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4532-6

Auswahl und Konditionierung von Werkzeugen für das Außenrund-Profilschleifen technischer Keramiken
Ingo Liebe, 170 Seiten, 79 Abb., 16 Tab. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4509-1

Automatisiertes Nähen von Zuschnitten ungleicher Kontur
Thomas Gottschalk, 140 Seiten, 70 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4531-8

Featureintegrierte Fertigungsplanung
Armin Ulbrich, 209 Seiten, 93 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4529-6

Aufgabenbezogene Anordnung und Programmierung von Laserscannern für die 2D-Geometrieinspektion
Heinrich Schuler, 148 Seiten, 81 Abb. 1996. Kartoniert. ISBN 3-8167-4530-X

Arbeitsgestaltung zur Fehlervermeidung bei der SMD-Elektronikmontage
Stephan Krüger, 173 Seiten, 51 Abb., 22 Tab. 1996. Kartoniert.
ISBN 3-8167-4540-7

Modell der zyklischen Prozeßrestrukturierung als Teil des Total Quality Managements
Timo Füermann, 176 Seiten, 79 Abb., 10 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4545-8

Analyse der Rentabilität von Qualitätstechniken
Philipp Theden, 158 Seiten, 50 Abb., 10 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4544-X

Thermisch beschichtete CFK-Wellen im Maschinenbau
Andreas Kranz, 148 Seiten, 76 Abb., 12 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4547-4

Integrativer Produktentwicklungsarbeitsplatz mit Multimedia- und Breitbandkommunikationstechnik
Thomas Kiesewetter, 169 Seiten, 60 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4548-2

Verbesserung der Planung von Produktionsprozessen im Werkzeugbau durch Qualitätsplanung mittels Quality Function Deployment (QFD)
Manfred Zoschke, 140 Seiten, 14 Abb., 7 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4546-6

Flexibel anpaßbare Softwaresysteme zur rechnerunterstützten Fertigungssteuerung
Harald Krause, 148 Seiten, 89 Abb., 27 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4551-2

Anpassung des Qualitätswesens bei Total Quality Management
Frank Krämer, 262 Seiten, 75 Abb., 40 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4558-X

Integration von Qualitäts- und Umweltmanagementsystemen und ihre betriebliche Umsetzung
Detlev Butterbrodt, 240 Seiten, 60 Abb., 12 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4559-8

Die Entwicklung des deutschen Werkzeugmaschinenbaus in der Zeit von 1930 bis 1960
René Haak, 225 Seiten, 30 Abb., 9 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4556-3

Fertigungsintegrierte Instandhaltung
Ralf Jagodejkin, 195 Seiten, 55 Abb., 21 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4557-1

Analyse der Prozeßkette Pulverspritzgießen
Peter Merz, 165 Seiten, 78 Abbildungen. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4629-2

Bearbeitung von metallischen Gasturbinenwerkstoffen durch Tiefschleifen und Drahterodieren
Achim Meier, 220 Seiten, 80 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4627-6

Drehzahlsynchronisation der Wirkpartner beim Abrichten und Schleifen
Holger Eichhorn, 200 Seiten, 86 Abb., 13 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4630-6

Läppen von einkristallinem Silicium
Hendrik Engel, 200 Seiten, 85 Abbildungen, 13 Tabellen. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4631-4

Verschleißverhalten von polykristallinem Diamant bei instationärer Beanspruchung
Uwe Lachmund, 210 Seiten, 100 Abb., 15 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4632-2

Feature-basierte Meßplanung für Koordinatenmeßmaschinen
Michael Ciesla, 162 Seiten, 79 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4613-6

Informationssystem für heterogen verteilte Qualitätsinformationen
Volker Kleinhans, 150 Seiten, 67 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4612-8

Untersuchung und Interpretation der beim Schleifen der Nickelbasislegierung IN 738 LC induzierten Gefügeänderungen in der Randzone
Pengxi Li, 147 Seiten, 135 Abb., 19 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4634-9

Thermische Stabilisierung von Werkzeugmaschinen-Spindelkästen durch Carbonfaserverbundkunststoffe
Matthias Liebetrau, 200 Seiten, 122 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4638-1

Kooperationsentwicklung mit Zulieferern in der Automobilindustrie Indonesien
Ida-Bagus Kesawa Narayana, 214 Seiten, 95 Abb., 11 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4642-X

Flexible On-line-Prozeßoptimierung mit integrierten adaptiven Modellen
Martin Bauer, 160 Seiten, 55 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4622-5

Einsatz eines Mobilrobotersystems in der Endmontage des Schiffsstahlkörperbaus
Henning Müller, 170 Seiten, 62 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4552-0

Prozeßmodell für die Kraftübertragung durch neue Wirkflächen zur Entwicklung geometrietoleranter Demontagewerkzeuge
Martin Wagner, 170 Seiten, 100 Abb., 12 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5130-X

Honen keramischer Werkstoffe
Uwe-Peter Weigmann, 250 Seiten, 103 Abb., 15 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4639-X

Modellierung und Vermessung linearer Gelenkbewegungen bei Industrierobotern
Michael Grethlein, 154 Seiten, 56 Abb., 5 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4644-6

