

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik am KIT  
Fraunhofer-Institut für Optronik, Systemtechnik und Bildauswertung (IOSB)

---

**Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für das Cahn-  
Hilliard-Inpainting und Anwendungen in der  
Szenenanalyse unter Berücksichtigung von  
Klassifikationsergebnissen**

---

**Masterarbeit**  
im Studiengang  
Mathematik

Vorgelegt von: Benedikt Kottler (B. Sc.)  
Matrikelnummer: 1531546

**Betreuer:** PD Dr. Frank Hettlich  
Dr. Dimitri Bulatov

Karlsruhe, 19. Februar 2018



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Masterarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst möchte ich mich bei PD Dr. Frank Hettlich, Dr. Dimitri Bulatov und Peter Solbrig bedanken, die meine Masterarbeit betreut und begutachtet haben. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Als nächstes möchte ich mich bei Dr. Mathias Rothermel für die Bereitstellung der Tiefenkarten, bei Loic Elsholz für die Erzeugung des 3D-Modells und bei Melanie Pohl für das Korrekturlesen bedanken.

Für die hilfreichen Tipps und angenehme Korrespondenz bedanke ich mich bei Prof. Andrea Bertozzi, Prof. Carola-Bibiane Schönlieb und den Mitgliedern ihrer Arbeitsgruppe Lisa Maria Kreusser und Maxime Claude Robert Van De Moortel.

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Kommilitonen Hakan Demirel und in besonderem Maße bei Jörn Brett bedanken, der mir mit viel Geduld, Interesse und Hilfsbereitschaft zur Seite stand und mich auf etliche Ungenauigkeiten in der Arbeit aufmerksam gemacht hat. Bedanken möchte ich mich für die zahlreichen interessanten Debatten und Ideen, die maßgeblich dazu beigetragen haben, dass diese Masterarbeit in dieser Form vorliegt.

Meinen Schwestern danke ich besonders für den starken emotionalen Rückhalt, insbesondere Magdalena, die sämtliche Hochs und Tiefs aushalten musste und immer die richtigen Worte fand.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern Anna und Albert bedanken, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben und stets ein offenes Ohr für meine Sorgen hatten.



# Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als im Text angegebenen Quellen angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden.

\_\_\_\_\_ Karlsruhe, 19. Februar 2018

Benedikt Kottler



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Problemstellung . . . . .	3
1.2	Literaturrecherche . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>10</b>
2.1	Mathematischer Rahmen . . . . .	10
2.2	Variationelle Methoden . . . . .	13
2.3	Beispiele - Segmentierung für Inpainting . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Das Cahn-Hilliard-Inpainting</b>	<b>18</b>
3.1	Schwache Lösungen im dynamischen Fall . . . . .	20
3.2	Schwache Lösungen im stationären Fall . . . . .	29
3.2.1	Mathematischer Rahmen . . . . .	30
3.2.2	Existenz und Eindeutigkeit des Hilfsproblems . . . . .	32
3.2.3	Fixpunktstrategie . . . . .	39
3.3	Implementierung . . . . .	46
<b>4</b>	<b>TV-<math>H^{-1}</math>-Inpainting</b>	<b>51</b>
4.1	Mathematischer Rahmen . . . . .	51
4.2	$\Gamma$ -Konvergenz des Cahn-Hilliard-Funktional . . . . .	53
4.3	Verallgemeinerung für Grauwertbilder . . . . .	55
4.4	Implementierung . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Anwendungen in der Szenenanalyse</b>	<b>60</b>
5.1	Methodenbeschreibung . . . . .	62
5.1.1	Harmonisches Inpainting und harmonisches Inpainting mit Klassen . . . . .	62
5.1.2	TV- $H^{-1}$ -Inpainting mit Klassen . . . . .	64
5.1.3	Criminisi-Inpainting und hybride Methode . . . . .	65

5.2	Anwendungsbeispiele . . . . .	66
5.2.1	Bereinigung von Geländetexturen . . . . .	66
5.2.2	Inpainting von Tiefenkarten . . . . .	68
5.2.3	Annotation und Texturierung von Gebäudepolygonen . . . . .	69
5.3	Fazit . . . . .	71
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# 1 Einleitung

Zu Beginn der Fotografie war man allgemein der Meinung, dass Bilder nicht lügen können. Diese Sichtweise ist mittlerweile überholt, denn ähnlich wie bei Gemälden werden Bilder von Fotografen oder Herausgebern in der Regel arrangiert, um eine bestimmte Interpretation beim Betrachter zu provozieren. Einfache Möglichkeiten sind Farbmanipulationen, um z. B. Wasser wie Blut aussehen zu lassen, oder eine veränderte Bildgeometrie, die Personen dicker oder dünner erscheinen lässt [Mar12]. Besonders in der Modefotografie sind moderne Techniken der Bildverarbeitung so weit verbreitet, dass der französische Gesetzgeber eine Kennzeichnungspflicht nachbearbeiteter Fotos eingeführt hat, um junge Menschen vor unrealistischen Schönheitsidealen zu schützen [Rob17]. Eine weitere einfache Möglichkeit die Aussage eines Bildes zu manipulieren, ist die Wahl eines passenden Bildausschnitts, welcher die Aussage des Bildes in ihr Gegenteil verkehren kann. Komplizierter wird es, wenn Bildelemente innerhalb des Bildes retuschiert werden sollen. Dabei ist nicht immer böser Wille im Spiel, wenn beispielsweise vom Zahn der Zeit beschädigte Bilder oder Dokumente rekonstruiert werden sollen. Mögliche Beschädigungen sind hier Kratzer, Löcher oder Flecken. In Museen wird diese Aufgabe von Restauratoren übernommen, die aufgrund ihrer Ausbildung dazu in der Lage sind, Restaurierungsarbeiten an wertvollen Gemälden fachgerecht durchzuführen.

In Abbildung 1.1 sind zwei Beispiele zu Rekonstruktion und Löschen von Bildelementen zu sehen. Im Jahre 2012 hatte eine 80-jährige Dame Mitleid mit dem Jesusfresko ihrer Kirche in Borja, Nordspanien, und versuchte sich an einer Rekonstruktion. Über die Qualität ihrer Arbeit wurde danach ausgiebig diskutiert (Abbildung 1.1(a)). In Abbildung 1.1(b) ist von links oben nach rechts unten die zeitliche Entwicklung einer Fotografie von Stalin und einigen Weggefährten zu sehen. Nach und nach fallen die abgebildeten Personen in Ungnade oder dem

Großen Terror zum Opfer. Parallel werden die Personen im Bild entsprechend abgeschnitten und retuschiert.



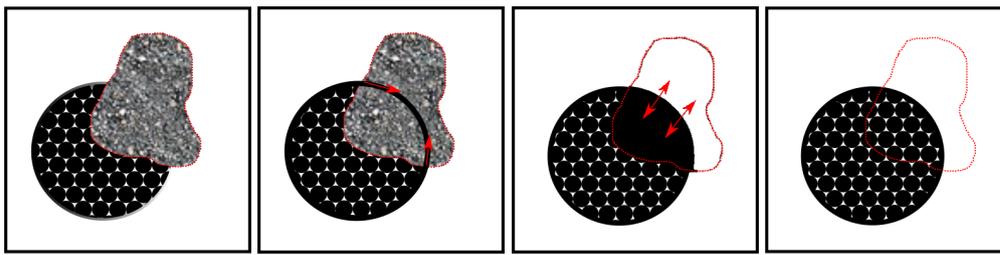
(a) Rekonstruktion des Ecco Homos von Borja [Foc12]

(b) Der Große Terror - Fünf, vier, drei, zwei. [Nin17]

Abbildung 1.1: Historische Beispiele

Die Methode, bei der beschädigte oder verlorene Bildteile rekonstruiert werden, heißt Inpainting oder Übermalen. Dabei bestimmt die Gesamtheit des Bildes, wie es an beschädigten Bildteilen fortgesetzt werden soll, um eine stimmige Rekonstruktion zu erhalten. Wichtig ist insbesondere, dass der Übergang an den Rändern des beschädigten Bereichs unauffällig ist. Eine verbreitete Methode, die von professionellen Restauratoren verwendet wird, verdeutlicht Abbildung 1.2. Ein Bild mit einem schwarzen Kreis wurde beschädigt und wird in drei Schritten rekonstruiert. Zuerst werden die Konturlinien, also der Rand des Kreises, die den Rand der Beschädigung berühren, entlang ihrer gedachten Verlängerung weitergeführt. Diese Linie definiert unterschiedliche Regionen innerhalb der Beschädigung, die im zweiten Schritt mit einer passenden Farbe aufgefüllt werden. Im letzten Schritt wird die Textur, also kleinskalige Bildinhalte, wie Bildrauschen oder feine Muster, hinzugefügt, die das Bild natürlich erscheinen lassen. In der computergestützten Bildverarbeitung für digitale Bilder wird dieses Vorgehen von vielen Algorithmen für Inpainting imitiert.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für das des Cahn-Hilliard-Inpaintings und einer Erweiterung für Grauwertbilder, die dafür geeignet ist, den strukturellen Anteil von Texturen in 3D-Modellen zu



(a) Beschädigtes Bild, (b) Kontur wird fortgesetzt  
 (c) Regionen werden mit Farbe aufgefüllt  
 (d) Textur wird hinzugefügt

Abbildung 1.2: Rekonstruktion eines Kreises

bereinigen. In diesem Kapitel wird das Thema der Arbeit in den Kontext zur Arbeitsgruppe am Fraunhofer IOSB gestellt, die in der Praxis vorkommende Problemstellung formuliert und ein Überblick über die verfügbare Literatur gegeben. Im zweiten Kapitel wird die mathematische Modellierung von Bildern erklärt, sowie eine kurze Einführung in variationelle Methoden und partielle Differentialgleichung für Inpaintingaufgaben gegeben. Anschließend wird beispielhaft ein Bildmodell aus der Segmentierung für Inpainting angepasst. Das dritten Kapitel beschäftigt sich mit der mathematischen Analyse der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung, welches zum Inpainting von binären Bildern geeignet ist. Hier wird insbesondere die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für den dynamischen Fall und die Existenz von Lösungen im stationären Fall in den entsprechenden Lösungsräumen gezeigt. Anschließend wird ein effizientes numerisches Verfahren zur Lösung der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung vorgestellt. Das vierte Kapitel beschreibt die Erweiterung des Cahn-Hilliard-Inpaintings für Grauwertbilder, das  $TV-H^{-1}$ -Inpainting und passt das Lösungsverfahren an. Im letzten Kapitel wird das Verfahren angepasst, um Klassifikationsergebnisse in den Inpaintingalgorithmus einzubeziehen und einige praktische Resultate vorgestellt.

## 1.1 Motivation und Problemstellung

Die Abteilung Szenenanalyse (SZA) am Fraunhofer IOSB entwickelt automatische Verfahren zur Auswertung multisensorieller Bilddaten im Aufklärungsver-

bund. Hintergrund der Forschungsarbeiten sind die Kernforderungen nach einer zeitnahen Verfügbarkeit von Auswertungsergebnissen und Geoinformationen. Hierzu werden unter anderem Modelle zur Beschreibung urbaner Gebiete aufgestellt und automatische 3D-Szenenrekonstruktionen durchgeführt. Für die Texturierung der 3D-Modelle werden Luftbilder verwendet.

Ein Problem dabei ist, dass Fassaden und Dächer von Vordergrundobjekten, wie z. B. Bäumen, überdeckt sein können. In Abbildung 1.3 wird das linke Bild dazu verwendet, um ein Gebäudemodell zu texturieren. Im mittleren Bild ist der Baum, der das Gebäude verdeckt, in der Textur enthalten, was in einer Winterszene unrealistisch aussieht. Im rechten Bild ist die optisch ansprechendere Texturierung des Modells nach der Texturbereinigung mit Inpaintingmethoden zu sehen.



(a) Luftbild zur Texturextraktion (b) Ohne Texturbereinigung (c) Mit Texturbereinigung

Abbildung 1.3: Gebäudemodell einer Winterszene (erstellt von Loic Elsholz).

Der große Teil der verarbeiteten Daten liegt in Form von digitalen Bildern als sogenannte Rastergrafiken vor. Diese bestehen aus einer rasterförmigen Anordnung von Pixeln, denen jeweils ganzzahlige Werte zugeordnet sind. In Graustufenbildern wird jeweils ein Wert für die Lichtintensität, der zwischen 0 (kein Licht bzw. schwarz) und 255 (viel Licht, bzw. weiß) skaliert ist. In Farbbildern werden zur Farbkodierung für jeden Pixel analog drei Werte gespeichert (oft rot, gelb, grün), welcher den Farbwert kodiert. Das gleiche Prinzip kann auch zur Speicherung von Klassifikationsergebnissen verwendet werden, hier wird jedem Pixel eine Objektklasse zugeordnet.

Zunächst wird ein kurzer Überblick über die verfügbare Literatur zum Thema Inpainting gegeben.

## 1.2 Literaturrecherche

Inpainting ist ein interessantes Forschungsfeld, in dem viele verschiedene Ansätze und Philosophien entwickelt wurden. Die Ansätze lassen sich in sechs Kategorien einteilen: Textursynthese, strukturbasierte Methoden, texturbasierte Methoden, Markov-Random-Field-basierte Methoden, Methoden mit externen Bildern und hybride Methoden. Diese Unterteilung ist allerdings nicht exakt. Zum einen ist manchmal eine feinere Unterteilung möglich (strukturelles Inpainting kann entweder auf Interpolation oder auf partiellen Differentialgleichungen basieren). Zum anderen passen viele der besonders guten Ansätze in mehr als eine Kategorie und werden daher intuitiv zugewiesen. Verfahren, welche mehrere Ansätze aus den genannten Kategorien verwenden, werden den hybriden Methoden zugeordnet. Obwohl es im Laufe der Jahre schon viel Fortschritt gegeben hat, wurde noch keine Methode gefunden, die alle Situationen zufriedenstellend abdeckt. Es gibt jedoch spezialisierte Verfahren bezüglich einzelner Aspekte, wie Bildinhalte (Struktur, Textur), Art der Bilddaten (Farbbilder, SAR, Tiefenkarten, etc.), Einzelbilder oder Bildsequenzen.

### Textursynthese

Der Hauptzweck der sogenannten Textursynthese ist, künstliche Texturen mit Hilfe eines parametrischen Modells aus einer Grundfunktion zu erstellen. Hierfür werden die Parameter mit einer vorher durchgeführten statistischen Analyse an Beispielen ermittelt. Die Autoren in [PS00] verwenden beispielsweise komplexe Wavelet-Koeffizienten und beziehen Varianz, Schiefe und Wölbung der Beispiele sowie Intensitätsbereich, Schiefe und Wölbung jeder Grundfunktion mit ein. In [HB95] wird die Textur beginnend mit einer groben Auflösung schrittweise synthetisiert und die Auflösung nach und nach erhöht. In jedem Schritt wird eine Faltung mit verschiedenen Filtern durchgeführt und das Intensitäts-Histogramm angepasst.

Die Methoden der Textursynthese liefern eindrucksvolle Ergebnisse, wenn es darum geht, sich stark wiederholende Muster, wie Tierfell, Sand oder Feuer, zu modellieren, ohne dabei aber die geraden Kanten und Kurven zu erhalten. Aus

der Perspektive der Szenenmodellierung können diese Methoden zur Erzeugung von Unterholztexturen unter den extrahierten Bäumen verwendet werden.

### **Methoden mit externen Bildern**

Die Hauptidee dieser Methoden ist, externe Bilder zu berücksichtigen, um fehlende Farb- oder Intensitätswerte vorherzusagen.

In [SLC<sup>+</sup>15] wird eine Videosequenz als externe Quelle verwendet, um Objekte aus einem Einzelbild zu löschen. Hier können zeitliche Nachbarschaften ausgenutzt werden. Im einfachsten Fall kann ein gewichteter Durchschnitt entsprechender Pixel in der Sequenz verwendet werden, um unbekannte Pixel zu füllen. Das Worst-Case-Szenario ist, dass aufgrund der Beleuchtungsänderung, des Aufzeichnungswinkels etc. die Farben verschoben werden können. In diesem Fall werden Korrespondenzen von benachbarten Bildern verwendet, um die Farben auszugleichen. Beispielsweise im Nahbereich ist das Ausrichten der Bilder eine nicht-triviale Aufgabe, da 3D-Strukturen Überdeckungen verursachen können. Ein Lösungsvorschlag für diesen Anwendungsfall findet sich in [BCK16]. In der Arbeit von [YCL<sup>+</sup>16] werden Deep-Learning-Algorithmen angewendet, um Bilder zu vervollständigen, die nur eine sehr kleine Anzahl von bekannten Pixeln haben. Bisher produziert dieser Ansatz beeindruckende Ergebnisse auf Beispielbildern, benötigt aber eine große Bilddatenbank.

Methoden, die auf externen Bildern basieren, sind in der Lage fehlende Informationen mit plausiblen Daten der gleichen Szene auf zumindest realistische Art und Weise zu füllen (vgl. [HE07]). Sie benötigen aber viel Vorbereitungszeit und sind unzuverlässig, wenn keine passenden Daten zur Verfügung stehen.

### **Texturbasierte Methoden**

Die Grundidee dieses Ansatzes ist ein intelligentes Kopieren und Einfügen von Umgebungen von Pixeln im Bild. Dafür wird um jedes Pixel ein Fenster, also

eine quadratische Umgebung gelegt, und anschließend die Fenster von unbekanntem Pixeln stückweise mit ähnlichen Fensterinhalten bekannter Pixel gefüllt. Das größte Problem bei dieser Methode ist die Rechenzeit, da theoretisch jedes Fenster von unbekanntem Pixeln mit jedem Fenster von bekannten Pixeln verglichen werden müssen. Ähnlich wie bei [Tel04] wurde deswegen ein Fast-Marching-Verfahren vorgeschlagen, um die Suche einzuschränken und nicht zu weit weg von dem unbekanntem Pixel zu suchen. Seitdem wurden viele Verbesserungen vorgeschlagen. Zum Beispiel haben Criminisi et al. [CPT04] einen prioritätsbasierten Ansatz entwickelt, der nicht nur an der Grenze des Inpainting-Gebiets sucht, sondern auch entlang der Kanten. Durch die Gewichtung der beiden Ansätze findet die Methode eine Auffüllreihenfolge, die die Kanten fortsetzt, aber gleichzeitig eine Überglättung vermeidet. Es wurden mehrere Aspekte kritisch überprüft und punktuell verbessert: Änderung der Prioritätsterme in [LMGG11] oder Kombinieren von Fenstern, um Rauschen und Artefakte zwischen eingefügten Fenstern zu unterdrücken und Suchräume einzuschränken [BDTL15a]. Für weitere technische Erklärungen verweisen wir hier auf die beiden Übersichtsartikel [GLM14] und [BDTL15b]. Weitere Modifikationen dieses Algorithmus finden sich in [LZ11] oder [HKAK14].

Bisher ist dieser Algorithmus Stand der Technik, weil texturbasierte Ansätze einen Kompromiss zwischen akzeptablen Ergebnissen auch für große Löcher bei kontrollierbarer Rechenzeit eingehen. Deshalb scheinen sie in der Tendenz mehr Aufmerksamkeit zu erhalten als die strukturbasierten Methoden und Methoden mit externen Bildern. Die Rechenzeit ist allerdings immer noch groß und die Ergebnisse in der Mitte von Inpainting-Gebieten sind oft doch nicht zufriedenstellend. Die Priorisierung der Auffüllreihenfolge bleibt eine der wichtigsten Herausforderungen. Eine Verbesserung lässt sich mit Markov-Random-Field-basierten Methoden erreichen. Hier werden die Pixel als Zufallsvariablen betrachtet, die lokal miteinander wechselwirken. Aufgrund einer hohen Anzahl an Unbekanntem und der Komplexität der Nachbarschaftsstrukturen können diese Algorithmen für große Luftbilder beliebig zeitaufwendig werden.

### Strukturbasierte Methoden

Strukturbasierte Methoden können für Inpainting von texturarmen Bildern verwendet werden, oder wenn das Inpainting-Gebiet in einer Raumrichtung kleiner ist als die Skala der Textur. Als Teil von hybriden Methoden sind sie auch für texturierte Bilder vorteilhaft. Von den Autoren in [SLC<sup>+</sup>15] wurden sie nochmals in Interpolationsmethoden, Diffusionsmethoden und variationelle Methoden unterteilt.

Zur ersten Untergruppe wird auf Methoden verwiesen, die auf der Gaußprozess-Regression basieren [RDB94], [ZHW10] und sich für Fernerkundungsbilder bewährt haben.

Im Bereich Maschinelles Sehen ist das Fast-Marching-Verfahren von Telea [Tel04] verbreitet. Die Grundidee besteht darin, Farbintensität senkrecht zur Grenze zwischen dem Inpainting-Gebiet und dem bekannten Bereich auszubreiten. Bei dieser Methode wird das Inpainting-Gebiet Stück für Stück von außen nach innen aufgefüllt. Ein schmales Band um das Inpainting-Gebiet wird als Quellmenge verwendet, mit dem die Intensitäten in jedem Schritt berechnet werden. Für die Zuordnung der Farbwerte wird ein gewichteter Durchschnitt der Farbwerte innerhalb des schmalen Bandes berechnet, der die Randstruktur erhält, indem auch der Gradient einbezogen wird. Verbesserungen der Methode von Talea ist immer noch Teil aktueller Forschung, z. B. werden in [BM07] die Wahl der Gewichte verbessert oder in [Mär11] die Priorisierung der Elemente im schmalen Band. Der Algorithmus ist schnell und einfach, außerdem können Klassifizierungsergebnisse für verschiedene Klassen berücksichtigt werden, indem man die Gewichte anpasst.

In den variationellen Inpainting-Methoden wird ein Regularisierungsterm hinzugefügt, der eine Modellannahme beinhaltet. Zum Beispiel haben wir in [CS01] die Wärmeleitungsgleichung. In [KBS16] wird eine modifizierte Wärmeleitungsgleichung vorgeschlagen, die Klassen berücksichtigt und die Kanten zwischen Klassen erhält. Eine weitere Möglichkeit ist bewährte Modelle anzupassen, z. B. Segmentierungsmodelle (vgl. [ES02]), Strömungsmodelle (vgl. [BBS01]) oder für binäre Bilder die Cahn-Hilliard-Gleichung, ein Modell aus den Materialwissenschaften (vgl. [BEG07]). Zu letzterem gibt es eine Erweiterung auch für Grauwertbilder, das sogenannte TV- $H^{-1}$ -Inpainting (vgl. [BHS09] und [SB11]). Ein

mathematischer Überblick über Inpainting-Methoden, die auf partiellen Differentialgleichungen basieren, wird in [SC02] gegeben und ein allgemeiner mathematischer Rahmen entwickelt.

## Hybride Ansätze

Die häufigste Unterklasse von hybriden Ansätzen ist eine Kombination von struktur- und texturbasierten Techniken. In [BVSO03] und [CBDAN14] werden die Bilder in eine strukturelle und in eine textuelle Komponente zerlegt.