Globalisierungspotentiale im Maschinenbau
Jens Nackmayr, 174 Seiten, 68 Abb., 5 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5132-6

Entwicklung und praktische Erprobung eines Kennzahlensystems für das Total Quality Management
Olaf Wolter, 190 Seiten, 52 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5136-9

Prozeßorientierte Techniken zur systematischen Verbesserung des betrieblichen Umweltschutzes
Ulrich Tammler, 185 Seiten, 72 Abb., 25 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5134-2

Eine Methode zur automatischen Strukturinterpretation in digitalisierten technischen Zeichnungen
Nailja Luth, 150 Seiten, 76 Abb., 10 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4646-2

Ganzheitliches Modell zur Umsetzung von Total Quality Management
Philipp Radtke, 180 Seiten, 50 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5148-2

Ein methodischer Ansatz zum Strukturvergleich technischer Objekte
Matthias Müller, 245 Seiten, 54 Abb., 11 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5160-1

Prozeßparameter beim Scherschneiden von Karosserieblechteilen
Andreas Pöllmann, 154 Seiten, 80 Abb., 11 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5150-4

Biologisch basierte Verfahren zur Objekterkennung und Texturanalyse
Javier Ruiz-del-Solar, 145 Seiten, 98 Abb., 8 Tab. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-4647-0

Methodisches Konstruieren als Mittel zur systematischen Gestaltung von Dienstleistungen
Wolfgang Schwarz, 130 Seiten, 80 Abb. 1997. Kartoniert. ISBN 3-8167-5140-7

Techniken zur Entwicklung von Führungsqualität im Total Quality Management
Claudia Kostka, 200 Seiten, 30 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5165-2

Metamodellierung als Instrument der Verknüpfung von Unternehmensmodellen
Wolfgang Müller, 170 Seiten, 61 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5164-4

Entwicklung und Realisierung einer Methode für die flexible Auswertung von Profillinien
Lorenz Voit, 145 Seiten, 75 Abb., 20 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5174-1

Gewichts- und Lärmminderung von Laufrädern für Schienenfahrzeuge durch Einsatz von Faserverbundwerkstoffen
Frank Warmuth, 130 Seiten, 110 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5173-3

Prozeß-Benchmarking – Methode zum branchenunabhängigen Vergleich von Prozessen
Gunnar Siebert, 130 Seiten, 45 Abb., 21 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5182-2

Modellierungsvorgehen zur Planung von Geschäftsprozessen
Martin Schwermer, 160 Seiten, 54 Abb., 6 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5163-6

Bewertung und Verkürzung von Anlaufprozessen für Betriebsmittel
Ronald Fritsche, 135 Seiten, 71 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5169-5

Analyse des Drehens duktiler Werkstoffe mit der Finite-Elemente-Methode
Steffen Gerloff, 272 Seiten, 116 Abb., 7 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5161-X

Prozeßorientierte Auswahl von PPS-Systemen
Georg Neubauer, 146 Seiten, 85 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5184-9

Featurebasiertes Gestalten von Produkten mit Freiformgeometrien
Christiane Stiel, 153 Seiten, 50 Abb., 1 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5170-9

Entwicklung und Verifizierung eines Prozeßmodells für das Einzelpunktlöten in der Elektronikfertigung
Jörg Niemeier, 120 Seiten, 75 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5177-6

Beschleunigte Evolutionsstrategie zur Optimierung von Fertigungsprozessen
Jürgen H. Bremer, 125 Seiten, 38 Abb., 23 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5183-0

Konfigurierbares, multimediales Fernbetreuungssystem für rechnergesteuerte Fertigungseinrichtungen
Zaharya Menevidis, 155 Seiten, 51 Abb., 9 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5171-7

Funkenerosive Bearbeitung von polykristallinem Diamant
Steffen Appel, 150 Seiten, 62 Abb., 10 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5162-8

Analyse und Simulation des Laserstrahlschneidens von Faserverbundkunststoffen
Stefan Liebelt, 180 Seiten, 70 Abb., 12 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5190-3

Flexible Spannbacken für die Drehbearbeitung
Udo Bahrke, 168 Seiten, 120 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5193-8

Controlling des Fabrikbetriebes auf der Basis des Total Quality Managements (TQM)
Dirk Wilmes, 195 Seiten, 51 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5194-6

Ein Modell zur Reduzierung der Variantenvielfalt in Produktionsunternehmen
Sven-Norman Gembrys, 120 Seiten, 48 Abb.. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5199-7

Konzept eines Modells zur Produktentwicklung
Hanno Weber, 160 Seiten, 85 Abb. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5205-5

Entwicklung einer handlungsorientierten Interaktionsmethode zur Benutzung produktionstechnischer Datenbanken
Regine Gernert, 168 Seiten, 40 Abb., 15 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5213-6

Modell zur Gestaltung und Auswahl von CAQ-Lösungen
Thomas Konert, 172 Seiten, 68 Abb., 5 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5207-1

Globales Produktdatenmanagement zur Verbesserung der Produktentwicklung
Matthias Doblies, 139 Seiten, 49 Abb., 21 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5224-1

Designintegrierte Produktplanung und Produktkonzeption
Timm Kehler, 158 Seiten, 78 Abb.. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5237-3

Verkürzung der Produktentwicklungszeit durch Parallelverarbeitung
Haygazun Hayka, 175 Seiten, 46 Abb., 13 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5228-4

Analyse der Schnitt- und Kerbgeometrie sowie des Strahls beim Abrasivwasserstrahlschneiden
Bernhard Axmann, 199 Seiten, 100 Abb., 20 Tab. 1998. Kartoniert. ISBN 3-8167-5236-5

Anwendung neuronaler Netze zur Werkzeugverschleißerkennung beim Fräsen
Edgar Fries, 200 Seiten, 106 Abb., 14 Tab. 1999. Kartoniert. ISBN 3-8167-5244-6

Konzept zur lebenszyklusorientierten Verbesserung der Effektivität von Produktionseinrichtungen
Ulf Perlewitz, 162 Seiten, 75 Abb., 6 Tab. 1999. Kartoniert. ISBN 3-8167-5260-8

Methoden zur Verbesserung der Fehlererkennung an Antriebsstrecken
Jörg Krüger, 170 Seiten, 101 Abb., 21 Tab. 1999. Kartoniert. ISBN 3-8167-5268-3

Beitrag zur Entwicklung eines modularen TQM-Modells für das Krankenhauswesen
Bettina Hahne, 180 Seiten, 50 Abb., 5 Tab. 1999. Kartoniert. ISBN 3-8167-5290-X

Steuerungsintegriertes Prozeßüberwachungssystem für Drehmaschinen
Ireneus Suwalski, 167 Seiten, 106 Abb., 13 Tab. 1999. Kartoniert. ISBN 3-8167-5286-1

Montagesystemplanung und -steuerung für die variantenreiche Serienmontage
Kuo-Wen Chang, 148 Seiten, 59 Abb. 1999. Kartoniert. ISBN 3-8167-5294-2

Werkstückspannsysteme aus faserverstärkten Kunststoffen für die Hochgeschwindigkeitsdrehbearbeitung
Uwe Mette, 227 Seiten, 106 Abb., 27 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5271-3

Bildanalysesystem zur robusten Erkennung von Kennzeichen an Fahrzeugen
Lutz Lohmann, 184 Seiten, 81 Abb., 18 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5534-8

Planung und marktorientierter Betrieb von Demontagefabriken
Holger Perlewitz, 180 Seiten, 72 Abb., 53 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5538-0

Simulation von Produktentwicklungsprozessen
Hans-Christoph Raupach, 150 Seiten, 60 Abb., 4 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5544-5

Induktive Wegsensoren zur Überwachung und Regelung des Blecheinzugs beim Tiefziehen
Ute Forstmann, 110 Seiten, 59 Abb., 2 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5547-X

Konstruktive Berechnungsmodelle auf Basis Neuronaler Netze
Alexander Carl, 135 Seiten, 53 Abb., 2 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5568-2

Konzeption eines webbasierten Beratungs-Unterstützungs-Systems am Fallbeispiel einer PDM-Systemauswahl
Toralf Kahlert, 140 Seiten, 50 Abb., 4 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5569-0

Ein Ansatz zum Konstruieren mit Lösungsräumen
Petrik Ziebeil, 155 Seiten, 44 Abb., 6 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5577-1

Rapid Styling Validation - Berechnung und Simulation in der Konzeptphase der Produktentwicklung
Yasmina Bock, 150 Seiten, 57 Abb., 5 Tab. 2000. Kartoniert. ISBN 3-8167-5592-5

Einfluss der Relativbewegung auf den Prozess und das Arbeitsergebnis beim Planschleifen mit Planetenkinematik
Thomas Ardelt, 200 Seiten, 102 Abb., 19 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5609-3

Beitrag zum Greifen von Textilien
Jörg Stephan, 140 Seiten, 100 Abb, 20 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5622-0

Integrierte Unternehmensplanung auf der Basis von Unternehmensmodellen
Roland Jochem, 170 Seiten, 77 Abb. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5623-9

Wege zur Steigerung der Nutzenproduktivität von Ressourcen
Katrin Müller, 177 Seiten, 45 Abb., 46 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5884-3

Business-Exzellenz als qualitätsorientierter Entwicklungsansatz für Gründungsaktivitäten
Gunter Busch. 199 Seiten, 46 Abb., 4 Tab., 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-6045-7

Nutzung von Felddaten in der qualitätsgetriebenen Produktentwicklung und im Service
Andreas Edler. 131 Seiten, 64 Abb., 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5902-5

Package-Features für die Kommunikation in den frühen Phasen der Automobilentwicklung
Karsten Gessner. 154 Seiten, 39 Abb., 6 Tab., 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5636-0

System zur sicherheitsgerechten Konstruktion von Werkzeugmaschinen
Michael Ising, 200 Seiten, 101 Abb., 5 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5890-8

Verteilte Simulation des Materialversorgungsprozesses in Produktionsverbünden
Dirk Krützfeld, 141 Seiten, 78 Abb., 13 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-6035-X