Für die Trennung wird ein sogenanntes Cartoonbild berechnet, welches den strukturellen Anteil repräsentiert. Dafür werden Techniken angewendet, die auf stückweise glatten Bildmodellen basieren, wie z. B. nichtlinearer Diffusion oder bilateraler Filterung [WOG06], totale Variationsminimierung [VO03], TV- $H^{-1}$ -Inpainting [HLZ<sup>+</sup>16] oder Segmentierungsalgorithmen [JT03]. Die Textur-Komponente ist die Differenz von Cartoonbild und Originalbild. Die zwei Komponenten werden danach jeweils mit einem strukturbasierten und einem texturbasierten Ansatz rekonstruiert und wieder zusammengefügt.

Von besonderem Interesse ist das Cahn-Hilliard-Inpainting und das TV- $H^{-1}$ -Inpainting, mit dem sich diese Arbeit beschäftigt. Zum einen gibt es effiziente Lösungsverfahren, zum anderen hat die Lösung nützliche Eigenschaften für das Inpainting von Strukturbildern. Als Teil einer hybriden Methode, also in Kombination mit einer texturbasierten Methode, ist es hervorragend zur Bereinigung von Fassadentexturen geeignet. Als Stand der Technik gilt hier die Methode von Criminisi, die für die Beispiele im letzten Abschnitt verwendet wird.

Im nächsten Kapitel betrachten wir eine Möglichkeit, wie man Bilder mathematisch behandeln kann und setzen uns mit einer kurzen Einführung in variationelle Methoden für Inpainting auseinander.

## 2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden variationelle Methoden für Inpainting eingeführt. Zuerst stellt sich die Frage, wie man ein Bild mit mathematischen Objekten beschreiben kann.

### 2.1 Mathematischer Rahmen

Wir bezeichnen den (oft rechteckigen) Bildbereich mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , welches ein beschränktes und offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand ist. Ein Bild im kontinuierlichen Modell wird repräsentiert durch eine Funktion  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $d = 1$  für ein Graustufenbild oder  $d = 3$  für ein Farbbild. Weiter ist  $D \subset \Omega$  ein Gebiet, auf dem das Eingabebild beschädigt ist (Inpainting-Gebiet). Für das Inpaintingproblem ist eine geeignete Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  zu finden, welche das Eingabebild  $I$  auf dem unbekanntem/beschädigten Bildbereich  $D \subset \Omega$  rekonstruiert und in  $\Omega \setminus D$  dem ursprünglichen Bild möglichst ähnlich ist. Im folgenden sei stets  $d = 1$ .

Für das Bildmodell wählen wir ganz pragmatische Funktionsräume mit mathematisch „guten“ Eigenschaften. Geeignet sind beispielsweise Banachräume, also vollständig normierte Funktionsräume. Diese Wahl ist sinnvoll, da wir mit der durch die Norm erzeugten Metrik Abstände zwischen Bildern berechnen können und so die Ähnlichkeit zwischen Bildern quantifizieren können. Außerdem haben wir durch die Vollständigkeitseigenschaften keine Probleme, wenn wir Grenzwerte ausrechnen wollen.

#### **Bemerkung 2.1**

Häufig werden die Funktionsräume  $L^2(\Omega)$  und  $H^r = W^{r,2}(\Omega)$  verwendet, die zusätzlich zur Vollständigkeitseigenschaft mit einem Skalarprodukt ausgestattet

und damit Hilberträume sind. Wir verwenden die Notation

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_2 &= \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \\ \|u\|_2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}, & \text{für } u, v \in L^2(\Omega) \text{ und} \\ \langle u, v \rangle_{H^r} &= \sum_{|\alpha| \leq r} \langle \partial_{\alpha} u, \partial_{\alpha} v \rangle_2, \\ \|u\|_{H^r} &= \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^r}}, & \text{für } u, v \in H^r(\Omega). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.2**

Ein abgeschlossener Unterraum  $U$  eines Hilbertraums  $V$  ist mit dem  $V$ -Skalarprodukt und der  $V$ -Norm selbst ein Hilbertraum. Es gilt die Cauchy-Schwarz- und die Young-Ungleichung

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|v\|^2, \forall \varepsilon > 0. \quad (2.1)$$

Ferner werden mitunter die  $L^p$ -Räume verwendet mit den Normen

$$\begin{aligned} \|v\|_p &= \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \leq p < \infty \text{ bzw.} \\ \|v\|_{\infty} &= \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)|. \end{aligned}$$

Ein Nachteil ist, dass die  $L^p$ -Räume für  $p \neq 2$  keine Hilberträume, sondern nur Banachräume sind, d. h. kein Skalarprodukt besitzen. Außerdem gilt für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq q, p \leq \infty$  die Hölder-Ungleichungen und die Young-Ungleichung

$$\int_{\Omega} u(x)v(x) dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \leq \frac{\varepsilon}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q\varepsilon^{q/p}} \|v\|_q^q, \quad \forall \varepsilon < 0.$$

Ein weiterer Raum, welcher in der Arbeit verwendet wird, ist  $H^{-1}(\Omega)$ , der Dualraum von  $H_0^1(\Omega)$  mit der Norm  $\|\cdot\|_{-1}$  definiert durch

$$\|f\|_{-1}^2 = \|\nabla \Delta^{-1} f\|_2^2 = \int_{\Omega} (\nabla \Delta^{-1} f)^2 dx \quad (2.2)$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{-1} := \int_{\Omega} (\nabla \Delta^{-1} f) (\nabla \Delta^{-1} g) dx. \quad (2.3)$$

Der Operator  $\Delta^{-1} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  bezeichnet das Inverse der Laplace-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen, d. h.:  $u = \Delta^{-1}f \in H_0^1(\Omega)$  für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  ist die eindeutige schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Außerdem gilt für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  die Abschätzung  $\|f\|_{-1} \leq C_1 \|f\| \leq C_2 \|\nabla f\|$ , falls  $f$  zusätzlich in  $L^2(\Omega)$  bzw.  $H_0^1(\Omega)$  liegt für  $C_1, C_2 > 0$ .

Eine weitere wichtige Ungleichung ist die Poincaré-Ungleichung.

**Satz 2.3 (Poincaré-Ungleichung)**

Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet, dann existiert eine Konstante  $C_p > 0$ , so dass gilt

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

mit  $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dx$ .

*Beweis.* Ein Beweis findet sich in [Eva10, Kap. 5.8 Theorem 1, S. 290]. □

Wir benötigen außerdem die Sobolev-Einbettungen.

**Satz 2.4 (Sobolev-Einbettungen)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt mit Lipschitzrand und  $q \geq 1$ , dann ist

- die Einbettung  $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$  stetig,
- die Einbettung  $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$  stetig,
- und die Einbettung  $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  stetig und kompakt.

*Beweis.* Ein Beweis findet sich in [AF03, Kap. 4 Satz 4.2 S.80]. □

Nach Hadamard können Probleme in zwei Klassen eingeteilt werden, den gut-gestellten und den schlecht-gestellten Problemen. Bei schlecht-gestellten Problemen sind zusätzliche Annahmen nötig, um eine zufriedenstellende Lösung zu erhalten.

**Definition 2.5 (Gut-gestellte und schlecht-gestellte Probleme)**

Seien  $X, Y$  normierte Räume mit offenen Teilmengen  $U \subset X, V \subset Y$  und  $F : U \rightarrow V$  ein stetiger Operator. So heißt die Gleichung  $F(x) = y$  mit  $y \in V$  gut gestellt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $F(x) = y$  besitzt eine Lösung für alle  $y \in V$  (Existenz),
- $F(x) = y$  besitzt höchstens eine Lösung für alle  $y \in V$  (Eindeutigkeit),
- jede Folge  $x_n \subset U$ , welche  $F(x_n) \rightarrow y = F(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  genügt, konvergiert gegen die Lösung  $x$  (Stabilität).

Das Problem heißt schlecht-gestellt, falls eine der Eigenschaften nicht erfüllt ist.

Inpainting gehört in die Klasse der inversen schlecht-gestellten Probleme, d. h. man will von der Wirkung auf die Ursache zurückschließen. Das direkte Problem ist das Löschen des Bildes auf dem beschädigten Bereich und die Aufgabe ist es, das Bild zu rekonstruieren, indem das Löschen wieder rückgängig gemacht wird. Dies ist ein schlecht-gestelltes Problem, da die gelöschten Informationen nur geraten werden können und ohne weitere Informationen das Problem nicht eindeutig lösbar ist.

## 2.2 Variationelle Methoden

Variationelle Methoden berechnen das rekonstruierte Bild als Minimierer eines geeigneten Funktionals. Da wir minimierende Folgen suchen, sind die Vollständigkeitseigenschaften der Banachräume nützlich. Das Funktional besteht aus zwei Termen, dem sogenannten Treuetern, der das Bild im bekannten Bereich erhält, und dem Bildmodell. Mit variatonellen Methoden überführen wir das schlecht-gestellte Problem mit einem passenden Bildmodell in ein gut-gestelltes Problem.

Das Minimierungsproblem lautet wie folgt: Seien  $B_1$  und  $B_2$  Banachräume über  $\mathbb{R}^2$  mit  $B_2 \subset B_1$  und  $I \in B_1$  das gegebene Eingabebild. Wir minimieren das Funktional  $J : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(u) = R(u) + \frac{1}{2} \|\lambda(\cdot)(I - u)\|_{B_1}^2, \quad (2.5)$$

wobei der erste Term  $R : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$  einen Regularisierungsterm bezeichnet, welcher ein inhärentes Bildmodell enthält und

$$\lambda(x) = \lambda_0 \mathbb{1}_{\Omega \setminus D} = \begin{cases} 0 & x \in D, \\ \lambda_0 & x \in \Omega \setminus D \end{cases} \quad (2.6)$$

für eine Konstante  $\lambda_0 \gg 1$ . Der zweite Term  $\frac{1}{2} \|\lambda(I - u)\|_{B_1}$  wird mit Treueterm bezeichnet und erzwingt, dass der Minimierer außerhalb des Inpainting-Gebiets „nahe“ am Originalbild  $I$  ist.

In dieser Formulierung hat das Bildmodell einen entscheidenden Einfluss auf das Inpaintingergebnis, so dass man je nach Wahl des Regularisierungsterms unterschiedliche Resultate erhält. In der Bildverarbeitung wurden schon einige solcher Bildmodelle für die Verbesserung von Schärfe, Rauschen und Bildsegmentierung vorgeschlagen, die für Inpainting angepasst werden können.

Es ist allerdings nicht jedes Bildmodell gleichermaßen geeignet. Ein Problem ist beispielsweise, dass bei Rauschen und Unschärfe, die Störungen nur lokal sind und beim Inpainting unter Umständen große Inpainting-Gebiete rekonstruiert werden müssen.

Um die Extremstellen des Funktionals  $J$  zu bestimmen benötigen wir einen Ableitungsbegriff für Funktionale.

**Definition 2.6 (Fréchetableitung, Gradient)**

Sei  $V$  ein Hilbertraum. Dann heißt eine Abbildung  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  Fréchet-differenzierbar, wenn die Fréchetableitung definiert durch  $G : V \rightarrow V^*$  mit

$$\frac{1}{\|h\|_V} |J(u + h) - J(u) - G(u)(h)| \rightarrow 0, \quad \text{für } \|h\|_V \rightarrow 0$$

existiert sowie linear und stetig ist.

Im Falle  $V = L^2(\Omega)$  ist der Gradient  $\nabla_{L^2} J$  bezüglich des  $L^2$ -Skalarprodukts definiert durch

$$G(u)(h) = \langle \nabla_{L^2} J(u), h \rangle_2.$$

Im Falle  $V = H^{-1}(\Omega)$  ist der Gradient  $\nabla_{H^{-1}} J$  bezüglich des  $H^{-1}$ -Skalarprodukts definiert durch

$$G(u)(h) = \langle \nabla_{H^{-1}} J(u), h \rangle_{-1}.$$

Außerdem erhalten wir mit der Rechnung

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{H^{-1}} J(u), h \rangle_{-1} &= \langle \nabla \Delta^{-1} \nabla_{H^{-1}} J(u), \nabla \Delta^{-1} h \rangle_2 \\ &= \langle -\Delta^{-1} \nabla_{H^{-1}} J(u), h \rangle_2 + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\Delta^{-1} \nabla_{H^{-1}} J(u)}_{=0} \nabla \Delta^{-1} h \, d\sigma \\ &= \langle \nabla_{L^2} J(u), h \rangle_2 \end{aligned}$$

eine formale Beziehung  $\nabla_{H^{-1}} J(u) = -\Delta(\nabla_{L^2} J(u))$ , wobei dann  $\nabla_{L^2} J \in H_0^1(\Omega)$  gelten muss.

Unter einigen Regularitätsannahmen an den Minimierer  $u$  und an das Funktional  $J$  löst ein Minimierer die Optimalitätsbedingung, d. h. dass die Fréchet-Ableitung von  $J$  im Punkt  $u$  verschwindet. Im Falle  $B_1 = L^2(\Omega)$  ist das

$$-\nabla R(u) + \lambda(I - u) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.7)$$

Dies entspricht einer stationären partiellen Differentialgleichung.

Eine zeitabhängige Version von (2.7), welche man Gradientenverfahren interpretieren kann. Dabei bezeichnen wir mit  $u(\cdot, t)$  die zeitliche Entwicklung eines Minimierers und suchen Lösungen von

$$\partial_t u = -\nabla R(u) + \lambda(I - u) \quad \text{in } \Omega \quad (2.8)$$

mit einem beliebigen Anfangswert  $u(\cdot, 0) = u_0$ . Falls es eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.8) gibt, für die zusätzlich der Grenzwert  $t \rightarrow \infty$  existiert, dann ist dieser Grenzwert Lösung von (2.7). Eine weitere Klasse von Inpainting-Verfahren dieser Form ergeben sich nicht als Variationsproblem, sondern direkt als Evolutionsgleichung:

$$\partial_t u = F(x, u, Du, D^2u, \dots) + \lambda(I - u), \quad (2.9)$$

wobei  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \dots \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 2.3 Beispiele - Segmentierung für Inpainting

Die Erzeugung von zusammenhängenden Regionen durch Zusammenfassung benachbarter Pixel entsprechend einem bestimmten Homogenitätskriterium bezeichnet man als Segmentierung. Als Beispiel für ein Segmentierungsmodell für Inpainting wird in diesem Abschnitt das Mumford-Shah-Funktional nach [ES02] vorgestellt. Das Mumford-Shah-Funktional wurde 1989 von David Mumford und Jayant Shah eingeführt. Es wird für die Segmentierung von Bildern eingesetzt. Das bedeutet, dass die Flächen mit signifikanten Objekten aus dem Bild extrahiert und mit einer Durchschnittsfarbe gefüllt werden.

Dafür wird das folgende Minimierungsproblem gelöst: Finde für das Eingabebild  $I \in L^2(\Omega)$  ein  $u \in L^2(\Omega)$  und ein  $K \subset \Omega$ , welches das folgende Funktional minimiert:

$$MS(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \beta \text{Length}(K) + \lambda_0 \int_{\Omega} (I - u)^2 dx, \quad (2.10)$$

wobei  $K \subset \Omega$  eine Vereinigung von Kurven bezeichnet, die die Kanten des gegebenen Bildes  $I(x)$  approximieren,  $\text{Length}(K)$  das 1-dimensionale Hausdorffmaß von  $K$  bezeichnet, welches die Länge der Menge  $K$  misst und  $\lambda_0, \beta$  nicht-negative Konstanten sind, welche die drei Terme von (2.10) gewichten. Anschaulich misst der erste Term die Homogenität der einzelnen Flächen, der zweite Term die Länge der Ränder der Flächen und der dritte Term den Abstand zum Originalbild. Bei einem segmentierten Bild sollen alle Größen möglichst klein sein.

Das Funktional kann für Inpainting Probleme angepasst werden, indem der letzte modifiziert wird. Hierfür wird die Konstante  $\lambda_0$  durch die Funktion  $\lambda = \lambda_0 \mathbb{1}_{\Omega \setminus D}$  ersetzt, also

$$MSI(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \beta \text{Length}(K) + \int_{\Omega} \lambda(x)(I - u)^2 dx. \quad (2.11)$$

Funktionale der Form (2.11) sind schwierig zu behandeln, weil unter anderem über eine Vereinigung von Kurven minimiert werden soll. Beispielsweise führten Ambrosio und Tortorelli eine Familie von elliptischen Funktionalen ein, welche das Mumford-Shah Funktional approximiert und deren numerische Behand-

lung leichter ist.

Als zweites Beispiel führten Esedoglu und Shen eine Variante des Mumford-Shah-Funktional (2.11) ein, welche die Krümmung der Kanten einbezieht. Es hat die Form

$$MSE(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_K (\alpha + \beta \kappa^2) d\sigma + \int_{\Omega} \lambda(x)(I - u)^2, \quad (2.12)$$

wobei  $\kappa$  die Krümmung von  $K$  bezeichnet. Eine Approximation von (2.12) lautet:

$$MSE_{\varepsilon}(u, z) = \int_{\Omega} \left( z^2 |\nabla u|^2 + \alpha \left[ \varepsilon |\nabla z|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(z) \right] + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[ 2\varepsilon \nabla z - \frac{1}{\varepsilon} F'(z) \right]^2 dx \right) + \int_{\Omega} \lambda(I - u)^2 dx, \quad (2.13)$$

wobei  $F(z)$  das Doppelmuldenpotential  $F(z) = z^2(z - 1)^2$  bezeichnet. Hier wird die Funktion  $z$  eingeführt, welche die Kanten approximiert. Das Gradientenabstiegsverfahren von (2.13) im Bezug auf das  $L^2$ -Skalarprodukt ergibt ein System von gekoppelten Diffusionsgleichungen. Die zusätzlichen Krümmungsterme, welche in (2.12) eingeführt wurden, ermöglichen die Kontrolle über die Kantenrichtungen und Lage der Kanten.

Ein bedeutender Nachteil des zugrundeliegenden Modells ist die Existenz vieler lokaler Minima. Das hat zur Folge, dass das entsprechende Gradientenabstiegsverfahren leicht in einem lokalen Minimum hängen bleiben kann, selbst wenn robuste, stabile und effiziente Lösungsverfahren eingesetzt werden.

Im nächsten Abschnitt stellen wir das Cahn-Hilliard-Inpainting vor, welches dem Modell in (2.13) ähnlich, aber numerisch leichter zu behandeln ist.

### 3 Das Cahn-Hilliard-Inpainting

Die Cahn-Hilliard-Gleichung wurde von John Cahn und John Hilliard 1957 verwendet, um die Phasentrennung von Flüssigkeiten und Festkörpern zu beschreiben. In [BEG07] wird vorgeschlagen, die Cahn-Hilliard-Gleichung als Modell zum Inpainting von binären Bildern (z. B. Schatten oder Masken) zu verwenden. Außerdem ist sie verwandt mit dem Esedoglu-Shen-Modell des vorherigen Abschnitts und hat viele Eigenschaften mit dessen Gradientenabstieg gemeinsam. Der Vorteil ist allerdings die Verfügbarkeit von schnelleren Lösungstechniken (siehe Abschnitt 3.3).

Natürlich stellt sich die Frage, ob die einfachere Cahn-Hilliard-Gleichung auch für Inpainting verwendet werden kann. Wir formulieren das Cahn-Hilliard-Inpainting wie folgt:

Sei  $I \in L^2(\Omega)$  ein gegebenes binäres Bild auf dem beschränkten, offenen Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit Lipschitz-Rand und  $D \subset \Omega$  das Inpainting-Gebiet. Wir definieren  $u: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-1, 1]$  und  $u(\cdot, t)$  als die rekonstruierte Version von  $I$  zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  unter der Gleichung

$$\partial_t u = \Delta \left( -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) + \lambda(I - u) \quad (3.1)$$

mit  $\lambda = \lambda_0 \mathbb{1}_{\Omega \setminus D}$  und  $F(u) = (u + 1)^2(u - 1)^2$  (vgl. Abbildung 3.1).

Die Gleichung (3.1) entspricht der Cahn-Hilliard-Gleichung mit zusätzlichem Treueterm auf der rechten Seite.

Es ist zu beachten, dass das Cahn-Hilliard-Inpainting kein Gradientenabstiegsverfahren eines Funktionals ist, sondern als Superposition von Gradientenabstiegsverfahren von zwei verschiedenen Funktionalen interpretiert werden kann.

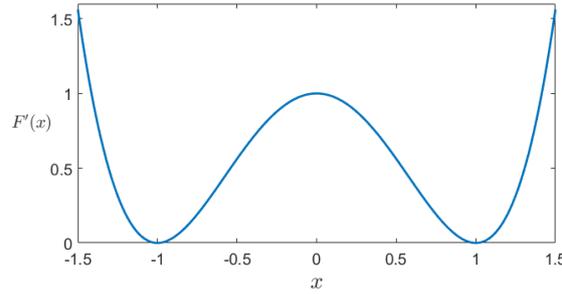


Abbildung 3.1: Das Potential  $F$  bewirkt, dass  $u(\cdot, t)$  im Laufe der Evolution Funktionswerte nahe an  $-1$  und  $1$  annimmt.

Die Cahn-Hilliard-Gleichung ist das Gradientenabstiegsverfahren bezüglich des  $H^1$ -Skalarprodukts des Funktionals  $E_1 : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$E_1(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx \quad (3.2)$$

welches schon als Teil des Variationsproblems für das Esedoglu-Shen-Modell im vorherigen Abschnitt erschienen ist. Den Gradienten kann man mit der Lagrangefunktion von  $E_1$  bestimmen. Sie ist gegeben durch

$$L_1(p, s) = \frac{\varepsilon}{2} p^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(s),$$

und damit gilt

$$\nabla_{L^2} E_1(u) = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial L_1}{\partial p} \right) (\nabla u, u) + \left( \frac{\partial L_1}{\partial s} \right) (\nabla u, u) = -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u).$$

Also ist  $\nabla_{H^{-1}} E_1$  gegeben durch

$$\nabla_{H^{-1}} E_1(u) = -\Delta \nabla_{L^2} E_1(u) = -\Delta \left( -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right). \quad (3.3)$$

Außerdem ergibt sich der Treueterm aus dem Gradienten des Funktionals  $E_2 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$E_2(u) = \frac{1}{2} \|\lambda(I - u)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.4)$$

Mit der Lagrangefunktion

$$L_2(s) = \frac{1}{2}\lambda(I - s)^2$$

gilt

$$\nabla_{L^2} E_2(u) = \frac{\partial L}{\partial s}(u) = -\lambda(u - I). \quad (3.5)$$

In den folgenden Abschnitten werden einige wichtige Resultate bezüglich der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung (3.1) und die Existenz von schwachen Lösungen im stationären Fall gezeigt.

### 3.1 Schwache Lösungen im dynamischen Fall

Die Frage zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für die Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung ist eng mit der Lösbarkeit der Cahn-Hilliard-Gleichung verwandt, die sich für den Fall  $\lambda_0 = 0$  ergibt. Der Unterschied zwischen den Gleichungen ist der Treueterm, der zusätzlich betrachtet werden muss.