Integration eines visuellen Lageregelungssystems für sechs Freiheitsgrade in Industrieroboter
Yong-Uk Kwon, 161 Seiten, 63 Abb., 9 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-6044-9

Magnetische Flüssigkeiten als Schmierstoff in hydrodynamischen Gleitlagern
Reiner Patzwald, 176 Seiten, 148 Abb., 27 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5892-4

Beitrag zum flexiblen Greifen in der Demontage
Alexander Stenzel, 129 Seiten, 66 Abb., 6 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5885-1

Strategische Unternehmensprozessgestaltung mit der Methode des Target Processing
Florian Weymar. 170 Seiten, 59 Abb. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-5898-3

Beitrag zur Innovationsentwicklung in indonesischen Unternehmen durch kompetenzorentierte Netzwerkbildung
Agung Budi Utomo Halim. 206 Seiten, 73 Abb., 53 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-6065-1

Fehlerbeseitigungsmanagement unter Berücksichtigung der Plattformstrategie am Beispiel der Automobilindustrie
Daniel Schukraft. 137 Seiten, 87 Abb. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-6079-1

Auslegung magnetumgeformter Verbindungen durch Simulation
Stefan Mehnert. 141 Seiten, 118 Abb., 17 Tab. 2001. Kartoniert. ISBN 3-8167-6086-4

Statistische Prozessregelung bei administrativen Prozessen im Rahmen eines ganzheitlichen Prozesscontrollings
Thomas Gerboth. 123 Seiten, 46 Abb., 12 Tab., 2002. Kartoniert. ISBN 3-8167-6080-5

Sichere synchrone Telekooperation zur Optimierung der verteilten Produktentstehung
Ralf Schultz. 150 Seiten, 61 Abb., 4 Tab. 2002. Kartoniert. ISBN 3-8167-6088-0

Verbesserte Anpassungsfähigkeit des Änderungsmanagements durch komplementäre Selbstorganisation
Ralf Brunken. 134 Seiten, 52 Abb., 2 Tab. 2002. Kartoniert. ISBN 3-8167-6144-5

Durchlaufzeitreduzierung durch Harmonisierung von Belegungszeiten und Einführung flexibler Prozeßteams
Reiner Friedland. 170 Seiten, 47 Abb., 13 Tab. 2002. Kartoniert. ISBN 3-8167-6139-9

Beitrag zur Steigerung der Nutzenproduktivität von Ressourcen durch eine Life Cycle Unit
Waldemar Grudzien. 170 Seiten, 75 Abb., 33 Tab. 2002. Kartoniert. ISBN 3-8167-6174-7

Beitrag zum Variantenmanagement und zur Prozessoptimierung im Wagenkastenbau von Schienenfahrzeugen
Holger Schmidt. 170 Seiten, 84 Abb., 10 Tab. 2002. Kartoniert. ISBN 3-8167-6178-X

Modellierung von Layout und Steuerungsregeln für die Materialfluss-Simulation
Markus Rabe. 222 Seiten, 135 Abb. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6262-X

CVD-Diamant als Schneidstoff
Marcus Brücher. 187 Seiten, 87 Abb., 18 Tab. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6280-8

Berechnungsmodell zur Ermittlung von Spannkräften bei Backenfuttern
Pingfa Feng. 213 Seiten, 203 Abb., 17 Tab. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6371-5

Beitrag zur Entwicklung modularer Demontagewerkzeuge
Uwe Rebafka. 138 Seiten, 78 Abb., 28 Tab. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6381-2

Beitrag zur voxelbasierten Simulation des fünfachsigen NC-Fräsens
Zengxuan Hou. 160 Seiten, 80 Abb., 3 Tab. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6401-0

Aufbau hierarchiearmer Produktionsnetzwerke – Technologiestrategische Option und organisatorische Gestaltungsaufgabe
Carsten S. Schröder, 210 Seiten, 59 Abb., 1 Tab. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6398-7

Sprache zur Optimierung von Produktentwicklungsprozessen
Roland Heimann, 158 Seiten, 55 Abb., 6 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6456-8

Beitrag zur dynamischen Prozessplanung und Generierung von Steuerungssequenzen für flexible Demontagesysteme
Hyung-Ju Kim. 164 Seiten, 75 Abb., 19 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6559-9

Öko-Effizienz durch Nutzenverkauf am Beispiel der Automobilindustrie
Gitta Vischer. 193 Seiten, 62 Abb., 42 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6561-0

Applications of Subdivision Techniques in Product Development
Nele Gross. 136 Seiten, 51 Abb. 2003. Kartoniert. ISBN 3-8167-6576-9

Werkzeuge zum impulsmagnetischen Warmfügen von Profilen aus Aluminium- und Magnesiumlegierungen
Robert Hahn. 209 Seiten, 95 Abb., 18 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6642-0

Ultraschallunterstütztes Quer-Seiten-Schleifen
Nikolai-Alexander Daus. 145 Seiten, 78 Abb., 5 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6657-9

Beitrag zur Steigerung der Nutzenproduktivität von Ressourcen durch Anpassen von Mobiltelefonen
Bahadir Basdere. 208 Seiten, 77 Abb., 26 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6662-5