Wir betrachten das zeitabhängige Problem auf einem kompakten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit dem Inpainting-Gebiet  $D \subset \Omega$  mit Neumann-Randbedingungen, also

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta \left( -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) + \lambda(I - u) & \text{in } \Omega, \\ u(0, x) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

Wir wollen untersuchen, in welchen Räumen die Lösungen für diese Gleichung liegen. Zu Beginn definieren wir den Raum

$$V = \left\{ f \in H^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \right\}. \quad (3.7)$$

Ausgestattet mit dem  $H^2(\Omega)$ -Skalarprodukt ist  $V$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H^2(\Omega)$ , denn es gilt für alle  $f_n \subset V$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \nabla f \phi \nu d\sigma &= \int_{\partial\Omega} (\nabla f - \nabla f_n) \phi \nu d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}((\nabla f - \nabla f_n) \phi) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \phi (\nabla f - \nabla f_n) + \phi (\Delta f - \Delta f_n) dx \rightarrow 0, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Damit ist  $V$  auch ein Hilbertraum.

Ein sinnvolles Setting für Lösungen von (3.6) sind die Bochnerräume

$$L^2([0, T]; V) := \left\{ v: [0, T] \rightarrow V, t \mapsto v(\cdot, t) : \int_0^T \|v(\cdot, t)\|_V^2 dt < \infty \right\}, \quad (3.8)$$

$$C([0, T]; L^2(\Omega)) := \left\{ v: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega), t \mapsto v(\cdot, t) : \sup_{t \in [0, T]} \|v(\cdot, t)\|_2 < \infty \right\}, \quad (3.9)$$

$$L^2([0, T]; V^*) := \left\{ v: [0, T] \rightarrow V^*, t \mapsto v(\cdot, t) : \int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{V^*}^2 dt < \infty \right\}. \quad (3.10)$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen schwachen Lösungsbegriff zu formulieren, je nach dem, ob auch die partielle Ableitung nach der Zeit auf die Testfunktion gelegt wird oder nicht.

Eine schwache Lösung von (3.6) ist definiert durch: Finde  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\langle \partial_t u, v \rangle + \langle \varepsilon \Delta u, \Delta v \rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u, \nabla v \right\rangle = \langle \lambda(x)(I - u), v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (3.11)$$

wobei wir noch näher bestimmen müssen in welchem Raum  $u$  genau liegt.

### Lemma 3.1

*Klassische Lösungen der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung (3.6) sind auch schwache Lösungen.*

*Beweis.* Sei  $u$  Lösung der Differentialgleichung (3.6). Dann gilt

$$\partial_t u + \Delta(\varepsilon \Delta u) - \Delta \frac{1}{\varepsilon} F'(u) = \lambda(I - u) \quad \text{in } \Omega.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit einer Funktion  $v \in V$  und integrieren über  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \partial_t uv dx + \int_{\Omega} \Delta(\varepsilon \Delta u) v dx - \int_{\Omega} \Delta \frac{1}{\varepsilon} F'(u) v dx = \int_{\Omega} \lambda(I - u) v dx.$$

Mit partieller Integration erhalten wir für den zweiten und dritten Term unter Berücksichtigung der Randbedingungen, die in  $V$  enthalten sind, und den Randbedingungen von (3.6)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(\varepsilon \Delta u) v dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla(\varepsilon \Delta u) v dx = - \int_{\Omega} \nabla(\varepsilon \Delta u) \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \varepsilon v \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon \Delta u \nabla \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \varepsilon \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} \varepsilon \Delta u \Delta v dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta \frac{1}{\varepsilon} F'(u) v dx &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{\varepsilon} F'(u) v dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) \cdot \nu d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u \nabla v dx. \end{aligned}$$

Insgesamt löst  $u$  die Gleichung (3.11). □

Man könnte die Gleichung (3.11) als semi-schwache Formulierung bezeichnen, da die Testfunktionen nur von der Ortsvariablen abhängen. Die Integrale existieren, wenn  $I \in L^2(\Omega)$ ,  $\partial_t u(\cdot, t) \in V^*(\Omega)$  und  $u(\cdot, t) \in V$  für  $t \in [0, T]$ . Wobei noch zu prüfen ist, ob dann auch das Integral für den nichtlinearen Term  $\left\langle \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u, \nabla v \right\rangle$  endlich ist.

**Lemma 3.2**

Seien  $u, v \in H^2(\Omega)$ , dann ist

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u, \nabla v \right\rangle < \infty.$$

*Beweis.* Laut Voraussetzung ist  $u \in H^2(\Omega)$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein kompaktes Gebiet. Nach der Soboleveinbettung ist  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$  stetig. Also ist auch  $u^2 \in C(\Omega)$

und  $\|u^2\|_\infty < \infty$ . Indem wir die Hölder-Ungleichung zweimal anwenden, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u, \nabla v \right\rangle &= \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (12u^2 - 4) \nabla u \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (12u^2 \nabla u \nabla v - 4 \nabla u \nabla v) \, dx \\ &\leq \frac{12}{\varepsilon} \|u^2\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \frac{4}{\varepsilon} \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Da alle Normen auf der rechten Seite existieren, ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Damit haben wir sinnvolle Lösungsräume zu einzelnen Zeitpunkten. Um Lösungsräume für ganz  $u$  zu erhalten, betrachten wir die Energieungleichung für glatte Lösungen. Diese erhalten wir, wenn wir  $v = u(\cdot, t)$  in (3.11) einsetzen und die Zeit integrieren, also erhalten wir mit (3.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 + \varepsilon \int_0^T \|\Delta u(t)\|^2 \, dt + \int_0^T \frac{12}{\varepsilon} \|u(t)^2\|_\infty \|\nabla u(t)\|^2 \, dt \\ + \int_0^T \langle \lambda u(t), u(t) \rangle \, dt \\ \leq \int_0^T \|u(0)\|^2 \, dt + \int_0^T 4 \|\nabla u(t)\|^2 \, dt + \int_0^T \langle \lambda u(t), I \rangle \, dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Integrale existieren hier, wenn wir  $u \in L^2([0, T]; V)$  fordern.

Mit diesem Ergebnis können wir unter bestimmten Voraussetzungen an  $\lambda_0$  zeigen, dass für schwache Lösungen  $u \in L^2([0, T]; V)$  von (3.6) eine höhere Regularität erreicht werden kann. Dafür benötigen wir das folgende Lemma und die Gronwall-Ungleichung.

**Lemma 3.3**

Sei  $u$  eine schwache Lösung von (3.6), dann existieren Konstanten  $C > 0$ , welche nur abhängig ist von  $\varepsilon, \lambda_0, I, |D|$  und  $|\Omega|$ , sowie eine Konstante  $\theta \in \mathbb{R}$ , welche nur abhängig ist von  $\lambda_0, I, \varepsilon$  mit

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} u^2 \, dx \leq C - \theta \int_{\Omega} u^2 \, dx. \quad (3.14)$$

Außerdem gilt  $\theta(\lambda_0, I, \varepsilon) > 0$  für  $\lambda_0 > \frac{16C^3}{\varepsilon^2}$ .

*Beweis.* Für den Beweis benötigen wir die folgenden drei Ungleichungen:

1. Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass  $\forall \delta > 0$  gilt:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \delta \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{C}{\delta} \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (3.15)$$

Mit partieller Integration und der Youngschen-Ungleichung lässt sich nachrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \left| \int_{\Omega} -u \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u \nabla u \cdot \nu}_{=0} dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\varepsilon \Delta u| \left| \frac{u}{\varepsilon} \right| dx \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\Omega} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (3.15) folgt mit  $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2}$  und  $C = \frac{1}{4}$ .

2. Es existiert eine Konstante  $C > 0$  mit

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla(u^2)| dx + C \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx, \quad (3.16)$$

denn mit der Poincaré-Ungleichung lässt sich nachrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{|\Omega|}{|\Omega \setminus D|} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left| u^2 - \frac{1}{|\Omega \setminus D|} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dy \right| dx \\ &\leq C_p \int_{\Omega} |\nabla(u^2)| dx. \end{aligned}$$

3. Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $\delta > 0$  gilt:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u^2)| dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{2\alpha}. \quad (3.17)$$

Denn mit der Hölderungleichung und der Youngschen Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u^2)| dx &= \int_{\Omega} |2u \nabla u| dx \leq 2 \sqrt{\int_{\Omega} 1 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |u \nabla u|^2 dx} \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{|\Omega|}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (3.17) folgt mit  $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$  und  $C = \frac{|\Omega|}{4}$ .

Durch Kombination der drei Ungleichungen erhalten wir

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \delta \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{C\alpha}{2\delta} \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{\delta} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx + \frac{C}{2\alpha\delta}. \quad (3.18)$$

Nun können wir die Änderungsrate der  $L^2$ -Norm der Lösung berechnen und erhalten mit partieller Integration und der Eigenschaft von  $F$ , dass Konstanten  $C > 0$  und  $\gamma > 0$  existieren mit  $F''(x) > \gamma x^2 - C$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx &= -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u \Delta F'(u) dx + \lambda_0 \int_{\Omega \setminus D} u(I - u) dx \\ &= -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\nabla u|^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega \setminus D} u(I - u) dx \\ &\leq -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \lambda_0 \int_{\Omega \setminus D} u(I - u) dx. \end{aligned}$$

Außerdem kann man den letzten Term mit der Young-Ungleichung durch

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int_{\Omega \setminus D} u(I - u) dx &= \lambda_0 \int_{\Omega \setminus D} uI dx - \lambda_0 \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx \\ &\leq \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega \setminus D} I^2 dx - \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

abschätzen. Mit (3.16) schätzen wir den letzten Term von (3.19) weiter ab und erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx &\leq -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega \setminus D} I^2 dx + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u^2)| dx - \frac{\lambda_0}{2C} \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

Nun können wir mit (3.17) und  $\alpha = \delta_1$  den vorletzten Term und mit (3.18) den dritten Term abschätzen, wobei wir wieder  $\alpha = \delta_1$  und  $\delta = \delta_2$  wählen. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx &\leq -\varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C\delta_2}{\varepsilon} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx \\ &\quad + \frac{C\delta_1}{2\varepsilon\delta_2} \int_{\Omega \setminus D} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{2\varepsilon\delta_1\delta_2} + \frac{C}{\varepsilon\delta_2} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega \setminus D} I^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda_0 \delta_1}{4} \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{C \lambda_0}{4 \delta_1} - \frac{\lambda_0}{2C} \int_{\Omega} u^2 dx \\
 & \leq \left( -\varepsilon + \frac{C \delta_2}{\varepsilon} \right) \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \left( -\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{C \delta_1}{2 \varepsilon \delta_2} + \frac{\lambda_0 \delta_1}{4} \right) \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx \\
 & + \left( \frac{C}{\varepsilon \delta_2} - \frac{\lambda_0}{2C} \right) \int_{\Omega} u^2 dx + \left( \frac{C}{2 \varepsilon \delta_1 \delta_2} + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega \setminus D} I^2 dx + \frac{C \lambda_0}{4 \delta_1} \right)
 \end{aligned}$$

Wir beobachten:

1. falls  $\frac{C \delta_2}{\varepsilon} < \varepsilon$  gilt, sind die Terme mit  $\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx$  insgesamt negativ,
2. falls  $\frac{C \delta_1}{2 \varepsilon \delta_2} + \frac{\lambda_0 \delta_1}{4} < \frac{\lambda_0}{\varepsilon}$  gilt, sind die Terme mit  $\int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx$  insgesamt negativ,
3. und falls  $\frac{C}{\varepsilon \delta_2} < \frac{\lambda_0}{2C}$  gilt, sind die Terme mit  $\int_{\Omega} u^2 dx$  auch insgesamt negativ.

Wir wählen zuerst  $\delta_2 = \frac{\varepsilon^2}{8C}$ , dann ist die erste Bedingung erfüllt. Dann wählen wir  $\delta_1$  mit  $0 < \delta_1 < \frac{4\varepsilon^2 \gamma}{16C^2 + \lambda_0 \varepsilon^3}$  für die zweite Bedingung.

Mit einer den Konstante  $C(\varepsilon, \lambda_0, I, |D|, |\Omega|) > 0$  und  $\theta(\lambda_0, I, \varepsilon)$  gilt also

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx \leq C(\varepsilon, \lambda_0, I, |D|, |\Omega|) - \theta(\lambda_0, I, \varepsilon) \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Unter der Voraussetzung  $\lambda_0 > \frac{16C^3}{\varepsilon^2}$  erhalten wir sogar ein positives  $\theta > 0$ .  $\square$

### Lemma 3.4 (Gronwall-Ungleichung)

Sei  $u$  differenzierbar und erfülle die Ungleichung

$$\partial_t u \leq g(t)u(t) + h(t) \tag{3.20}$$

für eine stetige Funktion  $g$  und lokal integrierbare Funktion  $h$ . Dann gilt die Ungleichung

$$u(t) \leq u(0)e^{G(t)} + \int_0^t e^{G(t)-G(s)} h(s) ds \tag{3.21}$$

für

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds. \tag{3.22}$$

*Beweis.* Setze  $\phi(t) = e^{-G(t)}$ , dann ist

$$\partial_t(\phi u) = u\partial_t\phi + \phi\partial_t u = -g\phi u + \phi\partial_t u \leq -g\phi u + \phi(gx + h) = \phi h.$$

Also gilt mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\phi(t)u(t) - \phi(0)u(0) \leq \int_0^t \phi(s)h(s) ds$$

und mit  $\phi(0) = 1$  und nach Division durch  $\phi$  die Behauptung.  $\square$

Das Gronwall-Lemma angewandt auf Ungleichung (3.14) liefert uns

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq \left( \int_{\Omega} u_0^2 dx - \frac{C}{\theta} \right) \cdot e^{-\theta t} + \frac{C}{\theta} \quad (3.23)$$

und damit eine a priori Schranke für die  $L^2$ -Norm von  $u$  in jedem endlichen Zeitintervall  $[0, T)$ . Falls  $\lambda_0$  ausreichend groß ist, und damit die Konstante  $\theta > 0$ , erhalten wir sogar die gleichmäßige Beschränktheit der  $L^2$ -Norm für unbeschränktes  $t > 0$ , d. h.

$$\exists M > 0 : \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Also ist  $\sup_{t \in [0, T]} \|v(\cdot, t)\|_2 < \infty$  und damit

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (3.24)$$

**Satz 3.5 (Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen)**

Für alle  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und alle  $T > 0$  hat das Anfangswertproblem (3.6) genau eine schwache Lösung

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; V).$$

*Beweis.* In [Tem88, Theorem 4.3. (S. 155)] hat Temam die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen für die gewöhnliche Cahn-Hilliard-Gleichung, also für den Fall  $\lambda_0 = 0$ , gezeigt. Der Beweis von Satz 3.5 verläuft analog zu diesem und wird hier nur skizzenhaft für das Inpainting-Problem angepasst.

Die Existenz hat Temam mit der Faedo-Galerkin-Methode bewiesen. Analog da-

zu wird die Gleichung (3.6) in einen linearen Operator  $A : V \rightarrow L^2(\Omega)$  mit

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) = \langle \varepsilon \Delta u, \Delta v \rangle$$

und einen nichtlinearen Operator  $B : V \rightarrow L^2(\Omega)$  mit

$$\langle B(u), v \rangle = b(u, v) = \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F''(u) \nabla u, \nabla v \right\rangle + \langle \lambda u, v \rangle$$

aufgeteilt. Die Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung kann man nun mit

$$\partial_t u + Au + B(u) = f$$

für ein geeignetes  $f \in L^2$  in der Operator Schreibweise darstellen. Man bemerke, dass im Vergleich zu [Tem88] nur  $B$  leicht verändert ist.

Die Faedo-Galerkin-Methode basiert darauf Lösungen in endlich-dimensionalen Unterräumen zu finden, die von Eigenfunktionen von  $A$  aufgespannt werden. Seien dafür  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$  die Eigenwerte von  $A$  mit den dazugehörigen Eigenfunktionen  $w_i$ . Wir suchen nach Funktionen

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i,$$

definiert als Lösung von

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_m, w_j \rangle + a(u_m, w_j) + b(u_m, w_j) = \langle f, w_j \rangle, & \forall j = 1, \dots, m \\ u_m(0) = P_m u_0, \end{cases}$$

wobei  $P_m$  die Projektion von  $V$  auf  $\text{span}\{w_j : j = 1, \dots, m\}$  bezeichnet. Dies ist ein System von  $m$  gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktionen  $g_{jm}(t)$ . Die Existenz und Eindeutigkeit für die Funktionen  $g_{jm}(t)$  und somit auch für  $u_m$  erhalten wir mit dem Satz von Picard-Lindelöf aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite. Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\partial_t u_m + Au_m + P_m B(u_m) = P_m f. \quad (3.25)$$

Weiter gilt Gleichung (3.24) genauso auch für  $u_m$ . Daher ist

$$u_m \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; V).$$

Außerdem bleibt  $\partial_t u_m$  beschränkt in  $L^2([0, T]; V^*)$ . Wie in [Tem88] kann mithilfe eines Kompaktheitsarguments gezeigt werden, dass  $u_m$  gegen eine schwache Lösung der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung konvergiert. Hiermit ist die Existenz gezeigt.

Für die Eindeutigkeit verweisen wir auf die Literatur [Tem88, Theorem 4.3. (S. 155)]. □

## 3.2 Schwache Lösungen im stationären Fall

In diesem Abschnitt soll die Existenz von schwachen Lösungen der stationären Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung gezeigt werden. Sei wieder  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand und  $D \subset \Omega$  das Inpainting-Gebiet. Im Gegensatz zum dynamischen Fall verschwindet für die stationäre Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung die Zeitableitung, also

$$0 = -\Delta \left( \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) + \lambda(I - u) \text{ in } \Omega,$$

wobei wieder  $\lambda = \lambda_0 \mathbb{1}_{\Omega \setminus D}$  und  $F(u) = (u + 1)^2(u - 1)^2$ .

Um eine Existenzaussage zu Lösungen der stationären Gleichung zu treffen, wäre eine Möglichkeit sie als Optimalitätsbedingung eines Funktionals über einem passenden Hilbertraum darzustellen. Dies ist für die Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung aber vermutlich nicht möglich.

Im Folgenden zeigen wir die Existenz von stationären Lösungen mit Dirichlet-Randbedingungen mit Hilfe eines Fixpunktarguments. Dazu wollen wir zuerst das Problem formulieren, welches wir untersuchen wollen.

### 3.2.1 Mathematischer Rahmen

Wir untersuchen die stationäre Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen, also sie wieder  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $D \subset \Omega$  das Inpainting-Gebiet. Wir suchen Lösungen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} 0 = -\Delta \left( \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) + \lambda(I - u) & \text{in } \Omega, \\ u = I, \quad -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

mit  $\lambda = \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} \lambda_0$ ,  $\lambda_0 > 0$  und  $\varepsilon > 0$ . Außerdem nehmen wir an, dass  $I \in L^2(\Omega)$  in einer kleinen Umgebung von  $\partial\Omega$  konstant ist.

Die schwache Formulierung von (3.26) sei:

Finde  $u \in H := \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = I|_{\partial\Omega}\}$  mit

$$\langle \varepsilon \nabla u, \nabla \phi \rangle - \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F'(u), \Delta \phi \right\rangle - \langle \lambda(x)(I - u), \phi \rangle_{-1} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.27)$$

Eine Lösung der schwachen Formulierung (3.27) heißt auch schwache Lösung von (3.26).

#### Lemma 3.6

*Ausreichend glatte Lösungen der schwachen Formulierung (3.27) lösen das stationäre Cahn-Hilliard-Inpainting-Problem (3.26).*

*Beweis.* Wir starten mit der schwachen Formulierung (3.27) und wenden partielle Integration an. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) - \left( \Delta^{-1} \lambda_0 \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} (I - u) \right) \phi \, dx \\ - \int_{\partial\Omega} \Delta^{-1} \left( \lambda_0 \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} (I - u) \right) \nabla \Delta^{-1} \phi \cdot \nu \, d\sigma = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Für die dichte Teilmenge  $\bar{H} = H_0^1(\Omega) \cap \{\nabla \Delta^{-1} \phi \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$  verschwindet das zweite Integral. Also muss auch das erste Integral Null sein für alle  $\phi \in \bar{H}$  und aufgrund der Dichtheit von  $\bar{H}$  in  $H_0^1(\Omega)$  folgt dies sogar für alle  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

Wegen (3.28) ist dann auch das erste Integral Null und wir erhalten das System

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + \frac{1}{\varepsilon}F'(u) - \left(\Delta^{-1}\lambda_0\mathbb{1}_{\Omega\setminus D}(I-u)\right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta^{-1}\left(\lambda_0\mathbb{1}_{\Omega\setminus D}(I-u)\right) = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mit der Definition von  $\Delta^{-1}$ , den Randbedingungen des Lösungsraums der schwachen Formulierung und unter der Annahme ausreichender Regularität ist  $u$  Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta\left(\varepsilon\Delta u - \frac{1}{\varepsilon}F'(u)\right) + \left(\lambda_0\mathbb{1}_{\Omega\setminus D}(I-u)\right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta^{-1}\left(\lambda_0\mathbb{1}_{\Omega\setminus D}(I-u)\right) = -\varepsilon\Delta u + \frac{1}{\varepsilon}F'(u) = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ u = I & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Um die Existenz einer stationären Lösung zu zeigen, verwenden wir einen Fixpunktansatz. Dazu betrachten wir das Hilfsproblem

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\Delta^{-1}(u-v) = \varepsilon\Delta u - \frac{1}{\varepsilon}F'(u) + \Delta^{-1}(\lambda(I-u) + (\lambda_0 - \lambda)(v-u)) & \text{in } \Omega, \\ \Delta^{-1}\left(\frac{1}{\tau}(u-v) - \lambda(I-u) - (\lambda_0 - \lambda)(v-u)\right) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u = I & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.29)$$

mit dem Parameter  $\tau > 0$ . Die schwache Formulierung davon ist definiert durch: Finde  $u \in H$  mit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\tau}(u-v), \phi \right\rangle_{-1} + \langle \varepsilon\nabla u, \nabla\phi \rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon}F'(u), \phi \right\rangle \\ - \langle \lambda(I-u) + (\lambda_0 - \lambda)(v-u), \phi \rangle_{-1} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Eine Lösung  $u \in H$  davon nennt man auch schwache Lösung von (3.29). Die Integrale konvergieren für  $v \in L^2(\Omega)$ . Wir bezeichnen den Lösungsoperator mit

$\bar{A} : L^2(\Omega) \rightarrow H$  und definieren mit dem Einbettungsoperator  $I : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

$$A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) : v \mapsto A(v) = I \cdot \bar{A}(v) = u.$$

Nun zeigen wir, unter welchen Voraussetzungen der Operator  $A$  wohldefiniert ist.

### 3.2.2 Existenz und Eindeutigkeit des Hilfsproblems

Wir wollen nun zeigen, dass das Hilfsproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Für den Beweis verwenden wir die variationelle Formulierung von (3.29), d. h. wir betrachten das Minimierungsproblem:

Finde  $u \in H$ , welches für festes  $v \in L^2(\Omega)$  das Funktional  $J_v^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$J_v^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx + \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2 + \frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2, \quad (3.31)$$

wobei  $\lambda = \lambda_0 \mathbb{1}_{\Omega \setminus D}$ ,  $\lambda_0 > 0$  und  $\varepsilon > 0$  gilt, minimiert. Das Funktional  $J_v^\varepsilon$  hat einige schöne Eigenschaften, die wir nachfolgend zeigen.

Zuerst zeigen wir, dass der Minimierer von  $J^\varepsilon$  tatsächlich schwache Lösung des Hilfsproblem ist.

**Lemma 3.7**

*Der Minimierer von  $J^\varepsilon$  löst die schwache Formulierung des Hilfsproblems (3.30) und bei genügend glatter Lösung das Hilfsproblem (3.29).*

*Beweis.* Wir berechnen für eine beliebige Testfunktion  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  und  $\delta \in \mathbb{R}$  die erste Variation von  $J_v^\varepsilon$ , d. h.

$$\frac{d}{d\delta} J_v^\varepsilon(u + \delta\phi). \quad (3.32)$$

Diese muss Null sein für alle  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ , falls  $\delta \rightarrow 0$  und  $u$  ein Minimierer ist. Wir erhalten die schwache Formulierung wie in Gleichung (3.30)

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \nabla u, \nabla \phi \rangle_2 + \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F'(u), \phi \right\rangle_2 \\ + \left\langle \frac{1}{\tau} (u - v) + \lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v, \phi \right\rangle_{-1} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Durch partielle Integration, angewandt auf den ersten Term, gilt außerdem

$$\begin{aligned} \left\langle -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) - \Delta^{-1} \left( \frac{1}{\tau} (u - v) + \lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v \right), \phi \right\rangle_2 \\ + \int_{\partial\Omega} \varepsilon \nabla u \phi \cdot \nu \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Das Randintegral verschwindet wegen den Null-Randbedingungen von  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ . Aufgrund der Randbedingung von  $H$  ist auch die Randbedingung der Differentialgleichung  $u = f$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt. Somit löst  $u$ , ausreichende Regularität vorausgesetzt, das klassische Hilfsproblem.  $\square$

### Definition 3.8

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Ein Funktional  $f$  auf  $X$  heißt *koerziv*, falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = +\infty$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty.$$

### Lemma 3.9

Das Funktional  $J_v^\varepsilon$  ist koerziv in  $u$ .

*Beweis.* Mit der binomischen Formel gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow a^2 \geq 2a - 1.$$

Damit gilt mit  $a = u^2 - 1$  für die das Potential

$$F(u) = (u + 1)^2 (u - 1)^2 = (u^2 - 1)^2 \geq 2u^2 - 3.$$

Außerdem gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und der Youngschen-

Ungleichung mit  $\delta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &\geq (\|a\| - \|b\|)^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \\ &\geq \|a\|^2 + \|b\|^2 - \delta \|a\|^2 - \frac{1}{\delta} \|b\|^2 = \frac{1}{2} \|a\|^2 - \|b\|^2 \end{aligned}$$

Weiter können wir damit das Funktional  $J_v^\varepsilon$  nach unten abschätzen, also gilt

$$\begin{aligned} J_v^\varepsilon(u) &= \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx + \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2 \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{2}{\varepsilon} \|u\|^2 - \frac{3|\Omega|}{\varepsilon} + \frac{1}{2\tau} \left( \frac{1}{2} \|u\|_{-1}^2 - \frac{1}{2} \|v\|_{-1}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_0}{2} \|u\|_{-1}^2 - \frac{1}{2} \|\lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1} \right) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{2}{\varepsilon} \|u\|^2 + \left( \frac{\lambda_0}{4} + \frac{1}{4\tau} \right) \|u\|_{-1}^2 - C(v, f, \lambda_0, \varepsilon, \Omega, D). \end{aligned}$$

Also ist  $J_v^\varepsilon$  koerziv. □

**Definition 3.10**

Sei  $X$  ein normierter Raum. Das Funktional  $J: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt schwach unterhalbstetig, wenn für alle schwach konvergenten Folgen  $x_n \subset X$  mit Grenzwert  $x \in X$  gilt, dass

$$J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n).$$

**Lemma 3.11**

Das Funktional  $J_v^\varepsilon$  ist schwach unterhalbstetig.

*Beweis.* Sei  $u_n \rightharpoonup u$  eine schwach konvergente Folge. Wir teilen die Folge  $J_v^\varepsilon(u_n)$  in drei Teile auf.

$$\begin{aligned} a_n &= J_1(u_n) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx, \\ b_n &= J_2(u_n) = \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2, \\ c_n &= J_3(u_n) = \frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Der Raum  $H^1$  ist kompakt in  $L^2$  eingebettet. Daraus folgt, dass es eine Teilfolge gibt mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$ . Außerdem gilt, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + c_n)$  existiert,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + c_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + c_n).$$

Sei  $f = \frac{1}{\lambda_0} (\lambda I + (\lambda_0 - \lambda)v)$ . Wir zeigen nun die Konvergenz von  $c_n$ , d. h. es gilt

$$\begin{aligned} \|u_n - f\|_{-1}^2 &\rightarrow \|u - f\|_{-1}^2, \quad \text{bzw.} \\ \langle \Delta^{-1}(u_n - f), u_n - f \rangle &\rightarrow \langle \Delta^{-1}(u - f), u - f \rangle. \end{aligned}$$

Wir betrachten dazu die Differenz der Skalarprodukte und erhalten

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Delta^{-1}(u_n - f), u_n - f \rangle - \langle \Delta^{-1}(u - f), u - f \rangle \right| \\ &= \left| \langle \Delta^{-1}(u_n - u), u_n - f \rangle - \langle \Delta^{-1}(u - f), u_n - u \rangle \right| \\ &\leq \left| \langle \Delta^{-1}(u_n - u), u_n - f \rangle \right| + \left| \langle \Delta^{-1}(u - f), u_n - u \rangle \right| \\ &\leq \|u_n - u\| \left\| \Delta^{-1}u_n - f \right\| + \|u_n - u\| \left\| \Delta^{-1}u - f \right\|. \end{aligned}$$

Der Operator  $\Delta^{-1} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  ist linear und stetig, d. h.

$$\left\| \Delta^{-1}w \right\| \leq \left\| \Delta^{-1} \right\| \|w\|, \quad \forall w \in H^{-1}(\Omega).$$

Also gilt weiter

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Delta^{-1}(u_n - f), u_n - f \rangle - \langle \Delta^{-1}(u - f), u - f \rangle \right| \\ &\leq \|u_n - u\| \left\| \Delta^{-1} \right\| \|u_n - f\| + \|u_n - u\| \left\| \Delta^{-1} \right\| \|u - f\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Analog lässt sich die Konvergenz von  $b_n$  zeigen. Das Funktional  $J_1$  ist schwach unterhalbstetig, was zum einen aus der schwachen Unterhalbstetigkeit des Dirichlet-Integrals  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  und zum anderen aus der Stetigkeit von  $F$  nach der Anwendung des Lemmas von Fatou folgt. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F(u) dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F(\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n) dx = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} F(u_n) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} F(u_n) dx. \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} J_v^\varepsilon(u) &= J_1(u) + J_2(u) + J_3(u) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_1(u_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (J_2(u_n) + J_3(u_n)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} J_v^\varepsilon(u_n). \end{aligned}$$

□

**Definition 3.12**

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Ein Funktional  $f$  auf  $X$  heißt strikt konvex, wenn für alle  $x, y \in H$  gilt

$$J_v^\varepsilon(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha J_v^\varepsilon(x) + (1 - \alpha)J_v^\varepsilon(y).$$

**Lemma 3.13**

Das Funktional

$$J_v^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx + \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2 + \frac{\lambda_0}{2} \|u - f\|_{-1}^2$$

ist strikt konvex für  $\tau \leq \frac{\varepsilon^3}{C^2}$  und  $\lambda_0 > 0$  und  $\varepsilon > 0$ , wobei  $C$  eine positive Konstante ist.

*Beweis.* Wir zeigen für jedes  $a, b \in H^1(\Omega)$ , dass gilt

$$J_v^\varepsilon(a) + J_v^\varepsilon(b) - 2J_v^\varepsilon\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0.$$

Für die Funktion  $F$  existiert eine Konstante  $C > 0$  für die gilt

$$F(a) + F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) > -C(a-b)^2.$$

Diesen Zusammenhang erhalten wir mit dem Differenzenquotienten für die 2. Ableitung  $F''(u) = 12u^2 - 4$  von  $F$ , also

$$\frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} = F''(x) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.33)$$

An der Stelle  $x = \frac{a+b}{2}$  und der Schrittweite  $h = \frac{a-b}{2}$  ergibt sich für  $a \neq b$

$$\frac{F(a) + F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 12(a-b)^2 - 4 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) > -4 \quad (3.34)$$

$$\Leftrightarrow F(a) + F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) > -(a-b)^2. \quad (3.35)$$

In unserem Fall ist also  $C = 1$ . Außerdem gilt für  $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2 = a^2 + b^2 - \left(\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2} = 2(a+b)^2.$$

Mit  $u = a-b$  erhalten wir mittels quadratischer Ergänzung und der Ungleichung  $\|u\|_2^2 \geq \|u\|_{-1} \|u\|_1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} J_v^\varepsilon(a) + J_v^\varepsilon(b) - 2J_v^\varepsilon\left(\frac{a+b}{2}\right) &> \frac{\varepsilon}{4} \|u\|_1^2 + \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right) \|u\|_{-1}^2 - \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_2^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \|u\|_1^2 + \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right) \|u\|_{-1}^2 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right)} \|u\|_{-1} \|u\|_1 \\ &\quad - \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_2^2 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right)} \|u\|_{-1} \|u\|_1 \\ &\geq \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} \|u\|_1 - \sqrt{\frac{1}{4\tau}} \|u\|_{-1}\right)^2 - \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_2^2 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right)} \|u\|_2^2 \\ &\geq -\frac{C}{\varepsilon} \|u\|_2^2 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right)} \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Das ist größer als Null, wenn

$$2\sqrt{\frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right)} \geq \frac{C}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon^3 \left(\lambda_0 + \frac{1}{\tau}\right) > C^2$$

gilt. Dies ist wegen den Voraussetzungen  $\tau \leq \frac{\varepsilon^3}{C^2}$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\lambda_0 > 0$  erfüllt, denn es gilt

$$C^2 > \varepsilon^3 \left(\lambda_0 + \frac{1}{\tau}\right) > \varepsilon^3 \lambda_0 + C^2 \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon^3 \lambda_0$$

Insgesamt ist  $J_v^\varepsilon$  also strikt konvex. □

**Satz 3.14 (Existenz und Eindeutigkeit eines Minimierers für  $J_v^\varepsilon$ )**

Das Funktional  $J_v^\varepsilon$  besitzt genau einen Minimierer für  $\tau \leq \frac{\varepsilon^3}{C^2}$ , wobei  $C$  eine positive Konstante ist, die nur von  $|\Omega|$ ,  $|D|$  und  $F$  abhängt.

*Beweis.* Sei  $u_n \subset H$  eine minimierende Folge von  $J_v^\varepsilon$ , d. h.

$$J_v^\varepsilon(u_n) \rightarrow j := \inf_{v \in H^1(\Omega)} J_v^\varepsilon(v) \leq J(0) < \infty.$$

Wegen Lemma 3.9 ist  $J_v^\varepsilon$  koerziv. Wir zeigen durch einen Widerspruch, dass die minimierende Folge  $u_n$  beschränkt ist: Wir nehmen an, dass  $u_n$  unbeschränkt ist. Es gilt also  $\|u_n\| \rightarrow \infty$ . Wegen der Koerzivitat gilt dann  $J_v^\varepsilon(u_n) \rightarrow \infty$ . Das steht im Widerspruch zu  $j < \infty$ . Also ist  $u_n$  wirklich beschränkt.

Wegen der Reflexivität von  $L^2(\Omega)$  besitzt  $u_n$  eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $u_{n_k} \rightharpoonup u^*$ . Nun nutzen wir die schwache Unterhalbstetigkeit von  $J_v^\varepsilon$  nach Lemma 3.11 aus. Es gilt

$$J_v^\varepsilon(u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_v^\varepsilon(u_n) = j.$$

Weil  $j$  als das Infimum von  $J_v^\varepsilon$  definiert ist kann es nicht sein, dass  $J(u^*) < j$  gilt, also ist  $J(u^*) = j$  und  $u^*$  ein Minimierer. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien dafür  $u$  und  $v$  Minimierer. Dann gilt wegen Lemma 3.13 für die Konvexkombinationen

$$J_v^\varepsilon(u + (1 - \alpha)v) < \alpha J_v^\varepsilon(u) + (1 - \alpha)J_v^\varepsilon(v) = j.$$

Also ist beispielsweise  $J_v^\varepsilon(u_M) < j$ ,  $u_M = \frac{1}{2}(u + v)$ . Dies steht im Widerspruch zu  $j = \inf_{v \in H^1(\Omega)} J_v^\varepsilon(v)$ . □

**Proposition 3.15 (Existenz und Eindeutigkeit des Hilfsproblems)**

Das Hilfsproblem (3.29) hat eine schwache Lösung in  $H^1(\Omega)$  für  $\tau \leq \frac{\varepsilon^3}{C^2}$ , wobei  $C$  eine positive Konstante ist, die nur von  $|\Omega|$ ,  $|D|$  und  $F$  hängt.

*Beweis.* Das Funktional  $J_v^\varepsilon$  hat nach Satz 3.14 einen eindeutigen Minimierer, der nach Lemma 3.7 eine schwache Lösung von (3.29) ist. □

### 3.2.3 Fixpunktstrategie

Im Folgenden verwenden wir ein Fixpunktargument, um die Existenz einer Lösung der stationären Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung zu zeigen. Dafür zeigen wir die Existenz eines Fixpunktes des Hilfsproblems aus dem vorherigen Abschnitt mit dem Fixpunktsatz von Schauder, welcher eine Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung liefert.

#### Satz 3.16 (Fixpunktsatz von Schauder)

Sei  $M$  eine konvexe, abgeschlossene und nichtleere Teilmenge eines Banachraums  $X$  und ist  $A: M \rightarrow M$  stetig, so besitzt  $A$  wenigstens einen Fixpunkt, falls  $A(M)$  relativ kompakt ist.

*Beweis.* Ein Beweis findet sich beispielsweise in [Col13, S. 355] □

#### Lemma 3.17

Sei  $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  der Lösungsoperator zum Hilfsproblem (3.29), dann gilt für  $v \in L^2(\Omega)$  und  $u = A(v)$  die Ungleichung

$$\|A(v)\|_2^2 = \|u\|_2^2 \leq \beta \|v\|_2^2 + \alpha \quad (3.36)$$

für Konstanten  $\alpha > 0$ ,  $0 \leq \beta < 1$  und  $|D| < \frac{|\Omega|}{2}$ .

Außerdem ist die Lösung  $u \in H^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Nehmen wir für den Anfang zusätzlich an, dass  $\nabla u, \Delta u \in L^2(\Omega)$ . Dann multiplizieren wir (3.29) mit  $\Delta u$  und integrieren über  $\Omega$ . Mit

$$w := \frac{1}{\tau}(u - v) - \lambda(I - u) - (\lambda_0 - \lambda)(v - u) = \frac{1}{\tau}(u - v) - \lambda(I - v) - \lambda_0(v - u)$$

erhalten wir

$$- \int_{\Omega} \Delta u \Delta^{-1} w dx = -\varepsilon \langle \Delta u, \Delta u \rangle_2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F'(u) \Delta u dx.$$

Nach partieller Integration erhalten wir

$$\int_{\Omega} u w dx - \int_{\partial\Omega} \left[ \nabla u \cdot \nu \left( \Delta^{-1} w + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) - u \nabla \left( \Delta^{-1} w \right) \right) \nu \right] d\sigma$$

$$= -\varepsilon \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\nabla u|^2 \, dx.$$

Durch das Einsetzen der Randbedingung  $\Delta^{-1}w|_{\partial\Omega} = 0$  und unter Verwendung der Annahme, dass  $I$  in einer Umgebung von  $\partial\Omega$  konstant ist, gilt  $u = I = f_1$  und  $F'(u) = F'(I) = f_2$  mit Konstanten  $f_1$  und  $f_2$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uw \, dx - \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{f_2}{\varepsilon} \nabla u \cdot \nu - f_1 \nabla (\Delta^{-1}w) \nu \right] \, d\sigma \\ = -\varepsilon \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\nabla u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß für die Randintegrale erhalten wir

$$\int_{\Omega} uw \, dx = -\varepsilon \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\Delta u|^2 \, dx + \frac{f_2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \Delta u \, dx + f_1 \int_{\Omega} w \, dx.$$

Mit der Young-Ungleichung gilt für die letzten beiden Terme

$$\frac{f_2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \Delta u \, dx + f_1 \int_{\Omega} w \, dx \leq \frac{\delta}{2} \frac{f_2}{\varepsilon} \|\Delta u\|_2^2 + \frac{\delta}{2} f_1 \|w\|_2^2 + \left( \frac{f_2}{2\delta\varepsilon} + \frac{f_1}{2\delta} \right) |\Omega|,$$

für eine Konstante  $\delta > 0$  und mit  $C = C(f_1, f_2, \varepsilon, |\Omega|, \delta)$

$$\int_{\Omega} uw \, dx \leq \left( \frac{f_2\delta}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\nabla u|^2 \, dx + \frac{f_1}{2} \delta \|w\|_2^2 + C.$$

Durch das Einsetzen der Definition von  $w$  auf der linken Seite erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) \, dx \leq \left( \frac{f_2\delta}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\nabla u|^2 \, dx + \frac{f_1\delta}{2} \|w\|_2^2 \\ + \lambda_0 \left( \int_{\Omega \setminus D} u(I - u) \, dx + \int_D u(v - u) \, dx \right) + C. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Abschätzung  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  auf  $\|w\|_2^2$  an.

Mit  $w = \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right) u - \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 - \lambda \right) v - \lambda I$  und  $(\lambda_0 - \lambda) \leq \lambda_0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|w\|_2^2 &= \left\| \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right) u - \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 - \lambda \right) v - \lambda I \right\|_2^2 \\ &\leq 2 \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|u\|_2^2 + 2 \left\| \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 - \lambda \right) v - \lambda I \right\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|u\|_2^2 + 4 \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 - \lambda \right)^2 \|v\|_2^2 + 4 \|\lambda I\|_2^2 \\ &\leq 2 \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|u\|_2^2 + 4 \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|v\|_2^2 + C(\lambda, I) \end{aligned}$$

und damit insgesamt mit  $C = C(I, f_1, f_2, |D|, |\Omega|, \varepsilon, \delta, \delta_2)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) dx &\leq \left( \frac{f_2 \delta}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} F''(u) |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|u\|_2^2 + 2f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|v\|_2^2 \\ &\quad + \lambda_0 \left( \int_{\Omega \setminus D} u(I - u) dx + \int_D u(v - u) dx \right) + C. \end{aligned}$$

Mit  $F''(u) \geq C_1 u^2 - C_2$  für Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  und mit der Young-Ungleichung auf die beiden letzten Terme erhalten wir mit den Konstanten  $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) dx &\leq \left( \frac{f_2 \delta}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 - \frac{C_1}{\varepsilon} \|u |\nabla u|\|_2^2 + \frac{C_2}{\varepsilon} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|u\|_2^2 + 2f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|v\|_2^2 \\ &\quad + \lambda_0 \left[ - \left( 1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx + \left( \frac{\delta_1}{2} - 1 \right) \int_D u^2 dx + \frac{1}{2\delta_1} \int_D v^2 dx \right] + C \end{aligned}$$

und für  $\delta_1 = 2, \delta_2 = 1$  und  $C = C(I, f_1, f_2, |D|, |\Omega|, \varepsilon, \delta)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) dx &\leq \left( \frac{f_2 \delta}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 - \frac{C_1}{\varepsilon} \|u |\nabla u|\|_2^2 + \frac{C_2}{\varepsilon} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|u\|_2^2 + 2f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \|v\|_2^2 \\ &\quad + \lambda_0 \left[ -\frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx + \frac{1}{4} \int_D v^2 dx \right] + C. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Nun benötigen wir die Ungleichung (3.18) in der Form

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \delta_3 \|\Delta u\|_2^2 + \frac{C_3 \alpha}{2\delta_3} \|u |\nabla u|\|_2^2 + \frac{C_3}{\delta_3} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx + \frac{C_4}{2\alpha \delta_3}$$

und wenden sie auf (3.37) an. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) dx &\leq \left( \frac{f_2 \delta + 2C_2 \delta_3}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 + \left( \frac{\alpha C_2 C_3}{2\delta_3 \varepsilon} - \frac{C_1}{\varepsilon} \right) \|u |\nabla u|\|_2^2 \\ &\quad + \left( f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 + \frac{C_2 C_3}{\varepsilon \delta_3} \right) \|u\|_2^2 \\ &\quad + \left( \frac{\lambda_0}{4} + 2f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \right) \|v\|_2^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx + C. \end{aligned}$$

Den letzten Term schätzen wir mit der Ungleichung (3.16) ab. Es gilt also für  $C_p > 0$

$$- \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx \leq C_p \|\nabla(u^2)\|_2^2 - \frac{|\Omega \setminus D|}{|\Omega|} \|u\|_2^2$$

und mit Ungleichung (3.17)

$$- \int_{\Omega \setminus D} u^2 dx \leq C_p \frac{\alpha_2}{2} \|u |\nabla u|\|_2^2 - \frac{|\Omega \setminus D|}{|\Omega|} \|u\|_2^2 + C.$$

Insgesamt erhalte wir also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) dx &\leq \left( \frac{f_2 \delta + 2C_2 \delta_3}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 \\ &\quad + \left( \frac{\alpha C_2 C_3}{2\delta_3 \varepsilon} + \frac{C_p \alpha}{2} - \frac{C_1}{\varepsilon} \right) \|u |\nabla u|\|_2^2 \\ &\quad + \left( f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 + \frac{C_2 C_3}{\varepsilon \delta_3} - \frac{|\Omega \setminus D|}{|\Omega|} \right) \|u\|_2^2 \\ &\quad + \left( \frac{\lambda_0}{4} + 2f_1 \delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \right) \|v\|_2^2 + C. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Young-Ungleichung können wir die linke Seite nach unten abschätzen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{1}{\tau} (u - v) dx &= \frac{1}{\tau} \left( \|u\|_2^2 - \int_{\Omega} uv dx \right) \geq \frac{1}{\tau} \left( \|u\|_2^2 - \|u\|_2 \|v\|_2 \right) \\ &\geq \frac{1}{\tau} \left( \|u\|_2^2 - \left( \frac{\|u\|_2^2}{2} + \frac{\|v\|_2^2}{2} \right) \right) = \frac{\|u\|_2^2}{2\tau} - \frac{\|v\|_2^2}{2\tau}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\|u\|_2^2}{2\tau} - \frac{\|v\|_2^2}{2\tau} &\leq \left( \frac{f_2\delta + 2C_2\delta_3}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 + \left( \frac{\alpha C_2 C_3}{2\delta_3 \varepsilon} + \frac{C_p \alpha}{2} - \frac{C_1}{\varepsilon} \right) \|u\|_2 \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + \left( f_1\delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 + \frac{C_2 C_3}{\varepsilon \delta_3} - \frac{|\Omega \setminus D|}{|\Omega|} \right) \|u\|_2^2 \\ &\quad + \left( \frac{\lambda_0}{4} + 2f_1\delta \left( \frac{1}{\tau} + \lambda_0 \right)^2 \right) \|v\|_2^2 + C. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Nun wählen wir  $\delta_3 < (2\varepsilon^2 - f_2\delta) / 2C_2$  und  $\alpha, \alpha_2, \delta$  klein genug, damit die ersten beiden Terme auf der rechten Seite kleiner als Null werden und wir die Terme mit  $f_1$  vernachlässigen können. Damit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\tau} + \frac{|\Omega \setminus D| \lambda_0}{2|\Omega|} - \frac{C_2 C_3 C_4}{\varepsilon^3} \right) \|u\|_2^2 - \left( \frac{f_2\delta + 2C_2\delta_3}{2\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|_2^2 \\ \leq \left( \frac{1}{2\tau} + \frac{\lambda_0}{4} \right) \|v\|_2^2 + C \end{aligned} \quad (3.40)$$

bzw.

$$\left( \frac{1}{2\tau} + \frac{|\Omega \setminus D| \lambda_0}{2|\Omega|} - \frac{C_2 C_3 C_4}{\varepsilon^3} \right) \|u\|_2^2 \leq \left( \frac{1}{2\tau} + \frac{\lambda_0}{4} \right) \|v\|_2^2 + C.$$

Also erhalten wir nach Division durch den linken Koeffizienten

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{\left( \frac{1}{2\tau} + \frac{\lambda_0}{4} \right)}{\left( \frac{1}{2\tau} + \frac{|\Omega \setminus D| \lambda_0}{2|\Omega|} - \frac{C_2 C_3 C_4}{\varepsilon^3} \right)} \|v\|_2^2 + C.$$

Mit  $|D| < 2|\Omega|$  gibt es eine Konstante  $0 < \tilde{\delta} < 1$ , so dass gilt  $\frac{\lambda_0 |\Omega \setminus D|}{2|\Omega|} = \frac{\lambda_0}{1-\tilde{\delta}}$ .  
Damit der Term vor  $\|v\|_2^2$  kleiner als Eins ist, muss also gelten

$$\frac{\lambda_0}{4 - \tilde{\delta}} > \frac{\lambda_0}{4} + \frac{C_2 C_3 C_4}{\varepsilon^3}.$$

Aufgelöst nach  $\lambda_0$  erhalten wir die Bedingung

$$\lambda_0 > \frac{4C_2 C_3 C_4 (4 - \tilde{\delta})}{\tilde{\delta} \varepsilon^3} = \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^3}.$$

Es bleibt noch  $u \in H^1(\Omega)$  zu zeigen.