Informationstechnische Integration hybrider Demontagesysteme
Thomas Keil. 183 Seiten, 79 Abb., 15 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6688-9

Soft Data Fusion for Computer Vision
Aureli Soria-Frisch. 242 Seiten, 118 Abb., 7 Tab. 2004. Kartoniert. ISBN 3-8167-6689-7

Trennende Schutzeinrichtungen für Werkzeugmaschinen zur Hochgeschwindigkeitsbearbeitung
Jörg Bold. 220 Seiten, 99 Abb., 39 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6697-8

Auslegung dünner Hartstoffschichten für Zerspanwerkzeuge
Karsten Klein. 172 Seiten, 88 Abb., 17 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6700-1

Methode zur Komplexitätsreduzierung der Auftragssteuerung in der Elektronikmontage
Dietrich Fischer. 202 Seiten, 97 Abb., 6 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6729-X

Sicherheitszentrierte Architektur für Internet-basierte Dienste im Maschinen- und Anlagenbau
Ralf Berger. 120 Seiten, 70 Abb., 16 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6777-X

Methodische Entwicklung von modularen IT-Dienstleistungen
Klaus Herbst. 219 Seiten, 63 Abb. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6778-8

Flexible Integration von Rapid Prototyping Prozessketten in die Produktentwicklung
Stefan Dreher. 139 Seiten, 54 Abb., 10 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6843-1

Risikominimierung bei der Beschaffung investiver Dienstleistungen durch den Einsatz von Methoden des Qualitätsmanagements
Marc Bockshecker. 195 Seiten, 36 Abb., 6 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6900-4

Verfahren zum Einzelpunktlöten von elektrischen Anschlusskontakten mit getrennter Erwärmung von Lötstelle und Lot
Andreas Frenzke. 140 Seiten, 69 Abb., 17 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6919-5

Adaptive Modellierung und Simulation von Produktentwicklungsprozessen
Johannes Voigtsberger. 174 Seiten, 58 Abb. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6929-2

Konditionieren von Diamantschleifscheiben
Frank Sroka. 229 Seiten, 111 Abb., 7 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6937-3

Zustandsorientierte Instandhaltung von Standardkomponenten mit Life Cycle Units
Alexander Buchholz. 200 Seiten, 99 Abb., 9 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6938-1

Beitrag zur Gestaltung horizontaler Innovationskooperationen in Klein- und Mittelbetrieben am Beispiel Schienengüterverkehr
Ulrich Kroß. 166 Seiten, 56 Abb., 11 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6962-4

Verfahren und Systeme zur Demontage komplexer technischer Gebrauchsgüter
Jens-Peter Härtwig. 242 Seiten, 108 Abb., 19 Tab. 2005. Kartoniert. ISBN 3-8167-6963-2

Neue Einsatzmöglichkeiten von Ferrofluiden in technischen Systemen mit relativ zueinander bewegten Komponenten
Nayim Bayat. 175 Seiten, 113 Abb., 19 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7014-2

Wissensbilanzen für mittelständische Organisationen
Kay Alwert. 181 Seiten, 65 Abb., 25 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7033-9

Entwicklung eines lernfähigen Bildverarbeitungssystems unter Einsatz von Verfahren des Soft Computing
Mario Köppen. 158 Seiten, 56 Abb., 7 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7056-8

Hochleistungsfräsen von Superlegierungen
Eric Wiemann. 239 Seiten, 124 Abb., 34 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7082-7

Beitrag zur Steigerung der Nutzenproduktivität durch Anpassungsprogrammplanung
Carsten Franke. 220 Seiten, 82 Abb., 34 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7095-9

Beitrag zur simulationsgestützten Planung von Demontagefabriken für Elektro- und Elektronikaltgeräte
Markus Ciupek. 179 Seiten, 77 Abb., 26 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7112-2

Management von Ingenieurkompetenzen im Spannungsfeld beruflicher Arbeitsteilung
Matthias Patrick Meyer. 180 Seiten, 31 Abb., 7 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7127-0

Approach of Integrated Order Scheduling and Flexible Resource Planning for Mass Customization
Ingo Lümkemann. 193 Seiten, 38 Abb., 10 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7223-4

Entwicklung von Hartmetallwerkzeugen für die Mikrozerspanung mit definierter Schneide
Kai Schauer. 178 Seiten, 107 Abb., 15 Tab. 2006. Kartoniert. ISBN 3-8167-7245-5

Informationssystemische Prozessorganisation mit sozioorientierter Transformation
Dieter Schacher. 163 Seiten, 65 Abb. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7285-9

Eigenschaften und Einsatzverhalten CVD-diamantbeschichteter Hartmetallwerkzeuge
Rouven Kott. 166 Seiten, 84 Abb., 7 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7323-8

Grundlagen und Prozessstrategien der Mikrofunkenerosion für die Bearbeitung von Rotationsbauteilen
Sascha Piltz. 266 Seiten, 139 Abb., 27 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7345-0

Verfahrensgrundlagen und Technologie des Hubschleifens mit viskosen Schleifmedien
Hubert Szulczynski. 175 Seiten, 87 Abb., 13 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7379-5

Modellierung und Analyse verteilter Entwicklungsprozesse für mechatronische Systeme
Chris Biantoro. 174 Seiten, 102 Abb. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7406-8

Beitrag zum Vereinzeln flächiger biegeschlaffer Bauteile
Frank Szimmat. 177 Seiten, 106 Abb., 19 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7424-2

Kompetenzabhängiges Simulationsverfahren zur Optimierung von Produktentwicklungsprozessen
Matthias Strebel. 132 Seiten, 33 Abb., 1 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7432-7

Integriertes Benchmarking für kleine und mittlere Unternehmen
Holger Kohl. 166 Seiten, 41 Abb., 19 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7439-6

Informationsmanagement zur Planung und Verfolgung von Produktlebenszyklen
Holger Jungk. 147 Seiten, 72 Abb., 5 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7461-7

Beitrag zum wirtschaftlichen Betrieb von Recyclingnetzwerken
Monica Vanegas. 174 Seiten, 65 Abb., 41 Tab. 2007. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7558-4

Eine Ontologie-basierte Methode zur Entscheidungsunterstützung in der Produktentwicklung
Hauke Arndt. 193 Seiten, 59 Abb. 2008. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7641-3

Analyse der Effekte beim Trockeneisstrahlen
Mark Claudius Krieg. 144 Seiten, 60 Abb., 27 Tab. 2008. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7625-3

Optimierte Zulieferintegration in der Produktentwicklung durch Ad-hoc-Kooperationswerkzeuge
Hendrik Gärtner. 166 Seiten, 61 Abb. 2008. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7655-0

Zerspansimulationslösungen für die Werkzeugkonstruktion und Prozessauslegung beim Fräsen
Alexander Marc Mattes. 169 Seiten, 79 Abb., 20 Tab. 2008. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7847-9

Aerodynamische Trenn- und Förderprozesse zur Steigerung der Demontageflexibilität bei Automobilkomponenten
Stefano Consiglio. 154 Seiten, 71 Abb., 13 Tab. 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7955-1

Planung der Wiederverwendung von Elektro(nik)altgeräten
Sebastian Kernbaum. 236 Seiten, 87 Abb., 19 Tab. 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7966-7

Verfahren zur ad hoc-Modellierung und -Simulation räumlicher Feder-Masse-Systeme für den Einsatz in Virtual Reality-basierten Handhabungssimulationen
Jens Neumann. 226 Seiten, 106 Abb., 27 Tab. 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7955-1

Beeinflussung des Vorbehandlungszustandes der Substratrandzone durch Trockeneisstrahlen am Beispiel von Klebverbindungen
Adil El Mernissi. 157 Seiten, 72 Abb., 21 Tab. 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7980-3

Beitrag zur Steigerung der Nutzenproduktivität durch Modularisierung von Produkten
Marco Zettl. 236 Seiten, 65 Abb., 18 Tab. 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8167-7986-5

Herstellung und Einsatz CVD-diamantbeschichteter Bohrgewindefräser
Jens König. 188 Seiten, 65 Abb., 18 Tab. 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0025-2

Akzeptanzförderung bei der Einführung von Wissensmanagement - Ein Methoden-baukasten für kleine und mittlere Unternehmen
Ina Kohl. 178 Seiten, 30 Abb., 13 Tab., 2009. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0050-4

Technisch-wirtschaftliche Bewertung von Flexibilität in Rohbaunebenlinien
Arne Lambertz. 240 Seiten, 164 Abb., 10 Tab, 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0117-4

Charakterisierung und Auslegung der Grenzschicht PVD-beschichteter Schneidkeramiken.
Tom Hühns. 179 Seiten, 72 Abb., 11 Tab. 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0132-7

Virtuelle Rekonstruktion von Innenräumen basierend auf Messdaten von Tiefenkameras
Alexander Sabov. 174 Seiten, 86 Abb., 10 Tab. 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0144-0

Ermittlung, Berechnung und Optimierung des strukturmechanischen Verhaltens am Beispiel von Fräsmaschinen
Carsten Mense. 169 Seiten, 58 Abb., 11 Tab. 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0156-3

Beitrag zur nachhaltigen industriellen Wertschöpfung durch multiattributive Bewertung von Montageanlagen
Timo Fleschutz. 193 Seiten, 62 Abb., 8 Tab. 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0171-6

Vorgehensweise für Planung und Betrieb energieeffizienter Produktionssysteme
Nils Weinert. 174 Seiten, 52 Abb., 16 Tab. 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0173-0

Semantic-Web-Wissensbank für Planungsprozesse bei der Wiederverwendung von Produktionsanlagen
Robert Harms. 210 Seiten, 93 Abb., 11 Tab. 2010. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0180-8

Einsatzverhalten genuteter CBN-Schleifscheiben mit keramischer Bindung beim Außenrund-Einstechschleifen
Mathias Kirchgatter. 173 Seiten, 85 Abb., 19 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0211-9

Planung ingenieurwissenschaftlicher Qualifizierung mit Semantik-Web-Wissensbanken
Carsten Reise. 178 Seiten, 61 Abb., 26 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0217-1