Wegen Ungleichung (3.41) gilt außerdem

$$-\left(\frac{f_2\delta + 2C_2\delta_3}{2\varepsilon} - \varepsilon\right) \|\Delta u\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{\lambda_0}{4}\right) \|v\|_2^2 + C. \quad (3.41)$$

Damit ist  $\|\Delta u\|_2^2$  beschränkt und mit Ungleichung (3.15) auch  $\|\nabla u\|_2^2$ . Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir wollen den Satz von Schauder anwenden. Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Menge  $K$ , auf der der Operator  $A$  eine Selbstabbildung ist. Beispielsweise ist

$$K = B(0, M) = \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_2 \leq M\}$$

mit  $\frac{\alpha}{1-\beta} \leq M^2$  geeignet, denn es gilt dann für  $v \in K$

$$\|A(v)\|_2^2 = \|u\|_2^2 \leq \beta \|v\|_2^2 + \alpha \leq \frac{\alpha\beta}{1-\beta} + \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta} = \frac{\alpha}{1-\beta} \leq M^2, \quad \forall v \in K.$$

**Lemma 3.18**

Sei  $A$  wie in Lemma 3.17, dann ist  $A$  kompakt und stetig.

*Beweis.* Im Beweis von Lemma 3.17 haben wir gezeigt, dass der Operator  $A$  auf  $H^1(\Omega)$  abbildet. Es gilt also  $A: L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ . Nach dem Einbettungssatz von Sobolev ist der Einbettungsoperator  $I: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  kompakt und darum auch  $A$ .

Es bleibt die Stetigkeit zu zeigen. Sei  $v_k \rightarrow v$  in  $L^2(\Omega)$ , dann ist  $A(v_k) = u_k$  beschränkt in  $H^1(\Omega)$ , und es gibt eine schwach konvergente Teilfolge  $u_{k_j} \rightarrow u$  in  $H^1(\Omega)$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $I$  gibt es eine schwach konvergente Teilfolge von  $u_{k_j}$ , welche stark in  $L^2(\Omega)$  konvergiert, also  $u_{k_j} \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $u$  der Einzige Häufungspunkt von  $u_k$  ist.

Nach Konstruktion erfüllen die Folgen  $u_k$  und  $v_k$  die Bedingung

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \nabla u_k, \nabla \phi \rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F'(u_k), \phi \right\rangle \\ + \left\langle \frac{1}{\tau} (u_k - v_k) + \lambda_0 u_k - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda) v_k, \phi \right\rangle_{-1} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts und der Stetigkeit von  $F$  gilt dies auch für die Grenzwerte  $u$  und  $v$ , d. h. es gilt

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \nabla u, \nabla \phi \rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F'(u), \phi \right\rangle \\ + \left\langle \frac{1}{\tau} (u - v) + \lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v, \phi \right\rangle_{-1} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Damit ist  $u$  unter der Voraussetzung  $\tau < \frac{C}{\varepsilon^2}$  eine schwache Lösung von (3.29). Damit liefert der Operator  $A$  eine eindeutige Lösung. Es gilt also  $A(v) = u$ . Damit ist  $A$  stetig.  $\square$

**Satz 3.19 (Existenz eines Fixpunkts für das Hilfsproblem)**

Sei  $A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ,  $A(u) = v$ . Wobei  $u \in H^1(\Omega)$  die schwache Lösung des Hilfsproblems ist. Dann hat  $A$  einen Fixpunkt  $u^* \in H^1(\Omega)$ , falls  $\tau \leq \frac{\varepsilon^3}{C^2}$  und  $\lambda_0 \geq \frac{C}{\varepsilon^3}$  für eine positive Konstante  $C$ , die nur von  $|\Omega|$ ,  $|D|$  und  $F$  abhängt.

*Beweis.* Der Operator  $A|_K$  ist eine Selbstabbildung. Weiter ist  $K$  als abgeschlossener Ball konvex und abgeschlossen. Wegen der Kompaktheit von  $A$  ist  $A(K)$  relativ kompakt. Mit der Stetigkeit von  $A$  sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder erfüllt. Es gibt also einen Fixpunkt  $v^* \in L^2(\Omega)$

$$A(v^*) = v^*,$$

welcher die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) - \left( \Delta^{-1} \lambda_0 \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} (I - u) \right) \phi \, dx \\ - \int_{\partial \Omega} \Delta^{-1} \left( \lambda_0 \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} (I - u) \nabla \Delta^{-1} \phi \nu \, d\sigma \right) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

löst. Weil die Lösung von (3.30) in  $H$  liegt, ist auch der Fixpunkt  $v^* \in H$ .  $\square$

**Satz 3.20**

Die stationäre Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung

$$\Delta \left( -\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} F'(u) \right) + \lambda(x)(I - u) = 0 \text{ in } \Omega \quad (3.42)$$

hat in  $H^1(\Omega)$  Lösungen, falls  $\lambda_0 \geq \frac{C}{\varepsilon^3}$  und für eine Konstante  $C > 0$ , die nur von  $|D|$ ,  $|\Omega|$  und  $F$  abhängt und  $|D| < 2|\Omega|$ .

*Beweis.* Mit Satz 3.19 existiert ein Fixpunkt  $u^*$  für das Hilfsproblem. Es gilt also

$$\langle \varepsilon \nabla u^*, \nabla \phi \rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon} F'(u^*), \phi \right\rangle - \langle \lambda(I - u^*), \phi \rangle_{-1} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.43)$$

Dies entspricht der schwachen Lösung der stationären Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung.  $\square$

### 3.3 Implementierung

In diesem Abschnitt wird ein numerisches Verfahren zur Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung vorgestellt und auf dessen Implementierung eingegangen.

Ein geeignetes numerisches Verfahren für die zeitliche Diskretisierung zur Lösung der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung ist das Convexity Splitting. Eine genaue Analyse des Convexity Splittings mit Anwendungen für Strukturinpainting-Verfahren mit partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung wurde in [SB11] durchgeführt und für das Cahn-Hilliard-Inpainting in [BEG07] vorgeschlagen.

Die ursprüngliche Cahn-Hilliard-Gleichung ist der Gradientenabstieg bezüglich des  $H^{-1}$ -Skalarprodukts von

$$E_1(u) = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) dx.$$

Der Treueterm kann durch den Gradientenabstieg bezüglich des  $L^2$ -Skalarprodukts von

$$E_2(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda(x)(I - u)^2 dx$$

dargestellt werden. Die Idee ist nun die Terme in einen konvexen Teil und einen konkaven Teil aufzuteilen. Für die Zeitintegration wird dann der konvexe Teil explizit und der konkave Teil implizit behandelt. Man erhält also ein semi-implizites Schema.

Der erste Term kann beispielsweise aufgeteilt werden in  $E_1 = E_{11} - E_{12}$  mit

$$E_{11}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^2 + \frac{C_1}{2} |u|^2 \, dx$$

und

$$E_{12}(u) = \int_{\Omega} -\frac{1}{\varepsilon} F(u) + \frac{C_1}{2} |u|^2 \, dx.$$

Der Treueterm kann aufgeteilt werden in  $E_2 = E_{21} - E_{22}$  mit

$$E_{21}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{C_2}{2} |u|^2 \, dx$$

und

$$E_{22}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\lambda(x)(I - u)^2 + \frac{C_2}{2} |u|^2 \, dx.$$

Sei weiter  $U_k$  die approximierte Lösung der Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung zum Zeitpunkt  $t = k\tau$ , wobei  $\tau$  die Schrittweite der zeitlichen Diskretisierung bezeichnet und  $U_0 = u_0$  gesetzt wird. Das Zeitschrittverfahren zu diesem Splitting ist dann

$$\frac{U_{k+1} - U_k}{\tau} = -\nabla_{H^{-1}}(E_{11}(U_{k+1}) - E_{12}(U_k)) - \nabla_{L^2}(E_{12}(U_{k+1}) - E_{22}(U_k)),$$

wobei  $\nabla_{H^{-1}}$  und  $\nabla_{L^2}$  den Gradienten bezüglich des jeweilig Skalarprodukts bezeichnen. Um sicherzustellen, dass  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{21}$  und  $E_{22}$  konvex sind, müssen die Konstanten  $C_1 > \frac{1}{\varepsilon}$  und  $C_2 > \lambda_0$  gewählt werden.

Die numerische Lösung  $U_{k+1}$  berechnet sich durch die semi-implizite Vorschrift

$$\begin{aligned} \frac{U_{k+1} - U_k}{\tau} + \varepsilon \Delta \Delta U_{k+1} - C_1 \Delta U_{k+1} + C_2 U_{k+1} \\ = \frac{1}{\varepsilon} \Delta F'(U_k) - C_1 \Delta U_k + C_2 U_k + \lambda(I - U_k). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Terme, welche die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  beinhalten, wirken als Dämpfungsterme und stabilisieren das Lösungsverfahren. In [SB11] wurde gezeigt, dass die numerische Lösung  $U_k$  auf einem endlichen Intervall gleichmäßig be-

schränkt bleibt. Außerdem konvergiert die numerische Lösung für  $\tau \rightarrow \infty$  gegen eine exakte Lösung.

Für die räumliche Diskretisierung kann die diskrete Cosinustransformation wie in [SB11]. Dies hat den Vorteil, dass die Berechnungen der Ableitungen leichter sind, denn die Matrix-Multiplikationen werden durch eine elementweise Multiplikation ersetzt. In diesem Fall verwenden wir Neumann-Randbedingungen

$$\nabla U_{k+1} \cdot \nu = \nabla \Delta U_{k+1} = 0, \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wir nehmen an, dass  $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  ein rechteckiges Gebiet ist und diskretisieren  $u$  katasterartig durch  $m$  Punkte in  $x$ -Richtung und  $n$  Punkte in  $y$ -Richtung, d. h.  $U_{ij} = u(ih_x, jh_y)$  mit  $h_x = a/m$  und  $h_y = b/n$ .

Sei  $\hat{U}$  die diskrete Cosinustransformation von  $U$  mit den Eigenwerten  $\lambda_i$ . Dann kann Gleichung (3.45) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{\hat{U}_{ij}^{k+1} - \hat{U}_{ij}^k}{\tau} + \varepsilon \left( \frac{\lambda_i}{h_x^2} + \frac{\lambda_j}{h_y^2} \right)^2 \hat{U}_{ij}^{k+1} - C_1 \left( \frac{\lambda_i}{h_x^2} + \frac{\lambda_j}{h_y^2} \right) \hat{U}_{ij}^{k+1} + C_2 \hat{U}_{ij}^{k+1} & \quad (3.45) \\ = \frac{1}{\varepsilon} (\Delta(\widehat{F'(U_k)})_{ij} - C_1 \left( \frac{\lambda_i}{h_x^2} + \frac{\lambda_j}{h_y^2} \right) \hat{U}_{ij}^k + C_2 \hat{U}_{ij}^k + \lambda(I_{ij} - U_{ij}^k)). \end{aligned}$$

Ein Nachteil ist allerdings, dass für das Rechengebiet  $\Omega$  eine rechteckige Geometrie angenommen werden muss, da sonst die Berechnung der Eigenwerte der Cosinustransformation nicht mehr effizient durchgeführt werden kann.

Eine weitere Möglichkeit ist eine Finite-Elemente-Diskretisierung, wie beispielsweise in [BKS14]. Dafür teilen wir die Cahn-Hilliard-Inpainting-Gleichung auf in

$$\begin{cases} \frac{U_{k+1} - U_k}{\tau} + \Delta W_{k+1} - C_1 \Delta U_{k+1} + C_2 U_{k+1} = -C_1 \Delta U_k + C_2 U_k + \lambda(I - U_k) \\ W_{k+1} - \varepsilon \Delta U_{k+1} = \frac{1}{\varepsilon} \Delta F'(U_k) \end{cases}$$

mit der schwachen Formulierung

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{\tau} + C_2 \right) \langle U_{k+1}, v \rangle + \langle \nabla W_{k+1}, \nabla v \rangle + \langle C_1 \nabla U_{k+1}, \nabla v \rangle - \langle \lambda(I - U_k), v \rangle \\ \quad - C_1 \langle \nabla U_k, \nabla v \rangle - \left( \frac{1}{\tau} + C_2 \right) \langle U_k, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \langle W_{k+1}, v \rangle - \varepsilon \langle \nabla U_{k+1}, \nabla v \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle F'(U_k), v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Hier nehmen wir an, dass  $\Omega$  polyhedral berandet ist. Sei dazu  $R_h$  eine Triangulierung von  $\Omega$  mit disjunkten Rechtecken und  $h = \max_{R \in R_h} \{\text{diam}(R)\}$  der maximale Durchmesser der Rechtecke und  $J_h$  die Menge der Knoten von  $R_h$  mit  $|R_h| = N$ .

Nun approximiert man den Raum  $H^1(\Omega)$  durch den endlich-dimensionalen Raum der stückweise bilinearen Funktionen

$$S_h = \left\{ \phi \in C^0 : \phi|_R = Q_1 \quad \forall R \in R_h \right\}$$

wobei  $Q_1 = \text{span} \{ \{1\}, \{x\}, \{y\}, \{xy\} \}$  der Raum der bilineare Funktionen bezeichnet. Sei weiter  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  die nodale Basis von  $S_h$ , d. h. es gilt

$$\phi_i(p_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Wir setzen  $U_k^h = \sum_{i=1}^N u_i^k \phi_i$  und  $W_k^h = \sum_{i=1}^N w_i^k \phi_i$ . Das diskretisierte Problem ist dann: Finde  $(U_{k+1}^h, W_{k+1}^h) \in S_h \times S_h$  zur gegebenen Funktion  $U_k^h \in S_h$  mit

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \left( \frac{1}{\tau} + C_2 \right) \langle U_{k+1}^h, v_h \rangle + \langle \nabla W_{k+1}^h, \nabla v_h \rangle + \langle C_1 \nabla U_{k+1}^h, \nabla v_h \rangle \\ \quad - \langle \lambda(I - U_k^h), v_h \rangle - C_1 \langle \nabla U_k^h, \nabla v_h \rangle - \left( \frac{1}{\tau} + C_2 \right) \langle U_k^h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in S_h \\ \langle W_{k+1}^h, v_h \rangle - \varepsilon \langle \nabla U_{k+1}^h, \nabla v_h \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle F'(U_k^h), v_h \rangle \quad \forall v_h \in S_h \end{array} \right.$$

Mit  $K_{ij} = \langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle$  und  $M_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$  ist das äquivalent zur Lösung des linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} M & \varepsilon K \\ K & \left( \frac{1}{\tau} + C_1 \right) M + C_1 K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{k+1} \\ u^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} M F'(u^k) \\ C_1 K u^k + \left( \frac{1}{\tau} + C_2 \right) M u^k + M \lambda(p) (I - u^k) \end{pmatrix},$$

wobei  $u, w, p \in \mathbb{R}^N$ . Das lineare Gleichungssystem kann mit iterativen Verfahren, wie beispielsweise dem GMRES mit einem Vorkonditionierer (siehe in [BKSW14]), oder mit einem direkten Löser behandelt werden.

Ein Vorteil bei der Diskretisierung mit Finiten-Elementen ist, dass man nicht auf rechteckige Bildbereiche beschränkt ist. Dies hat für das Ergebnis Vorteile, denn bei unregelmäßigen Rechengebieten sind Nahtartefakte weniger auffällig. Außerdem sind Randbedingungen für  $\Omega$  einfacher umzusetzen. Der größte Nachteil ist, dass in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, was im Gegensatz zur ersten Lösungsmethode zu einer höheren Rechenzeit führt.

## 4 TV- $H^{-1}$ -Inpainting

Ein Nachteil des Cahn-Hilliard-Inpaintings ist, dass es nur für Binärbilder geeignet ist. In [BHS09] wird eine Möglichkeit vorgeschlagen, wie das Verfahren auf Grauwertbilder verallgemeinert werden kann und trotzdem die gewünschten Eigenschaften erhalten bleiben, z. B. dass Isophoten glatt in das Inpainting-Gebiet fortgesetzt werden. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse von [BHS09] nachvollzogen. Wir wollen das TV- $H^{-1}$ -Inpainting motivieren, indem wir zeigen, wie es mit dem Cahn-Hilliard-Inpainting zusammenhängt. Dafür betrachten wir den Grenzwert des Cahn-Hilliard-Funktional für  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Zuerst klären wir, in welchem Sinne der Grenzwert zu verstehen ist und definieren die entsprechenden Räume. Danach wollen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zeigen. Im letzten Abschnitt werden einige numerische Beispiele gezeigt.

### 4.1 Mathematischer Rahmen

#### Definition 4.1

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $(F_n), n \in \mathbb{N}$  eine Familie von Funktionalen  $F_n: X \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ , dann konvergiert  $(F_n)$  im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz gegen ein Funktional  $F: X \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ , falls für alle  $x \in X$  gilt, dass

- für jede Folge  $x_n \rightarrow x$  gilt, dass

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n)$$

- und eine Folge  $\bar{x}_n \rightarrow x$  existiert mit

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\bar{x}_n).$$

Das Funktional  $F$  bezeichnet dann den Grenzwert von  $F_n$  im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz.

**Ein einfaches Beispiel:** Sei  $X = \mathbb{R}$  und  $F_n = \sin(nx)$ , dann ist

$$-1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx).$$

Andererseits kann man für  $x \in \mathbb{R}$  eine Folge definieren mit  $x_n$  als den nächsten Punkt zu  $x$  mit  $\sin(nx_n) = -1$ . Formal also

$$x_n = \arg \min_{y \in \mathbb{R}} \{|x - y| : \sin(ny) = -1\}.$$

Die Funktion  $F_n$  hat für festes  $n$  die Periode  $\frac{2\pi}{n}$ , also ist  $|x - x_n| \leq \frac{\pi}{n}$ . Somit konvergiert  $x_n$  gegen  $x$ . Insgesamt ist  $F(x) = -1$  ein Grenzwert im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz von  $F_n$ .

**Lemma 4.2**

Sei  $G: X \mapsto \mathbb{R}$  stetig und konvergiere  $F_\varepsilon$  im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz gegen  $F$  in  $X$ , dann konvergiert  $F_\varepsilon + G$  gegen  $F + G$  im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz.

*Beweis.* Ein Beweis findet sich in [DM12, Prop 6.21]. □

**Definition 4.3**

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $(F_n), n \in \mathbb{N}$  eine Familie von Funktionalen  $F_n: X \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ , dann heißt  $F_n$  equi-koerziv, falls eine kompakte Menge  $K \subset X$  existiert mit

$$\inf_{x \in X} F_n(x) = \inf_{x \in K} F_n(x).$$

**Satz 4.4**

Sei  $F_n, F$  wie in Definition (4.1) und  $F_n$  zusätzlich equi-koerziv. Falls  $F_n$  auf  $X$  im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz gegen  $F$  konvergiert, gilt

$$\min_{x \in X} F(x) = \liminf_{(n,x) \in \mathbb{N} \times X} F_n(x).$$

*Beweis.* Ein Beweis findet sich in [DM12, Theorem 7.8]. □

**Definition 4.5**

Die totale Variation für eine Funktion  $u \in L^1(\Omega)$  ist gegeben durch

$$TV(u) = |Du|(\Omega) := \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx,$$

wobei  $\int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$  im schwachen Sinne zu verstehen ist, d. h.

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \, dx = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), |\varphi| \leq 1 \, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (4.1)$$

Den Raum der Funktionen mit beschränkter Variation bezeichnen wir mit

$$BV(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) : TV(u) < \infty \right\} \quad (4.2)$$

und ist mit der Norm

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + TV(u) \quad (4.3)$$

ein normierter Raum.

**Bemerkung 4.6**

Für  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ist der Sobolev-Raum  $W^{1,1}(\Omega)$  ein echter Unterraum von  $BV(\Omega)$ . Denn für jedes  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  kann man das Maß  $\mu := \nabla u \mathcal{L}$  wählen, wobei  $\mathcal{L}$  das Lebesgue-Maß bezeichnet. Dann gilt die Gleichung

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \, d\mu = - \int_{\Omega} \varphi \nabla u \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^1.$$

Eine Funktion, die in  $BV(\Omega)$  aber nicht in  $W^{1,1}(\Omega)$  ist, ist beispielsweise  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ . Da  $f$  unstetig ist, liegt  $f$  nicht in  $W^{1,1}([-1, 1])$ , aber

$$TV(f) = \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \varphi'(x) \, dx = \int_0^1 \varphi'(x) \, dx = \varphi(1) - \varphi(0) \leq 2.$$

## 4.2 $\Gamma$ -Konvergenz des Cahn-Hilliard-Funktional

In diesem Abschnitt betrachten wir den  $\Gamma$ -Grenzwert des Hilfsproblems für das Cahn-Hilliard-Inpainting für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , aus dem wir dann im nächsten Abschnitt das  $TV\text{-}H^{-1}$  motivieren.