Development of an Intellectual Capital-Based Management System for Science Parks
Hamad Al Hashemi. 154 Seiten, 54 Abb., 7 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0218-8

Adaptive physikbasierte Modelle für die interaktive Deformationssimulation in der Virtuellen Realität
Ulrike Völlinger. 222 Seiten, 109 Abb., 25 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0273-7

Beitrag zu verteilten technischen Innovationsprozessen unter Berücksichtigung von Nachhaltigkeitskriterien
Semih Severengiz. 208 Seiten, 35 Abb., 15 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0232-4

Hybride Interaktionstechniken des immersiven Skizzierens in frühen Phasen der Produktentwicklung
Johann Habakuk Israel. 389 Seiten, 120 Abb., 26 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0330-7

Depth Data based Determination of Gait Parameters of Subjects after Stroke for the Use in Clinical Gait Rehabilitation
Jochen Radmer. 152 Seiten, 84 Abb., 14 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0332-1

Integration von Modellkonzeption und Management der Unternehmensmodellierung
Thomas Knothe. 190 Seiten, 48 Abb., 32 Tab. 2011. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0355-0

Wissensgenerierung in hybriden Leistungsbündeln durch die Virtual Life Cycle Unit
René Gegusch. 184 Seiten, 81 Abb. 2012. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0371-0

Strategische Unternehmensentwicklung auf Basis immaterieller Werte in KMU
Markus Will, 219 Seiten, 56 Abb., 31 Tab. 2012. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0376-5

Modellbasierte Prozessauslegung des Druckfließläppens am Beispiel keramischer Werkstoffe
Vanja Mihotovic, 166 Seiten, 65 Abb., 5 Tab. 2012. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0390-1

Schleifen von Hartmetall- und Vollkeramik-Schaftfräsern
Christoph Hübert, 154 Seiten, viele Abb. und Tab. 2012. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0393-2

A haptic control framework for end-effector based gait simulation interfaces and its application in patient-adaptive rehabilitation training
Sami Hussein, 160 Seiten, viele Abb. und Tab. 2012. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0464-9

Auditierung von Wissensbilanzen. Eine Methode zur Qualitätssicherung von Bilanzen des Intellektuellen Kapitals
Wen-Huan Wang, 200 Seiten, viele Abb. und Tab. 2012. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0490-8

Einsatzverhalten von PKD und Bor-dotiertem CVD-Diamant bei der Mikrofunkenerosion
Markus Röhner, 224 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0497-7

Effective Motion Design Applied to Energy-Efficient Handling Processes
Tobias Brett, 205 Seiten, 84 Abb. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0511-0

Fortschrittsbewertung von Fabrikplanungsprojekten
Sven Glinitzki, 230 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0520-2

Kompensation der Verlagerung an nachgiebigen Werkzeugmaschinengestellen am Beispiel von Fräsmaschinen für die Mikrobearbeitung
Jörg Eßmann, 164 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0565-3

Approach for Integrating Predictive-Reactive Job Shop Scheduling with PLC-Controlled Material Flow
Azrul Azwan Abdul Rahman, 168 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert.
ISBN 978-3-8396-0622-3

Product-Service Systems Enabling for Sustainable City Mobility
Jialiang Hu,167 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0632-2

Integration optischer Messtechnik in Ultrapräzisionsmaschinen für die Korrekturbearbeitung beim Drehen mit Slow-Slide-Servo
Martin Kurz, 213 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0630-8

Contribution to efficient water use and reducing environmental impact of wastewater in industry
Chenqing Wang, 213 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0637-7

Patientengerechte Gestaltung computerbasierter Anwendungen in der gerätegestützten, motorischen Therapie nach Schlaganfall
Simone Schmid, 182 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0634-6

Einfluss der Oberflächenstrukturierung und -texturierung eines Kunststoffsubstrats auf die Anhaftung von Zellen
Quang Ut Huynh, 193 Seiten, viele Abb. und Tab. 2013. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0631-5

Modellierung und Simulation des thermischen Verhaltens einer Werkzeugmaschine mit der Finite-Elemente-Methode
Jiangmin Hu, 191 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0660-5

Möglichkeiten und Grenzen des Strahlspanens mittels CO_2 Hochdruckstrahlen
Martin Bilz, 170 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0661-2

Nachhaltige Technologiepfade für unterschiedliche Entwicklungsniveaus
Pia Gausemeier, 247 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0670-4

Enabling sustainable value creation by engineering capacity building
Sadiq Ahmad Muhammad Abd Elall, 161 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert.
ISBN 978-3-8396-0687-2

Verwendung von Traceability-Modellen zur Unterstützung der Entwicklung technischer Systeme.
Grischa Beier, 378 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0681-0

Effiziente Erfassung und Pflege von Traceability-Modellen zur Entwicklung technischer Systeme
Asmus Figge, 311 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0705-3

Steigerung der Wirtschaftlichkeit beim Mikrofräsen durch Schneidkantenpräparation mittels Tauchgleitläppen.
Armin Löwenstein, 222 Seiten, viele Abb. und Tab. 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0652-0