Den  $\Gamma$ -Grenzwert für das Cahn-Hilliard-Funktional liefert uns der nächste Satz.

**Satz 4.7**

*Das Cahn-Hilliard Funktional*

$$CH_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) dx$$

konvergiert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in der  $L^1(\Omega)$  Topologie im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz gegen

$$TV_B(u) = \begin{cases} C_0 \int_\Omega |\nabla u| dx, & \text{falls } u = 2\mathbb{1}_E - 1 \text{ und } E \subset \Omega \text{ Borel-messbar,} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $C_0 = \int_{-1}^1 \sqrt{F(s)} ds$ .

*Beweis.* Diesen Zusammenhang fanden Modica und Mortola in [MM77] und [MM]. Ein didaktisch aufbereiteter Beweis findet sich in Beni Bogoşels Blog<sup>1</sup>.  $\square$

Den  $\Gamma$ -Grenzwert für das Cahn-Hilliard-Inpainting-Funktional liefert uns der nächste Satz.

**Satz 4.8**

Seien  $f, v \in L^2(\Omega)$  und  $\tau > 0$  ein positiver Parameter. Sei  $\|\cdot\|_{-1}$  die Norm von  $H^{-1}(\Omega)$  und  $\varepsilon > 0$ , dann konvergiert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  das Funktional

$$J_\varepsilon^f(u) = \int_\Omega \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx + \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2 + \frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2$$

in der  $L^1(\Omega)$  Topologie im Sinne der  $\Gamma$ -Konvergenz gegen

$$J_v(u) = TV_B(u) + \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2 + \frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2. \quad (4.4)$$

*Beweis.* Das Funktional ist eine Superposition von Cahn-Hilliard-Funktionalen, des Treueterms  $\frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2$  und des Dämpfungsterms

$$\frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2.$$

---

<sup>1</sup><https://tinyurl.com/ybjxzf9v>, Zugriff am 09.02.2018

Die  $H^{-1}$ -Norm ist stetig in  $H^{-1}$ , also auch in  $L^1$ . Außerdem ist der Dämpfungsterm und der Treueterm unabhängig von  $\varepsilon$ . Die Behauptung folgt mit Lemma 4.2.  $\square$

### 4.3 Verallgemeinerung für Grauwertbilder

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Cahn-Hilliard-Inpainting für die Behandlung von Grauwertbilder durch eine Modifikation wie in [BHS09]. Mit dem Resultat vom letzten Abschnitt kann das Cahn-Hilliard-Inpainting als Approximation an

$$J_v(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx + \frac{1}{2\tau} \|u - v\|_{-1}^2 + \frac{1}{2} \|\lambda_0 u - \lambda I - (\lambda_0 - \lambda)v\|_{-1}^2$$

aufgefasst werden für Funktionen  $u \in BV(\Omega)$  mit  $u = 2\mathbb{1}_E(x) - 1$  für eine Borell-messbare Menge  $E$ . Im Cahn-Hilliard-Inpainting wird der glatte Übergang zwischen der  $-1$ - und der  $1$ -Phase für  $\varepsilon \rightarrow 0$  zu einem Sprung zwischen  $-1$ - und  $1$ -Phase.

Dieser scharfe Übergang zwischen  $-1$ - und  $1$ -Phase motiviert die Erweiterung von  $J_v$  für Grauwertbilder. Dazu lassen wir Funktionen  $|u| < 1$  auf  $\Omega$  zu. Dies führt zu einer Verallgemeinerung des Cahn-Hilliard-Inpaintings, dem TV- $H^{-1}$ -Inpainting. Zunächst muss noch geklärt werden, in welchem Sinne der Gradient zu verstehen ist. Das Subdifferential ist eine Verallgemeinerung des Gradienten auf nicht differenzierbare konvexe Funktionen.

#### Definition 4.9

Sei  $X$  ein lokal konvexer Raum und  $X^*$  der Dualraum von  $X$  mit der dualen Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Subdifferential von  $J$  am Punkt  $x$  ist gegeben durch

$$\partial J(x) = \{p \in X^*: \langle y - x, p \rangle \leq J(y) - J(x), \forall y \in X\}.$$

Ein Element  $p \in \partial J(x)$  heißt Subgradient.

Betrachte für  $I \in L^2(\Omega)$

$$\partial_t u = \Delta p + \lambda(x)(I - u), \quad p \in \partial TV_{\infty}(u) \quad (4.5)$$

mit

$$TV_\infty(u) = \begin{cases} |Du|(\Omega) & \text{falls } |u(x)| \leq 1, \text{ fast überall in } \Omega, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.6)$$

**Satz 4.10**

Sei  $I \in L^2$ , dann hat die stationäre Gleichung

$$0 = \Delta p + \lambda(x)(I - u), \quad p \in \partial TV_\infty(u)$$

eine Lösung  $u \in BV(\Omega)$ .

*Beweis.* Beweis nach [BHS09]. □

Schließlich wollen wir noch Elemente  $p \in \partial TV$  berechnen. Dafür schreiben wir

$$TV_\infty(u) = \int_\Omega |\nabla u| \, dx + \text{Con}(u),$$

wobei  $\int_\Omega |\nabla u| \, dx$  im Sinne von (4.1) zu verstehen ist und

$$\text{Con}(u) := \begin{cases} 0 & \text{falls } |u| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega, \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun wollen wir den Subgradienten berechnen, indem wir annehmen, dass

$$\partial TV_\infty(u) = \partial TV(u) + \partial \text{Con}(u)$$

gilt. Die Idee ist nun Charakterisierungen für  $\partial TV(u)$  und  $\partial \text{Con}(u)$  zu finden.

Eine Charakterisierung für einen Subgradienten von  $TV$  liefert uns der nächste Satz.

**Satz 4.11**

Sei  $p \in \partial TV(u)$ , dann gilt für  $|\nabla u| \neq 0$

$$\begin{cases} p = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.7)$$

*Beweis.* Beweis nach [VO03, Prop 4.1] □

Um numerische und theoretische Schwierigkeiten zu vermeiden verwenden wir eine regularisierte Version für  $|\nabla u|$ . Es ist beispielsweise eine Regularisierung mit einer Quadratwurzel möglich, d. h. wir setzen  $|\nabla u| \approx \sqrt{|\nabla u|^2 + \delta^2}$  für ein  $0 < \delta \ll 1$ , also

$$\begin{cases} p = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \delta^2}} \right) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \delta^2}} \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

Einen Subgradienten von  $\partial \text{Con}$  erhalten wir durch folgendes Lemma:

**Satz 4.12**

Sei  $\text{Con}: L^r(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  wie oben definiert und  $1 \leq r \leq \infty$ , dann ist  $p \in L^{r^*}$  für  $r^* = \frac{r}{r-1}$  ein Subgradient von  $\text{Con}$ , d. h.  $p \in \partial \text{Con}(u)$ , genau dann wenn

$$\begin{aligned} p &= 0 && \text{f. ü. auf } \text{supp}(\{|u| < 1\}), \\ p &\leq 0 && \text{f. ü. auf } \text{supp}(\{u = 1\}), \\ p &\geq 0 && \text{f. ü. auf } \text{supp}(\{u = -1\}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Beweis nach [BHS09]. □

Insgesamt kann man das regularisierte TV- $H^{-1}$ -Inpainting zu einem gegebenen Bild  $I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  formulieren als zeitliche Entwicklung von  $u: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{cases} \partial_t u = -\Delta \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \delta}} \right) + \lambda(x)(I - u) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \delta}} \cdot \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Im folgenden Abschnitt wird kurz die Implementierung vorgestellt.

## 4.4 Implementierung

In diesem Abschnitt wird ein numerisches Verfahren für das TV- $H^{-1}$ -Inpainting vorgestellt und auf die Implementierung eingegangen. Wir verwenden ähnlich wie bei dem Cahn-Hilliard-Inpainting das Convexity Splitting für die zeitliche Diskretisierung (vgl. [SB11]).

Der Regularisierungsterm des TV- $H^{-1}$ -Inpainting ist der Gradientenabstieg bezüglich des  $H^{-1}$ -Skalarprodukts von

$$E_1(u) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \delta^2} dx.$$

Der Treueterm kann durch den Gradientenabstieg bezüglich des  $L^2$ -Skalarprodukts mittels

$$E_2(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda(x)(I - u)^2 dx$$

dargestellt werden.

Analog wie bei dem Cahn-Hilliard-Inpainting können die Terme wieder in einen konvexen Teil und einen konkaven Teil aufgeteilt werden

Der erste Term kann beispielsweise aufgeteilt werden in  $E_1 = E_{11} - E_{12}$  mit

$$E_{11} = \int_{\Omega} \frac{C_1}{2} |\nabla u|^2 dx$$

und

$$E_{12} \int_{\Omega} -\sqrt{|\nabla u|^2 + \delta^2} + \frac{C_1}{2} |\nabla u|^2 dx.$$

Der Treueterm wird analog dem Cahn-Hilliard-Inpainting aufgeteilt in  $E_2 = E_{21} - E_{22}$  mit

$$E_{21} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{C_2}{2} |u|^2 dx$$

und

$$E_{22} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\lambda(x)(I - u)^2 + \frac{C_2}{2} |u|^2 dx.$$

Sei wieder  $U_k$  die approximative Lösung der TV- $H^{-1}$ -Inpainting-Gleichung zum Zeitpunkt  $t = k\tau$ , wobei  $\tau$  die Schrittweite der zeitlichen Diskretisierung bezeichnet und  $U_0 = u_0$  gesetzt wird. Das Zeitschrittverfahren ist dann

$$\frac{U_{k+1} - U_k}{\tau} = -\nabla_{H^{-1}}(E_{11}(U_{k+1}) - E_{12}(U_k)) - \nabla_{L^2}(E_{12}(U_{k+1}) - E_{22}(U_k)).$$

Um sicherzustellen, dass  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{21}$  und  $E_{22}$  konvex sind, müssen in diesem Fall die Konstanten  $C_1 > \frac{1}{\delta}$  und  $C_2 > \lambda_0$  gewählt werden.

Dies führt zur semi-impliziten Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \frac{U_{k+1} - U_k}{\tau} + C_1 \Delta \Delta U_{k+1} + C_2 U_{k+1} = \\ C_1 \Delta \Delta U_k - \Delta \left( \nabla \cdot \left( \frac{\nabla U_k}{\sqrt{|\nabla U_k|^2 + \delta}} \right) \right) + C_2 U_k + \lambda(I - U_k). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Analog zum Cahn-Hilliard-Inpainting kann für die räumliche Diskretisierung die diskrete Cosinustransformation wie in [SB11] oder eine Finite-Elemente-Diskretisierung wie verwendet werden. Die beiden Diskretisierungen haben wieder die gleichen Vor- und Nachteile wie beim Cahn-Hilliard-Inpainting, d. h. bei einer Diskretisierung mit der Cosinustransformation muss das Gebiet rechteckig sein, um die Koeffizienten effizient berechnen zu können. Der Vorteil ist allerdings, dass die Berechnungen der Ableitungen einfacher sind.

Andererseits ist man mit einer Finite-Elemente-Diskretisierung jedes beliebige Gebiete inpainten und erhält damit unauffälligere Nahtartefakte.

Für Farbbilder kann das Verfahren auf jeden Farbkanal separat angewandt werden. Es ist jedoch mit mit Farbfehlern zu rechnen, wenn der Algorithmus zu früh abgebrochen und noch nicht konvergiert ist.

## 5 Anwendungen in der Szenenanalyse

In diesem Kapitel werden einige Beispiele gezeigt, in denen die genannten Inpainting-Verfahren in der Szenenanalyse eingesetzt werden. Zunächst wird ein Überblick zum Prozess der automatischen Erzeugung einer semantischen 3D-Szene gegeben, wie er bisher am Fraunhofer IOSB verwendet wurde. In Abbildung 5.1 ist eine Übersicht zum Prozess der Szenenrekonstruktion als Schaubild dargestellt, wobei die Schritte, in denen Inpainting verwendet werden kann, mit roten Ellipsen gekennzeichnet sind.

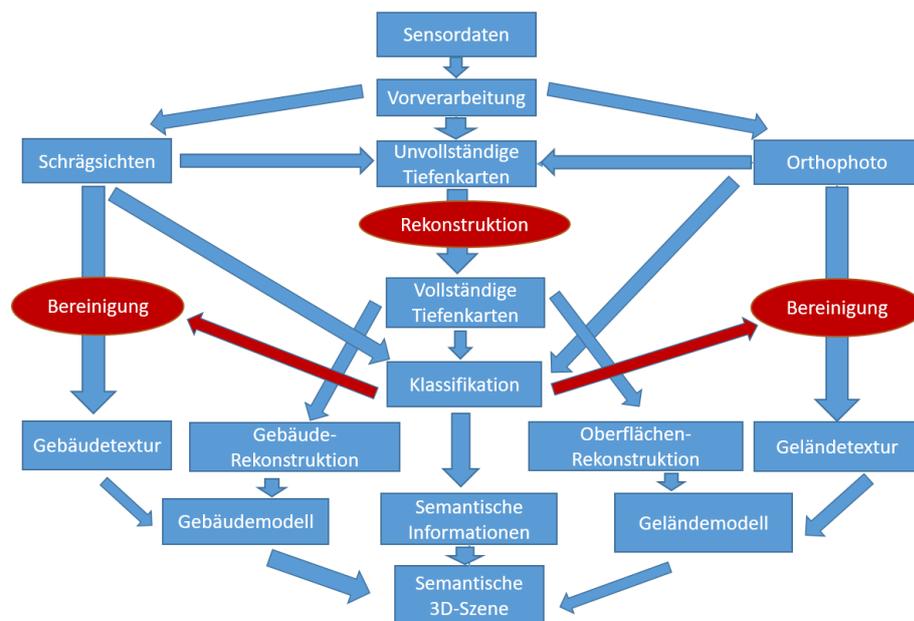


Abbildung 5.1: Übersicht zum Prozess der Szenenrekonstruktion

**Prozess der Szenenrekonstruktion:** Im ersten Schritt werden *Sensordaten* einer Szene aufgezeichnet. Diese können beispielsweise Farbbilder aus luftgetra-

---

genen Kamerasystemen oder eine Punktwolke aus einem Laserscanner sein. Aus den Sensordaten werden in der *Vorverarbeitung* Schrägsichten der Objekte der Szene, ein *Orthophoto* und dazugehörige *unvollständige Tiefenkarten* extrahiert.

*Orthophotos* sind verzerrungsfreie und maßstabsgetreue Abbildungen der Erdoberfläche. In *Tiefenkarten* werden den Pixeln die jeweilige Entfernung zur Kamera zugewiesen und sind technisch bedingt nach der Vorverarbeitung unvollständig (siehe Unterabschnitt 5.2.2). Für die weiteren Prozessteile werden *vollständige Tiefenkarten* benötigt, die aus den *unvollständigen Tiefenkarten* rekonstruiert werden.

Eine 3D-Szene besteht aus drei Teilen: einem *Gebäudemodell*, einem *Geländemodell* und *semantischen Informationen*, d. h. welcher Klasse gehört eine bestimmte Oberfläche an.

Mit *semantischen Informationen* können die Art der Interaktionen mit Oberflächen verbessert werden, wie beispielsweise den Unterschied des Fahrverhaltens von Fahrzeugen auf einer Straße oder einem Acker. Um die semantische Informationen zu bekommen, werden in der *Klassifikation* die *Schrägsichten* mit ihrer jeweiligen Tiefenkarte analysiert und Objekte und deren Bildbereich klassifiziert.

Genauso wie das *Geländemodell*, besteht das *Gebäudemodell* einerseits aus einer Rekonstruktion der Oberfläche, in Form von Polygonen, die aus den *vollständigen Tiefenkarten* rekonstruiert werden und andererseits aus den dazugehörigen Texturen, welche aus den *Schrägsichten* bzw. aus dem *Orthophoto* extrahiert werden.

**Problembeschreibung:** Bei der Texturextraktion für das Gelände aus dem Orthophoto ist es wichtig die Textur zu bereinigen, d. h. unbeständige Objekte wie Autos, Bäumen, Fußgängern, etc. zu entfernen, um das Standort- und Situationsbewusstsein in einer Trainingssimulation zu erhöhen.

Bei der Texturextraktion für die Gebäude aus Schrägbildern sind Vordergrundobjekte problematisch, die das Polygon überdecken, das texturiert werden soll (siehe dazu das Einführungsbeispiel Abbildung 1.3).

**Lösungsansatz:** Ein Ansatz zur Behandlung dieses Problems ist ein Inpainting-Verfahren zu verwenden, das mit Hilfe der Ergebnisse des Klassifikationsschritts die Texturen bereinigt.

Dabei wird Klassifikationsergebnis zum einen dafür verwendet, passende Inpainting-Gebiete zu finden und zum anderen wurde der Algorithmus für den Fall angepasst, das ein Objekt mehrere Klassen verdeckt. Es hat sich gezeigt, dass in diesem Fall die Standardalgorithmen keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefern, da sich Bildinhalte, die zu unterschiedlichen Klassen gehören, zu sehr miteinander vermischen.

Im Folgenden Abschnitt wird vorgestellt, wie das harmonische Inpainting und das TV- $H^{-1}$ -Inpainting modifiziert werden können, um verschiedene Klassen innerhalb des Inpainting-Gebiets zu trennen.

## 5.1 Methodenbeschreibung

In diesem Abschnitt werden die Methoden vorgestellt, die für die Beispiele verwendet werden. Im ersten Unterabschnitt wird das harmonische Inpainting und eine Modifikation zur Behandlung von Klassen beschrieben. Im zweiten Unterabschnitt wird dargestellt, wie das TV- $H^{-1}$ -Inpainting zur Behandlung von Klassen angepasst werden kann. Im dritten Unterabschnitt wird das texturbasierte-Verfahren von Criminisi und ein hybrides Verfahren vorgestellt.

### 5.1.1 Harmonisches Inpainting und harmonisches Inpainting mit Klassen

In diesem Abschnitt wird zunächst das harmonische Inpainting eingeführt und dann basierend auf der Idee von [KBS16] angepasst, so dass ein Klassifikationsergebnis zur Trennung der Klassen innerhalb des Inpainting-Gebiets einbezogen wird.

Zuerst wird das harmonische Inpainting vorgestellt. Sei wieder der Bildbereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand und  $I \in L^2(\Omega)$  eine Funktion, die ein Grauwertbild repräsentiert und  $D \subset \Omega$  das Inpainting-Gebiet.

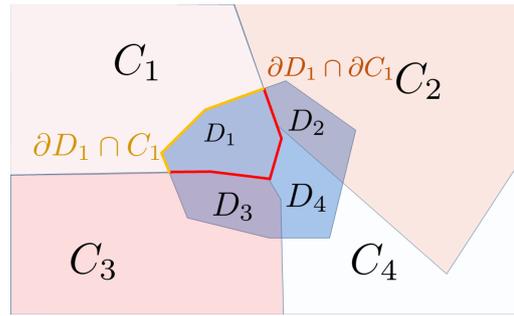


Abbildung 5.2: Inpainting-Gebiet mit Klasseninformation.

Das rekonstruierte Bild wird mit  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet. Beim harmonischen Inpainting wird das Inpainting-Gebiet entsprechend der Lösung einer Laplace-Gleichung rekonstruiert. Dabei werden Dirichlet-Randbedingungen verwendet, damit das rekonstruierte Bild mit dem Originalbild am Rand des Inpainting-Gebiets übereinstimmt. Auf dem unbeschädigten Teil werden die Daten für das rekonstruierte Bild ebenso dem Originalbild entnommen. Insgesamt löst man also das System

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } D, \\ u = I & \text{auf } \partial D, \\ u = I & \text{in } \Omega \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

Nun wird das Klassifikationsergebnis in das harmonische Inpainting eingebaut. Es wird durch disjunkte Mengen  $C^i \subset \Omega, i \in \{1, \dots, M\}$  dargestellt mit  $\Omega = \cup_i C^i$ . Wir setzen  $D_i = D \cap C_i$ .

Das Inpainting-Ergebnis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$u = \begin{cases} u_i, & \text{falls } x \in D_i, \\ I, & \text{falls } x \notin D_i. \end{cases} \quad (5.1)$$

Dafür lösen wir für jedes  $u_i$  die folgende PDE:

$$\begin{cases} -\Delta u_i = 0, & \text{in } D_i, \\ u_i = I, & \text{auf } \partial D_i \cap C_i, \\ \nabla u_i \cdot \nu = 0, & \text{auf } \partial D_i \cap \partial C_i, \end{cases} \quad (5.2)$$

wobei  $\nu$  der äußere 2D-Normalvektor zum Bildrand ist. Die Abbildung 5.2 veranschaulicht die Konfiguration. Die Modifikationen bewahren die Kanten zwischen verschiedenen Klassen. Der Rand von  $D_i$  wird in zwei Teile geteilt. Im ersten Teil stellt die Dirichlet-Randbedingung sicher, dass das unbekannte Gebiet mit den Farbwerten gefüllt wird, die an der gemeinsamen Kante derselben Klasse liegen. Im zweiten Teil wirkt die Neumann-Randbedingung als Isolator zwischen den Klassen. Die PDEs können gleichzeitig mit einer Finite-Differenzen-Methode gelöst werden.

### 5.1.2 TV-H<sup>1</sup>-Inpainting mit Klassen

In diesem Abschnitt wird das TV-H<sup>1</sup>-Inpainting mit zwei einfachen Modifikationen angepasst, um die Klassen innerhalb des Inpainting-Gebiets zu trennen. Die erste Modifikation ist ein veränderter Treueterm, so dass die Farbwerte an den Kanten zwischen den Klassen erhalten bleiben. Dafür wird die Funktion  $\lambda$  durch  $\lambda_{\text{KI}}$  ersetzt, wobei

$$\lambda_{\text{KI}}(x) = \begin{cases} \lambda_0, & \text{falls } x \notin D \setminus S, \\ 0, & \text{falls } x \in D \setminus S, \end{cases}$$

$$\text{wobei } S = \bigcup_{i,j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j} D_\varepsilon^i \cap D_\varepsilon^j$$

$$\text{und } D_\varepsilon = \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon),$$

dabei bezeichnet  $B(x, \varepsilon)$  eine Kugel um den Punkt  $x$  mit Radius  $\varepsilon$ .

Um sinnvolle Farbwerte in der Nähe der Kanten zu erhalten, wenden wir das modifizierte harmonische Inpainting aus dem vorherigen Abschnitt auf das Originalbild an, wobei wir  $S$  als Inpainting-Gebiet verwenden und für alle Kanten innerhalb von  $D$  Neumann-Ränder setzen. Das Ergebnis ist die abschnittsweise definierte Funktion  $\bar{I}$  analog dem modifizierten harmonischen Inpainting. Wir

lösen das System

$$\begin{cases} -\Delta \bar{I}_i = 0, & \text{in } S_i, \\ \bar{I}_i = I, & \text{auf } \partial S_i \cap (\Omega \setminus D) \\ \nabla \bar{I}_i \cdot \nu = 0, & \text{auf } \partial S_i \cap D \end{cases} \quad (5.3)$$

für jeden Abschnitt, wobei  $S_i = S \cap D_i$  bezeichnet.