Integrated Engineering of Products and Services
Patrick Müller, 366 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0549-3

Konzeption und Realisierung einer Methode zur templategestützten Systementwicklung
Simon Frederick Königs, 258 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0652-0

Community-Based Design of Process Chains for Manufacturing and Recycling
Steffen Heyer, 189 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0731-2

Werker-Assistenz und -Qualifizierung für manuelle (De-)Montage durch bild- und schrift-gestützte Visualisierung am Arbeitsplatz
Aleksandra Barbara Postawa, 206 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert.
ISBN 978-3-8396-0733-6

Vereinfachung der Systemmontage von metalloptischen IR-Spiegelteleskopen
Sebastian Scheiding, 163 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0774-9

Geschäftsmodelle der Wiederaufbereitung für Hersteller von Originalteilen
Henry Widera, 218 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0820-3

Verfahren zur mechanischen Erzeugung periodischer nanooptischer Strukturen mit monokristallinen Diamantwerkzeugen am Beispiel von Blazegittern
Kurt Haskic, 196 Seiten, viele Abb. und Tab., 2014. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0859-3

Absicherung des Innovationserfolgs unter Berücksichtigung des Open-Innovation-Ansatzes
Manuel Rothe, 184 Seiten, viele Abb. und Tab., 2015. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0861-6

Steigerung der Nutzungspotenziale von CVD-diamantbeschichteten Werkzeugen
Fiona Sammler, 164 Seiten, viele Abb. und Tab., 2015. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0906-4

Prozessstrategien beim NC-Formschleifen mit Schleifstiften
Tiago Borsoi Klein, 164 Seiten, viele Abb. und Tab., 2015. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0943-9

Netzfreie Zerspanungssimulation mit der Finite-Pointset-Methode
Robert Gerstenberger, 164 Seiten, viele Abb. und Tab., 2015. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0946-0

Untersuchung des Einflusses von Dreh-, Drehfräs-, Glattwalz- sowie Schleifprozessen auf das tribologische Einsatzverhalten von Stahl am Beispiel des Rad-Schiene-Kontakts
Stefan Gebhard, 164 Seiten, viele Abb. und Tab., 2015. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0955-2

Keramische Schaftfräswerkzeuge für die Hochgeschwindigkeitsbearbeitung von Nickelbasis-Legierungen
Manuel Wacinski, 148 Seiten, viele Abb. und Tab., 2015. Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0965-1

Additive Fertigung von Nickelbasis-Superlegierungen mittels Laserstrahlschmelzens am Beispiel von Diamalloy 4004NS
Kamilla König-Urban, 190 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0978-1

Modellbasierte Prozessoptimierung für das Mikrofräsen
Frederik Felix Mahr, 234 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0986-6

Quantitative Betriebsmittelbedarfsplanung für die getaktete Fließfertigung
Jakob Dinse, 158 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0951-4

Entwicklung eines Vorgehensmodells zur Einführung eines globalen Qualitätsmanagementsystems
Felix Meentken, 208 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0998-9

Entscheidungsmethodik zur kompetenzbasierten Team-Organisation bei der Implementierung von Energiemanagementsystemen
Phillip Karcher, 240 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0991-0

Nutzenoptimierter Einsatz präventiver Qualitätsmethoden im Produktentstehungsprozess der Automobilindustrie
Markus Heintzmann, 238 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0993-4

Entwicklung eines Vorgehensmodells zur Einführung eines globalen Qualitätsmanagementsystems
Felix Meentken, 208 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-0998-9

Qualitätsreferenzmodell für die Produktion von Unikaten und Kleinserien
Dominik Rößle, 281 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-1035-0

Einfluss von Herstellungs- und Lagerungsfaktoren auf die Eigenschaften von Trockeneispellets und das Strahlergebnis.
Simon Motschmann, 190 Seiten, viele Abb. und Tab., 2016 Kartoniert. ISBN 978-3-8396-1014-5

Zur Minimierung der Simulationszeit werden bei der Werkzeugmaschinenentwicklung Modellordnungsreduktionsverfahren eingesetzt. Typischerweise geben diese Ersatzmodelle das Übertragungsverhalten beziehungsweise die Systemeigenschaften einiger ausgewählter Eingangspunkte zu einigen ausgewählten Ausgangspunkten wieder. Zur Berücksichtigung der Schlittenposition im Simulationsmodell wird allerdings eine größere Anzahl an Ein- und Ausgangsknoten benötigt. Durch die Erhöhung der Ein- und Ausgänge des Systems erhöht sich wiederum die Dimension des reduzierten Ersatzsystems massiv. Um dies zu vermeiden, wurden in transienten Simulationen bisher keine veränderten Schlittenpositionen berücksichtigt, wie sie in der Regel bei Werkzeugmaschinen auftreten. Das Ziel der Arbeit ist ein Verfahren zur zeiteffizienten Simulation von Werkzeugmaschinen unter Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften bei Änderung der Steifigkeits- und Massenverteilung mittels einer Kombination von Modellordnungsreduktionsverfahren.

ISBN 978-3-8396-0999-6

9 783839 609996

FRAUNHOFER VERLAG