Mit diesen zwei Modifikationen erhält man das TV- $H^1$ -Inpainting mit Klassen, also

$$u_t = -\Delta \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \delta^2}} \right) + \lambda_{\text{Kl}}(\bar{I} - u). \quad (5.4)$$

### 5.1.3 Criminisi-Inpainting und hybride Methode

Die Grundidee des Criminisi-Inpaintings ist ein intelligentes Kopieren und Einfügen von Umgebungen von Pixeln im Bild. Dafür wird um jedes Pixel ein Fenster, also eine quadratische Umgebung gelegt, und anschließend die Fenster von unbekanntem Pixeln stückweise mit ähnlichen Fensterinhalten bekannter Pixel gefüllt.

Das Criminisi-Inpainting basiert auf einem prioritätsbasierten Ansatz, der nicht nur an der Grenze des Inpainting-Gebiets sucht, sondern auch entlang der Kanten. Der Algorithmus wurde durch einfache Manipulation der Gewichte dahingehend angepasst, dass – ähnlich wie beim modifizierten harmonischen Inpainting – die unterschiedlichen Klassen innerhalb des Inpainting-Gebiets unabhängig voneinander übermalt werden.

In unserer Anwendung wurde das strukturbasierte harmonische Inpainting, das TV- $H^1$ -Inpainting jeweils mit und ohne Klassifikationsergebnis Verfahren in Kombination mit dem texturbasierten Verfahren von Criminisi in einem hybriden Verfahren verwendet.

Dabei wird aus dem Originalbild ein Cartoonbild berechnet, welches den strukturellen Anteil repräsentiert. Zur Berechnung des Strukturanteils, wurde auf eine Methode von Winnemöller [WOG06] zurückgegriffen. Die texturale Komponente ist die Differenz von Cartoonbild und Originalbild.

Die zwei Komponenten werden danach jeweils mit dem strukturbasierten und dem texturbasierten Criminisi-Inpainting rekonstruiert und danach wieder zusammengesetzt.

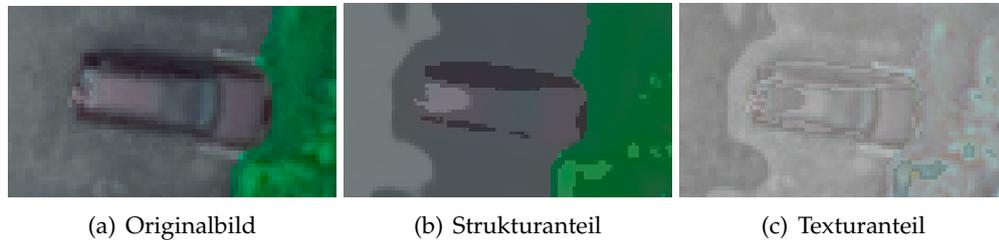


Abbildung 5.3: Ergebnis der Zerlegung in Struktur- und Texturanteil.

## 5.2 Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt betrachten wir drei Inpainting-Anwendungen: Bereinigung von Geländetexturen, Inpainting von Tiefenkarten, und Bereinigung von Gebäudetexturen.

### 5.2.1 Bereinigung von Geländetexturen

Das erste Beispiel handelt von der Bereinigung von Geländetexturen, die aus einem Orthophoto extrahiert werden. Es sollen dafür aus dem Orthophoto die Fahrzeuge entfernt werden. Andere Arbeiten, die sich mit diesem Thema beschäftigen haben, sind [LBGK07] und [KBS16].

Zur Fahrzeugdetektion wurde das explizite und modulare Verfahren verwendet, welches in [SBM17] beschrieben wurde. Es bezieht auch Tiefenkarten ein und kann nicht nur zur Fahrzeugdetektion, sondern auch zur Detektion von Schatten verwendet werden. Die Bereiche, in denen Fahrzeuge im Bild detektiert werden, dienen als Inpainting-Gebiete.

Das Inpainting findet auf dem Inpainting-Gebiet und einem schmalen Streifen außenherum statt. Im Falle des  $TV-H^{-1}$ -Inpaintings wurde eine Finite-Elemente-Diskretisierung verwendet, um Nahtartefakte zu vermeiden. Dies geschieht

zum einen aus Zeitersparnis, da das Orthophoto viel größer ist als die Inpainting-Gebiete und zum anderen um möglichst wenige Bildinhalte außerhalb des Inpainting-Gebiets zu verändern.

Die zweite und optionale Eingabe ist das Klassifizierungsergebnis zu den Klassen „Vegetation“ und „Nicht-Vegetation“. Es hat sich gezeigt, dass es sinnvoll ist diese Klassen zu trennen, da sich sonst die grüne Farbe der Vegetation und das Betongrau von baulichen Strukturen mischen.

Zuerst werden die einzelnen Methoden auf dem Orthophoto miteinander verglichen. Es wird das strukturbasierte harmonische Inpainting, das  $TV-H^{-1}$ -Inpainting jeweils mit und ohne Klassifikationsergebnis verwendet. Für die Räumliche Diskretisierung wurde die Finite-Elemente-Methode bevorzugt, da hier die Nahtartefakte weniger auffällig waren und die Anzahl an Unbekannten klein genug war.

Danach wird eine hybride Methode eingesetzt, also eine Kombination von strukturbasierten und texturbasierten Methoden, um das Inpaintingergebnis zu verbessern.

Die Situation für ein entsprechendes Beispielfahrzeug wird in Abbildung 5.4(a), 5.4(b) und 5.4(c) dargestellt. Die nächsten Bilder zeigen das Ergebnis unterschiedlicher Inpainting-Techniken für den Textur- und Strukturteil je nach Ansatz.

In Abbildung 5.4(d) und 5.4(e) ist das Ergebnis des texturbasierten Criminisi-Inpaintings mit und ohne Klassen dargestellt. Im Standardfall ohne Klassen wird das Inpainting-Gebiet stark durch die Region des Baumes verunreinigt, aber auch im Ergebnis des Criminisi-Inpaintings mit Klassen sind Artefakte sichtbar. Das Ergebnis des harmonischen Inpaintings mit Klassen ist in 5.4(f) für das Originalbild dargestellt. So berücksichtigt diese Methode Klassen, es gibt keine Verschmutzung in der Struktur. Aber die Methode ist nicht in der Lage, die Textur und das Rauschen des Bildes zu rekonstruieren. Die Rekonstruktion ist im Inneren des Inpainting-Gebiets zu glatt. In 5.4(g), 5.4(h) und 5.4(i) wird die Strukturrekonstruktion des  $TV-H^{-1}$ -Inpaintings, des harmonischen Inpainting und des harmonischen Inpaintings mit Klassen gezeigt. Das  $TV-H^{-1}$ -Inpainting rekonstruiert eine scharfe Kante zwischen den Baumklassen, ohne dass ein Klassifizierungsergebnis erforderlich ist. Das harmonische Inpainting zeigt keine Kanten, der Baum verschmutzt den Boden allerdings sehr stark mit einem grünen

Farbanteil. Beim harmonischen Inpainting mit Klassen dagegen ist die Trennung zwischen den Klassen scharf.

In Abbildung 5.4(j) ist die Kombination von Criminisi-Inpainting für den Texturteil und dem modifizierten harmonischen Inpainting mit Klassen dargestellt. Eine scharfe Kante zwischen den Klassen und eine gute Rekonstruktion der Textur ist sichtbar.

Die letzten beiden Abbildungen 5.4(k) und 5.4(l) zeigen den gesamten Parkplatz einmal mit und ohne Texturbereinigung.

### 5.2.2 Inpainting von Tiefenkarten

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel zur Rekonstruktion von zwei vollständigen Tiefenkarten aus unvollständigen Tiefenkarten gezeigt.

Zuerst wird grob dargestellt, wie es zu den Löchern in den unvollständigen Tiefenkarten kommt. Die Aufgabe bei der Berechnung einer Tiefenkarte besteht darin, korrespondierende Punkte in zueinander orientierten Bildern zu finden, um mittels Kameraposition und -orientierung die Tiefeninformationen zu einem Referenzbild zu berechnen. In ähnlicher Art und Weise funktioniert das auch beim stereoskopischen Sehen beim Menschen, wo aus den Informationen beider Augen eine räumliche Wirkung entsteht.

Für die Suche der Korrespondenzen sind mehrere Schwierigkeiten zu beachten. Zum einen können speziell in der Nähe von Dachrändern Korrespondenzen überdeckt sein, zum anderen können innerhalb homogener Flächen mögliche Korrespondenzen schwer unterschieden werden. Zu erwähnen ist, dass die Berechnung der Tiefeninformation sehr anfällig gegenüber Störungen ist, so dass auch schon leichte Fehler in den Punkten unbrauchbare Tiefeninformationen liefern.

Darum führen viele Verfahren Tests durch (siehe z.B. [Hir08]), um keine falschen Korrespondenzen in die Tiefenkarte aufzunehmen. Dies führt zu unvollständigen Tiefenkarten. Zur weiteren Verarbeitung, wie Klassifikation oder Gebäude-rekonstruktion, sind vollbesetzte Tiefenkarten notwendig. Mit Inpainting-Techniken können diese aus den unvollständigen Tiefenkarten rekonstruiert werden.

Bisher wurde für diese Aufgabe das Standardverfahren harmonisches Inpainting eingesetzt. Eine weitere interessante Methode für diese Anwendung ist das  $TV\text{-}H^{-1}$ -Inpainting, da hier Kanten gleicher Intensität über beschädigte Bereiche hinweg miteinander verbunden werden. Es wird deswegen eine bessere Approximation für abgebrochene Kanten erwartet, wie sie für Tiefenkarten in der Nähe von Dachrändern vorkommen.

Als Input für die Rekonstruktion werden unvollständige Tiefenkarten verwendet, die mit dem Algorithmus von [RHWB14] berechnet werden. Aus Gründen der Rechenzeit berücksichtigt dieses Verfahren nicht alle möglichen Korrespondenzen, sondern arbeitet mit einem diskretisierten Disparitätswürfel. Auch wenn die Genauigkeit etwas besser ist, wenn der Suchraum verkleinert wird, ist die Anzahl der nicht zugewiesenen Tiefenwerte im Endergebnis höher.

Um die Löcher zu füllen, wurden die genannten Methoden für zwei Beispielfelder eines Datensatzes angewendet, die in Abbildung 5.5 dargestellt sind. Die unvollständigen Tiefenkarten sind in Abbildung 5.5 (a) dargestellt. Wie oben beschrieben sind Aufgrund von Überdeckungen keine Informationen in der Nähe der Kante von Dach und Boden vorhanden.

In Abbildung 5.5(c) und (d) sowie in der Detailansicht für eine abgebrochene Kante in Abbildung 5.5 (g) und (h), ist das Ergebnis des harmonischen Inpaintings dargestellt. Die Kante zwischen den Dächern und Boden ist stark verschwommen. Am Ergebnis des  $TV\text{-}H^{-1}$ -Inpaintings, dargestellt in Abbildung 5.5 (e) und (f), bzw. im Detail in Abbildung 5.5 (i), (j), ist zu erkennen, dass diese Situation verbessert ist, da der Übergangsbereich zwischen Dach und Boden kleiner erscheint. Die ist auch im Profil über die Kante, in Abbildung 5.6 dargestellt, erkennbar. An diesem sieht man, dass das  $TV\text{-}H^{-1}$ -Inpainting die Kante zwischen Dach und Boden besser approximiert, als das harmonische Inpainting, da eine senkrechte Wand erwartet wird.

### 5.2.3 Annotation und Texturierung von Gebäudepolygonen

Eine realistische Texturierung von Gebäudepolygonen eines 3D-Modells erhöht die Wiedererkennbarkeit der dargestellten Szene. Die Texturinformationen können aus luftgestützten Aufnahmen von Schrägsichten extrahiert werden. Ein

Problem dabei sind Objekte, die sich vor einer Fassade befinden, wie beispielsweise Mülltonnen, Autos oder Vegetation. Des Weiteren können auch Dächer durch überhängende Baumkronen überdeckt sein. Wegen der Aufnahmetechnik würden diese Objekte auf die Textur übertragen.

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, wie solche Vordergrundobjekte erkannt werden können, um daraus Inpainting-Gebiete zu abzuleiten.

Der Arbeitsablauf für die Texturextraktion wurde in [BHM<sup>+</sup>14] vorgeschlagen: Zuerst wird der Kamerablickwinkel einer gegebenen Schrägsicht geschätzt, worauf eine Verdeckungsanalyse folgt, d. h. es wird bestimmt, welche Polygone des 3D-Models in der Schrägsicht zu sehen sind. Daraufhin wird die Textur aus den jeweiligen Bildbereichen extrahiert. Wenn jedoch nur Gebäudepolygone in die Verdeckungsanalyse einbezogen werden, werden die Vordergrundobjekte nicht identifiziert. Als Folge davon werden Gebäudetexturen durch diese Vordergrundobjekte kontaminiert.

Mithilfe von Tiefenkarten können diese Vordergrundobjekte bestimmt werden. Dafür wird mit dem geschätzten Kamerablickwinkel einer Schrägsicht und der Gebäuderekonstruktion ein synthetisches Tiefenbild berechnet.

Die schematische Darstellung der Situation ist in (Abbildung 5.7 (a)) dargestellt. Nun wird die Differenz aus dem synthetischen Tiefenbild (Abbildung 5.7 (c)) und dem gegebenen, gemessenen Tiefenbild (Abbildung 5.7 (b)) berechnet. Diese Differenz wird mit  $T$  bezeichnet.

Die Inpainting-Gebiete werden mit einem Schwellwertverfahren abgeleitet: Das Inpainting-Gebiet wird dargestellt durch ein Binärbild basierend auf  $T_\delta = (T > \delta)$ , wobei  $\delta$  ein Schwellwert angibt und mit der Wiederherstellungsgenauigkeit zusammenhängt. Sie entsprechen dem Objekt vor den Gebäudepolygonen und können sogar annotiert werden, indem man sie zuerst in den 3D-Raum und dann in das Klassifikationsergebnis projiziert, wie schematisch in Abbildung 5.7 (d) dargestellt.

Für uns ist jedoch das binäre Bild  $D = \text{Morph}(T_\delta)$ , das durch einige morphologische Operationen von  $T_\delta$  verbessert wurde, die Maske für das bevorstehende Inpainting. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.8 (b) und in der Detailansicht für ein Gebäude in Abbildung 5.8 dargestellt. Gleichzeitig sind die projizierten

Polygone des 3D-Modells in Bilder unsere verschiedenen Klassen, so dass das Inpainting klassenweise durchgeführt werden kann.

Nun werden verschiedene Inpainting-Methoden für die Bereinigung der Gebäudetexturen miteinander verglichen. Die Situation für ein Gebäude ist in Abbildung 5.8 (a), (b), (c) bzw. in Detailansicht in Abbildung 5.8 (d), (e), (f) dargestellt. Wie im ersten Beispiel wird das Originalbild in Struktur und im Texturanteil zerlegt. In diesem Beispiel scheitert  $TV-H^{-1}$  (siehe Abbildung 5.8 (g)), da die Klassen keine visuell klare Trennung haben und es keine gegenüberliegenden Kanten gibt, die miteinander verbunden werden könnten. Stattdessen wird der Baum rekonstruiert. In Abbildung 5.8 (h) wird das Ergebnis des modifizierten  $TV-H^{-1}$ -Inpainting gezeigt, in dem die Klassen getrennt sind. Allerdings ist die Trennung beim modifizierten harmonischen Inpaintings (siehe Abbildung 5.8 (i)) klarer und wird durch die einfachere Methode in einer wesentlich geringeren Rechenzeit erreicht. Abbildung 5.4 (j) und (k) zeigt das Ergebnis des texturbasierten Criminisi-Inpaintings mit und ohne Klassen an. Im Standardfall ohne Klassen verschmutzt die Region des Baumes wieder stark das Inpainting-Gebiet, aber im Ergebnis des Criminisi-Inpaintings mit Klassen sind Artefakte auf Dach und Wand sichtbar. In Abbildung 5.8 (l) ist die Kombination von Criminisi-Inpainting für Texturteil und dem modifiziertem harmonischen Inpainting mit Klassen dargestellt. Eine scharfe Kante zwischen Dach und Wand ist sichtbar und die Textur erscheint angemessen.

Bereinigte Texturen sind insbesondere nützlich, um ein Szenario für verschiedene Jahreszeiten anzupassen. Ein Szenario zeigt unser Motivationsbeispiel in Abbildung 1.3, wofür das Modell für ein Winterszenario adaptiert wurde, bei dem die unbereinigten Texturen besonders störend sind.

## 5.3 Fazit

Eine möglichst detailgetreue Darstellung virtueller dreidimensionaler Szenen ist wichtig, um deren Realitätsgehalt und das Situationsempfinden in einer Simulation zu erhöhen. Dies ist für künstliche Szenen kein großes Problem, da in einer Fantasiewelt das 3D-Modell und die Texturen künstlich erzeugt und auf

das Rendering abgestimmt werden können. Komplizierter wird es, sobald die Szene aus Sensordaten, beispielsweise Luftbildern, generiert wird.

Vor allem im städtischen Umfeld sind Überdeckungen sehr häufig, und dadurch ist die Datenlage lückenhaft. Hier kommen die Inpainting-Techniken ins Spiel.

Wir haben drei Probleme betrachtet (Reinigung von Orthophotos, Auffüllen von Tiefenkarten und Texturierung von Gebäudepolygonen) und Ergebnisse für verschiedene Techniken präsentiert:  $TV$ - $H^{-1}$ -Inpainting und das modifizierte harmonische Inpainting für Strukturinpainting sowie das Criminisi-Inpainting für Texturinpainting.

Die Methoden wurden dahingehend modifiziert, dass sie Klassifikationsergebnisse berücksichtigen. Insbesondere erlauben die Änderungen die Einbeziehung von Mehrklassenkarten, z. B. unterschiedliche Wände und Dächer. Für das  $TV$ - $H^{-1}$ -Inpainting wurden Berechnungen im Fourier-Bereich durch die Finite-Elemente-Diskretisierung ersetzt.

Folgende Beobachtung wurde gemacht: Bei Farbbildern liefert das modifizierte harmonische Inpainting Ergebnisse von ausreichender Qualität und sein größter Vorteil gegenüber den anderen Methoden ist die sehr schnelle Rechenzeit. Wir konnten sehen, dass das  $TV$ - $H^{-1}$ -Inpainting für die Rekonstruktion von Tiefenkarten nützlich ist, da es das Problem der scharfen Kanten mildert.

Auf Farbbildern ist es vorteilhaft Textur und Struktur getrennt zu rekonstruieren. Der Grund dafür ist, dass reine texturbasierte Methoden nicht immer die globalen Veränderungen der Beleuchtung erfassen, während das Ergebnis rein strukturbasierter Verfahren kleinskalige Strukturen nicht beachtet.

Eine wichtige Schlussfolgerung ist, dass jede zusätzliche Information über das Inpainting-Gebiet sowohl die Qualität des Ergebnisses als auch die Rechenzeit positiv beeinflusst. Das konnte in der Arbeit eindeutig nachgewiesen werden. Andererseits sind, wie das Beispiel Bereinigung von Orthofotos, neue Methoden oft nur in Spezialfällen den etablierten Methoden überlegen. Deswegen sind in der Praxis, wo oft weitere Informationen zur Verfügung stehen, Kombinationen aus einfacheren Methoden, einer fortschrittlichen, komplizierten Methode vorzuziehen.

In der Arbeit wurden aus dem Klassifikationsergebnis harte Randbedingungen berechnet, so dass Informationen über die Klassengrenzen hinweg isoliert wurden. Dies hat allerdings den Nachteil, dass Ungenauigkeiten in der Klassifikation zu einer groben Verschlechterung der Ergebnisse führen kann.

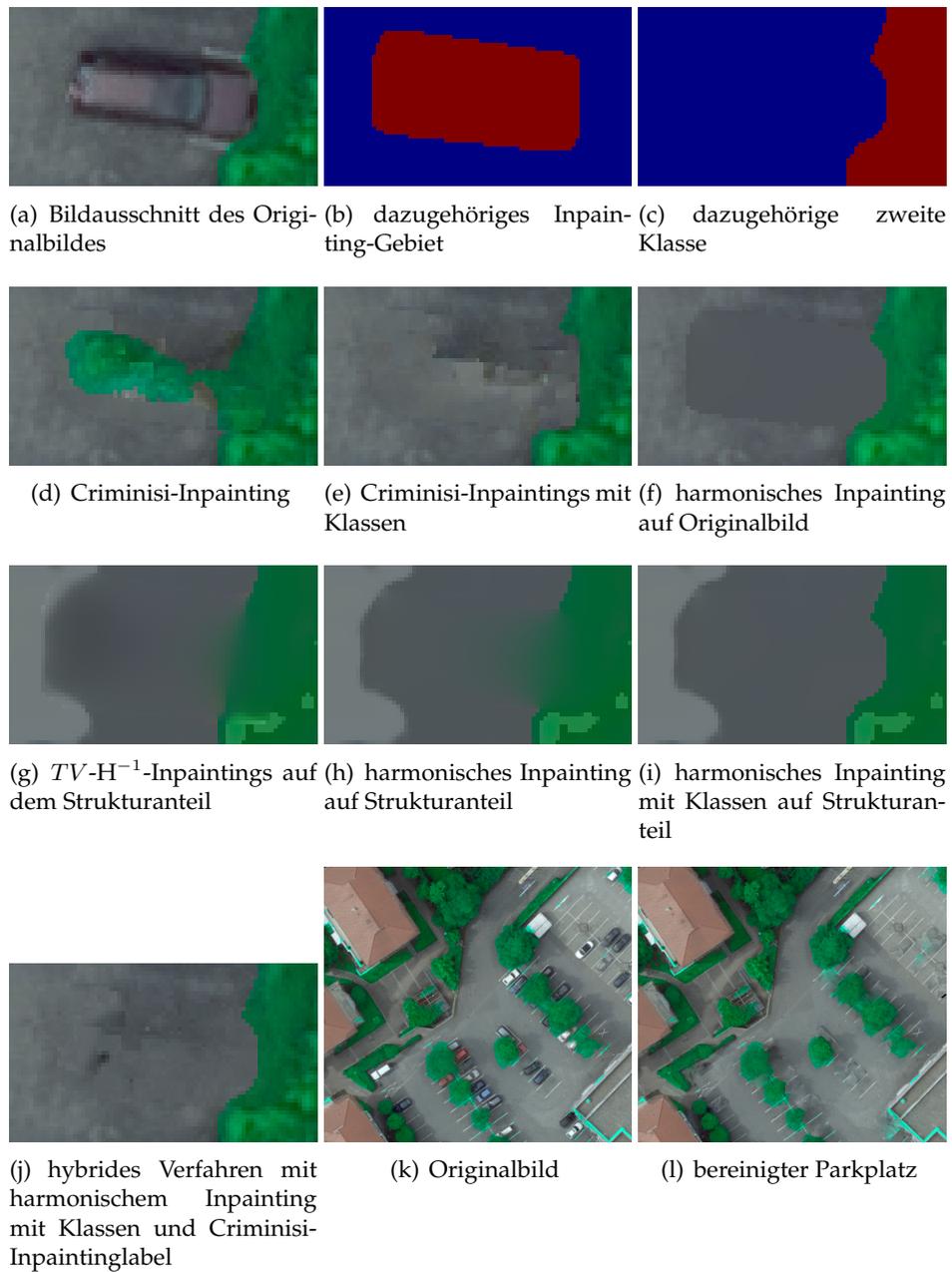


Abbildung 5.4: Bereinigung von Bodentexturen im Datensatz Vaihingen.

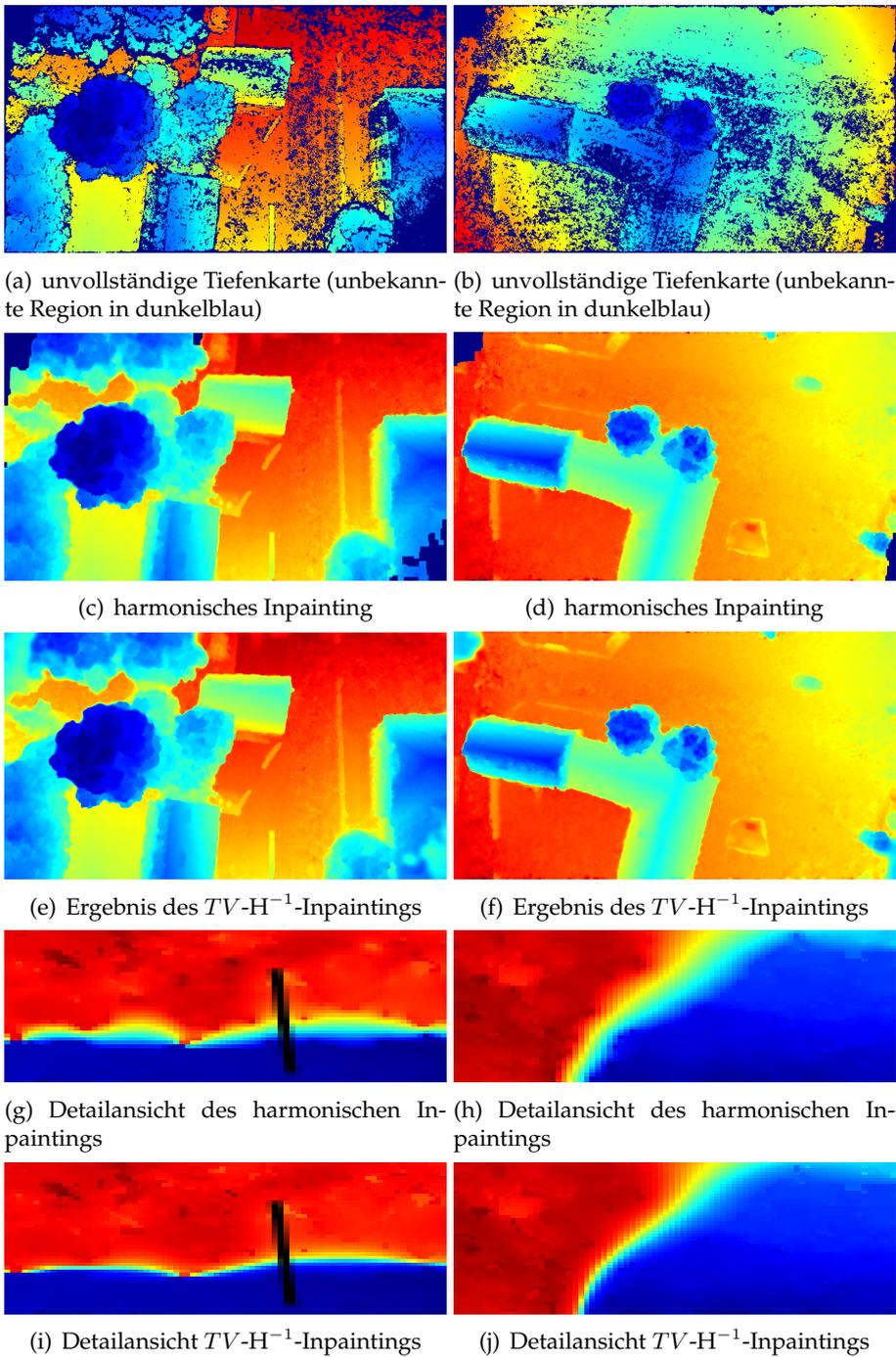


Abbildung 5.5: Rekonstruktion zweier Tiefenkarten.

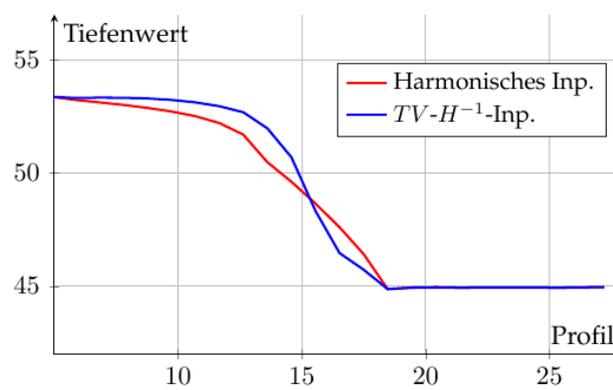
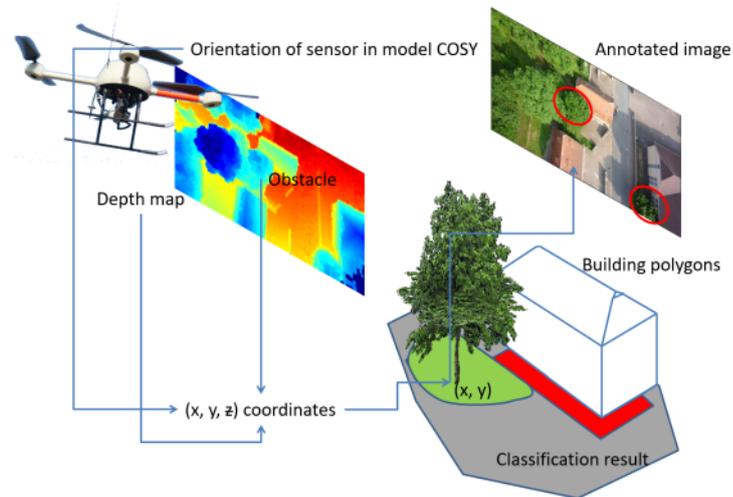
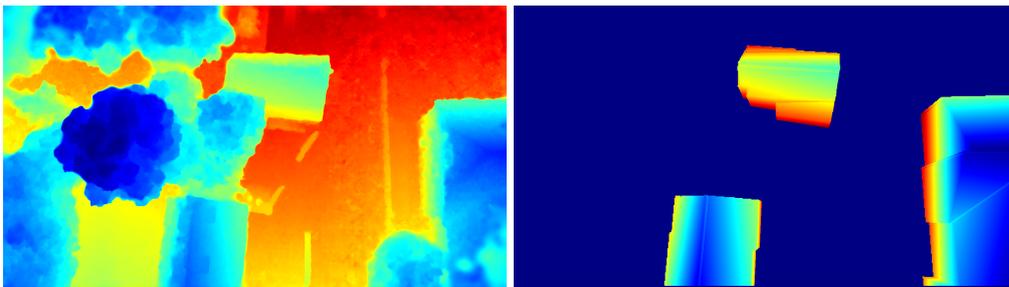


Abbildung 5.6: Tiefenverlauf über eine Kante von Abb. 5.5 (g) und (i). Der Verlauf des  $TV-H^{-1}$ -Inpaintings ist eine bessere Näherung an die Kante.



(a) Schematische Darstellung der Situation

(b) Ergebnis der Rekonstruktion mit dem  $TV$ - $H^{-1}$ -Inpainting,

(c) Synthetische Tiefenkarte aus dem 3D-Modell



(d) Ergebnis der Annotation

Abbildung 5.7: Identifikation und Annotation von Vordergrundobjekten vor den Gebäuden (Bereitgestellt von D. Bulatov).

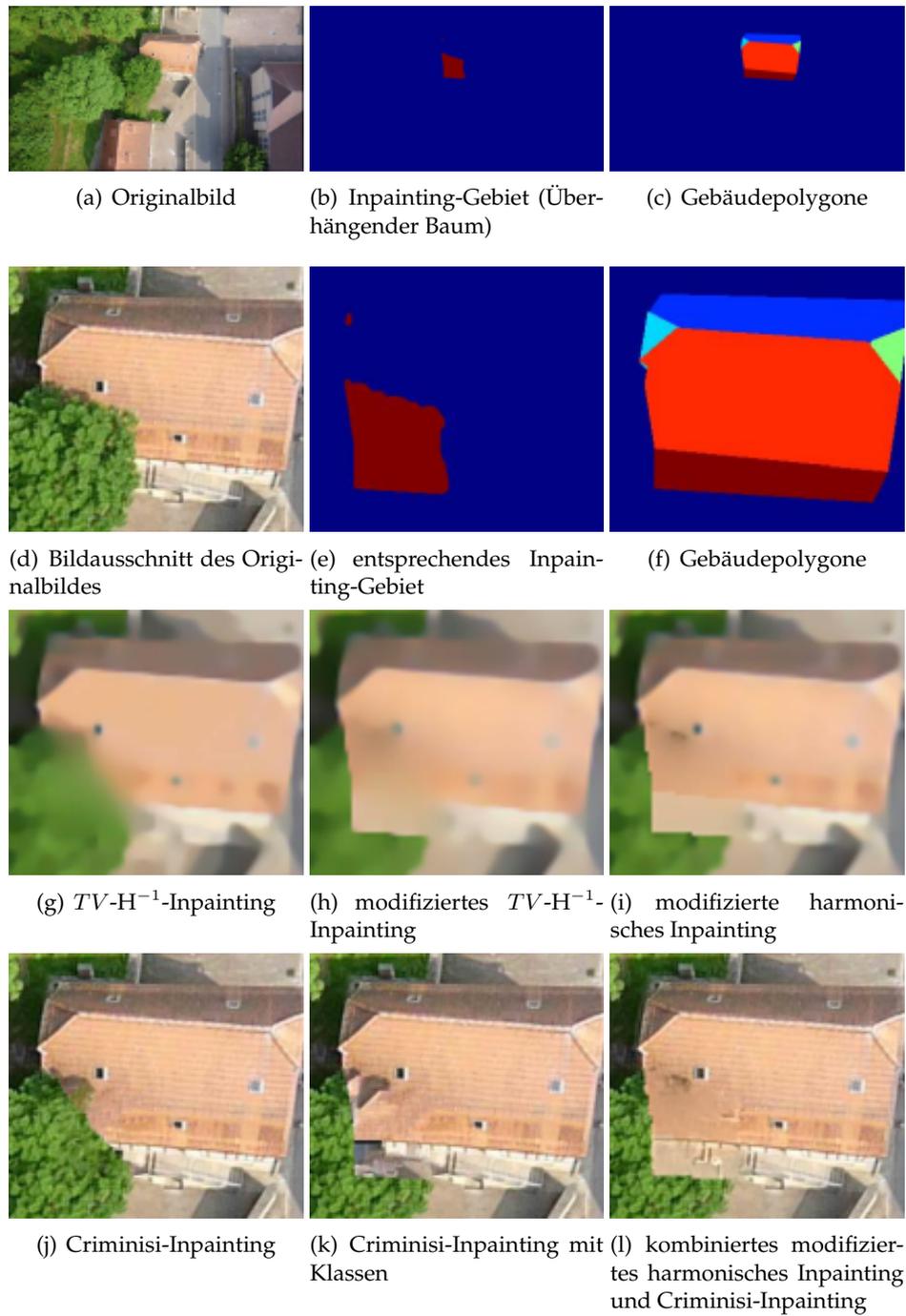


Abbildung 5.8: Bereinigung einer Gebäudetextur im Datensatz Bonnland.

# Literaturverzeichnis

- [AF03] ADAMS, Robert A. ; FOURNIER, John J.: *Sobolev spaces*. Bd. 140. Academic press, 2003
- [BBS01] BERTALMIO, Marcelo ; BERTOZZI, Andrea L. ; SAPIRO, Guillermo: Navier-stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting. In: *Computer Vision and Pattern Recognition, 2001. CVPR 2001. Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on* Bd. 1 IEEE, 2001, S. I–355
- [BCK16] BAEK, Seung-Hwan ; CHOI, Inchang ; KIM, Min H.: Multiview image completion with space structure propagation. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2016, S. 488–496
- [BDTL15a] BUYSSENS, Pierre ; DAISY, Maxime ; TSCHUMPERLÉ, David ; LÉZORAY, Olivier: Exemplar-based inpainting: Technical review and new heuristics for better geometric reconstructions. In: *IEEE transactions on image processing* 24 (2015), Nr. 6, S. 1809–1824
- [BDTL15b] BUYSSENS, Pierre ; DAISY, Maxime ; TSCHUMPERLÉ, David ; LÉZORAY, Olivier: Superpixel-based depth map inpainting for RGB-D view synthesis. In: *Image Processing (ICIP), 2015 IEEE International Conference on* IEEE, 2015, S. 4332–4336
- [BEG07] BERTOZZI, Andrea L. ; ESEDOGLU, Selim ; GILLETTE, Alan: Analysis of a two-scale cahn-hilliard model for image inpainting. *Multiscale Modeling and Simulation* 6 (3). (2007)
- [BHM<sup>+</sup>14] BULATOV, Dimitri ; HÄUFEL, Gisela ; MEIDOW, Jochen ; POHL, Melanie ; SOLBRIG, Peter ; WERNERUS, Peter: Context-based automatic reconstruction and texturing of 3D urban terrain for quick-

- response tasks. In: *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 93 (2014), S. 157–170
- [BHS09] BURGER, Martin ; HE, Lin ; SCHÖNLIEB, Carola-Bibiane: Cahn–Hilliard inpainting and a generalization for grayvalue images. In: *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2 (2009), Nr. 4, S. 1129–1167
- [BKSW14] BOSCH, Jessica ; KAY, David ; STOLL, Martin ; WATHEN, Andrew J.: Fast solvers for Cahn–Hilliard inpainting. In: *SIAM Journal on Imaging Sciences* 7 (2014), Nr. 1, S. 67–97
- [BM07] BORNEMANN, Folkmar ; MÄRZ, Tom: Fast image inpainting based on coherence transport. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 28 (2007), Nr. 3, S. 259–278
- [BVSO03] BERTALMIO, Marcelo ; VESE, Luminita ; SAPIRO, Guillermo ; OSHER, Stanley: Simultaneous structure and texture image inpainting. In: *Image Processing, IEEE Transactions on* 12 (2003), Nr. 8, S. 882–889
- [CBDAN14] CASACA, Wallace ; BOAVENTURA, Maurílio ; DE ALMEIDA, Marcos P. ; NONATO, Luis G.: Combining anisotropic diffusion, transport equation and texture synthesis for inpainting textured images. In: *Pattern Recognition Letters* 36 (2014), S. 36–45
- [Col13] COLLATZ, L.: *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2013 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). <https://books.google.de/books?id=12a0BgAAQBAJ>. – ISBN 9783642950285
- [CPT04] CRIMINISI, Antonio ; PÉREZ, Patrick ; TOYAMA, Kentaro: Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting. In: *Image Processing, IEEE Transactions on* 13 (2004), Nr. 9, S. 1200–1212
- [CS01] CHAN, Tony F. ; SHEN, Jianhong: Nontexture inpainting by curvature-driven diffusions. In: *Journal of Visual Communication and Image Representation* 12 (2001), Nr. 4, S. 436–449
- [DM12] DAL MASO, Gianni: *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Bd. 8. Springer Science & Business Media, 2012

- 
- [ES02] ESEDOGLU, Selim ; SHEN, Jianhong: Digital inpainting based on the Mumford–Shah–Euler image model. In: *European Journal of Applied Mathematics* 13 (2002), Nr. 4, S. 353–370
- [Eva10] EVANS, L.C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010 (Graduate studies in mathematics). – ISBN 9780821849743
- [Foc12] FOCUS ONLINE: *Hobby-Malerin aus Spanien überpinselt Ecce Homo*. <https://tinyurl.com/9w7ylr8>, 2012. – Besucht: 27.09.2017
- [GLM14] GUILLEMOT, Christine ; LE MEUR, Olivier: Image inpainting: Overview and recent advances. In: *IEEE signal processing magazine* 31 (2014), Nr. 1, S. 127–144
- [HB95] HEEGER, David J. ; BERGEN, James R.: Pyramid-based texture analysis/synthesis. In: *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques ACM*, 1995, S. 229–238
- [HE07] HAYS, James ; EFROS, Alexei A.: Scene completion using millions of photographs. In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* Bd. 26 ACM, 2007, S. 4
- [Hir08] HIRSCHMÜLLER, H.: Stereo Processing by semi-global matching and mutual information. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 30 (2008), Nr. 2, S. 328–341
- [HKAK14] HUANG, Jia-Bin ; KANG, Sing B. ; AHUJA, Narendra ; KOPF, Johannes: Image completion using planar structure guidance. In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 33 (2014), Nr. 4, S. 129
- [HLZ<sup>+</sup>16] HE, S ; LIU, L ; ZHANG, Yongqiang ; YANG, J ; SHI, D ; CHENG, Dansong: An improved image inpainting method based on TV-H-1 model. 48 (2016), 02, S. 167–172
- [JT03] JIA, Jiaya ; TANG, Chi-Keung: Image repairing: Robust image synthesis by adaptive nd tensor voting. In: *Computer Vision and Pattern Recognition, 2003. Proceedings. 2003 IEEE Computer Society Conference on* Bd. 1 IEEE, 2003, S. I–I

- [KBS16] KOTTLER, Benedikt ; BULATOV, Dimitri ; SCHILLING, Hendrik: Improving semantic orthophotos by a fast method based on harmonic inpainting. In: *Pattern Recognition in Remote Sensing (PRRS), 2016 9th IAPR Workshop on IEEE*, 2016, S. 1–5
- [LBGK07] LEBERL, Franz ; BISCHOF, Horst ; GRABNER, Helmut ; KLUCKNER, Stefan: Recognizing cars in aerial imagery to improve orthophotos. In: *Proceedings of the 15th annual ACM international symposium on Advances in geographic information systems ACM*, 2007, S. 2
- [LMGG11] LE MEUR, Olivier ; GAUTIER, Josselin ; GUILLEMOT, Christine: Exemplar-based inpainting based on local geometry. In: *Image Processing (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on IEEE*, 2011, S. 3401–3404
- [LZ11] LI, Shutao ; ZHAO, Ming: Image inpainting with salient structure completion and texture propagation. In: *Pattern Recognition Letters* 32 (2011), Nr. 9, S. 1256–1266
- [Mär11] MÄRZ, Thomas: Image inpainting based on coherence transport with adapted distance functions. In: *SIAM Journal on Imaging Sciences* 4 (2011), Nr. 4, S. 981–1000
- [Mar12] MARCUS KNILL AND HILDEGARD KNILL: *Bildmanipulationen*. <https://tinyurl.com/f5nrh>, 2012. – Besucht: 27.09.2017
- [MM] MODICA, L ; MORTOLA, S: Un esempio di-convergenza. In: *Bull. Un. Mat. Ital.*(5)
- [MM77] MODICA, L ; MORTOLA, S: Il limite nella-convergenza di una famiglia di funzionali ellittici, Boll. In: *Math. Ital.*, A 14 (1977)
- [Nin17] NINA FRIESS: *Der Große Terror*. <https://tinyurl.com/y6w7dhhb>, 2017. – Besucht: 27.09.2017
- [PS00] PORTILLA, Javier ; SIMONCELLI, Eero P.: A parametric texture model based on joint statistics of complex wavelet coefficients. In: *International journal of computer vision* 40 (2000), Nr. 1, S. 49–70

- 
- [RDB94] ROSSI, Richard E. ; DUNGAN, Jennifer L. ; BECK, Louisa R.: Kriging in the shadows: geostatistical interpolation for remote sensing. In: *Remote Sensing of Environment* 49 (1994), Nr. 1, S. 32–40
- [RHWB14] ROTHERMEL, Mathias ; HAALA, Norbert ; WENZEL, Konrad ; BULATOV, Dimitri: Fast and robust generation of semantic urban terrain models from UAV video streams. In: *Pattern Recognition (ICPR), 2014 22nd International Conference on IEEE*, 2014, S. 592–597
- [Rob17] ROBERT KNESCHKE: *Frankreich schreibt Kennzeichnung für Körper-Retusche bei kommerziellen Fotos vor*. <https://tinyurl.com/ybrelk82>, 2017. – Besucht: 29.11.2017
- [SB11] SCHÖNLIEB, Carola-Bibiane ; BERTOZZI, Andrea: Unconditionally stable schemes for higher order inpainting. In: *Commun. Math. Sci* 9 (2011), Nr. 2, S. 413–457
- [SBM17] SCHILLING, Hendrik ; BULATOV, Dimitri ; MIDDELMANN, Wolfgang: Object-based detection of vehicles using combined optical and elevation data. In: *To appear in ISPRS Juornal of Photogrammetry and Remote Sensing* (2017)
- [SC02] SHEN, Jianhong ; CHAN, Tony F.: Mathematical models for local nontexture inpaintings. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 62 (2002), Nr. 3, S. 1019–1043
- [SLC<sup>+</sup>15] SHEN, Huanfeng ; LI, Xinghua ; CHENG, Qing ; ZENG, Chao ; YANG, Gang ; LI, Huifang ; ZHANG, Liangpei: Missing information reconstruction of remote sensing data: A technical review. In: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 3 (2015), Nr. 3, S. 61–85
- [Tel04] TELEA, Alexandru: An image inpainting technique based on the fast marching method. In: *Journal of graphics tools* 9 (2004), Nr. 1, S. 23–34
- [Tem88] TEMAM, Roger: *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York : Springer, 1988 (Applied mathematical sciences ; 68)

- [VO03] VESE, Luminita A. ; OSHER, Stanley J.: Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. In: *Journal of scientific computing* 19 (2003), Nr. 1, S. 553–572
- [WOG06] WINNEMÖLLER, Holger ; OLSEN, Sven C. ; GOOCH, Bruce: Real-time video abstraction. In: *ACM Transactions On Graphics (TOG)* Bd. 25 ACM, 2006, S. 1221–1226
- [YCL<sup>+</sup>16] YEH, Raymond ; CHEN, Chen ; LIM, Teck Y. ; HASEGAWA-JOHNSON, Mark ; DO, Minh N.: Semantic Image Inpainting with Perceptual and Contextual Losses. In: *arXiv preprint arXiv:1607.07539* (2016)
- [ZHW10] ZHANG, Yuhang ; HARTLEY, Richard ; WANG, Lei: Fast multi-labelling for stereo matching. In: *Computer Vision–ECCV 2010*. Springer, 2010, S. 524–537